MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

M DCCC LXXVII

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

S. 804. D. 25.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

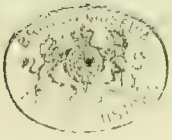
SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TOME DOUZIÈME

PARIS

IMPRIMERIE IMPÉRIALE

M DCCC LIV



TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE DOUZIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Pages.

Traité entomologique et pathologique de la gale de l'homme, par M. le Dr H. Bourguignon..... 1

Sur l'accroissement en diamètre des plantes dicotylées, par MM. Durand et Manoury..... 169

Mémoires sur la vision, par M. L. L. Vallée..... 204

Mémoire sur les eaux de pluie recueillies à l'observatoire de Paris, par M. Barral..... 265

Recherches sur la série de Lagrange, par M. Félix Chio..... 340

Mémoire sur le papyrus des anciens et sur le papyrus de Sicile, par M. Philippe Parlatore..... 469

Mémoire sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité, par M Yvon Villarceau..... 503

FIN DE LA TABLE.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

TRAITÉ

ENTOMOLOGIQUE ET PATHOLOGIQUE

DE

LA GALE DE L'HOMME,

PAR H. BOURGUIGNON,

DOCTEUR EN MÉDECINE, LAURÉAT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
EX-INTERNE ET LAURÉAT DES HÔPITAUX,
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DE MÉDECINE DE LA VILLE DE PARIS.

AVANT-PROPOS.

Ce n'est pas sans un vif intérêt qu'on porte aujourd'hui son examen sur la science médicale : en effet, aucune doctrine ne fait loi, aucun système ne rallie les esprits. D'où vient cette apparente indifférence au point de vue des doc-

trines? La polémique n'a pourtant rien qui l'entrave, la presse est prompte à répandre les idées, les chaires sont ouvertes à qui veut se faire entendre; et pourtant aucun grand maître ne se montre, aucune idée, aucun système ne profite de ce moment propice pour s'imposer à la foule, toujours prête à saluer les novateurs de ses applaudissements; en un mot, pourquoi cette halte? Ne serait-ce pas parce que la médecine, après avoir cherché à se constituer comme science *exacte,* semble enfin comprendre, dans notre temps de positivisme, qu'elle s'était trop hâtée de conclure? Reconnaîtrait-on aujourd'hui combien se sont abusés ceux qui ont voulu classer, résumer et faire de la synthèse?

La médecine, qui a besoin du concours que lui prêtent toutes les autres sciences pour faire des progrès véritables, ne peut que les suivre à grande distance : c'est ainsi que la chimie, la physique ont depuis longtemps des lois, des principes qui leur servent comme de base sur laquelle elles s'élèvent, tandis que la médecine en est encore, sous beaucoup de rapports, à la période hypothétique. Chacun a pu remarquer aussi quelle influence la philosophie a toujours eue sur la médecine, et aujourd'hui comme autrefois il est facile de voir combien l'esprit de la science médicale réfléchit avec fidélité les idées philosophiques régnantes; ainsi, de même que l'éclectisme règne dans l'empire de l'idéologie, de même aussi l'éclectisme règne en médecine : temps de repos, temps de critique, pendant lequel les esprits n'en sont pas moins à l'œuvre pour marcher vers le progrès.

Un coup d'œil général sur la science médicale le prouvera suffisamment. Cette science, envisagée du point de vue le plus élevé, se divise en trois grandes branches principales, qui comprennent l'anatomie, la physiologie et la pathologie. Rien n'échappe à cette division; car

nous entendons par anatomie la science de la structure *de tous les êtres organisés;* par physiologie, la science de leurs fonctions, et par pathologie la science de leurs maladies. Ce n'est point dans l'homme seulement que se trouve l'explication des mystères que sa constitution nous présente. Cette explication se trouve dans toute la nature: l'homme résume la création, il en est le chef-d'œuvre. S'adresser directement à lui pour se rendre compte des secrets de sa structure, de ses fonctions, de ses maladies, c'est oublier qu'il est, en toutes recherches, une méthode philosophique qu'il faut suivre sous peine de laisser sur son chemin des problèmes insolubles, méthode qui consiste à procéder du simple au composé; en un mot, étudier la constitution, les fonctions et les maladies de l'homme sans connaître la constitution, les fonctions, les *maladies* des êtres placés au-dessous de lui, c'est oublier que la connaissance des faits complexes résulte de la connaissance des faits simples ou isolés. Ces vérités triviales semblent avoir été comprises, puisqu'on est censé exiger du médecin des connaissances en histoire naturelle, du moins pour ce qui est de l'anatomie et de la physiologie; car pour la pathologie comparée, on ne lui en donne pas la moindre idée. Mais malgré ces connaissances en histoire naturelle, il faut en convenir, le médecin aborde l'étude de l'homme sans avoir de notions bien précises sur l'organisation des êtres inférieurs; et tel phénomène ou telle fonction qui reste pour nous incompréhensible, serait peut-être explicable, si nous avions observé avec soin tout ce qui dans la nature aurait pu mettre sur la voie de son interprétation.

L'anatomie a depuis longtemps fait connaître tout ce que la main armée du scalpel pouvait découvrir; mais comme l'anatomie, ou plutôt la connaissance de la structure de

l'homme, n'a pas seulement pour but la notion de ce qu'il a de grossier, mais bien de tout ce qui le constitue, comme trame interstitielle, ou comme organisation intime, tant solide que liquide, il est arrivé que la structure intime de beaucoup de nos organes, ainsi que les propriétés des liquides, est restée inconnue : de là des difficultés pour constater des lésions cachées, mais réelles; car, pour apprécier un désordre, il faut avoir une idée bien nette de ce qu'est la nature dans son intégrité.

La chimie, nous le savons, a dosé les éléments pondérables qui constituent les différents liquides, chyle, sang, lait, etc. mais l'observation n'a point saisi les fonctions de ces éléments. Le sang, par exemple, est le siége de modifications qui intéressent au plus haut point l'organisme, et les fonctions des éléments qui le constituent nous sont inconnues. Nous ignorons comment la nutrition s'opère, à quel élément du sang l'assimilation réparatrice emprunte ses produits organisateurs. Est-ce aux dépens du sérum, qui tient en suspension de la fibrine et de l'albumine ? est-ce aux dépens des corpuscules alimentaires qui sont transportés dans la circulation générale, non plus seulement par le canal thoracique, mais par les veines de l'estomac elles-mêmes, comme MM. Sandras et Bourchardat l'ont démontré ? Ces corpuscules alimentaires vont-ils au poumon, pour y subir un premier travail qui les prépare à l'élaboration ? est-ce pour y oxyder leur fer ? s'y rougir ? ou sont-ils de prime abord les éléments de l'organisation, le principe de la chair solidifiée ? Connaissons-nous, non pas la nature du fluide nerveux, car apprécier la nature des choses est à jamais au-dessus du génie de l'homme, mais ses lois, ce qui règle ses phénomènes, et quelles conditions sont plus ou moins favorables à sa production ? Connaissons-nous comment les

glandes fonctionnent? comment l'absorption et les sécrétions s'opèrent? Tous ces faits qui dominent la physiologie sont à peine entrevus, et, puisqu'ils constituent la santé, nous pouvons tout au moins douter que celle-ci nous soit connue. Dire que la santé résulte de l'harmonie de toutes les fonctions, quand ces fonctions sont inconnues, c'est se payer de mots, c'est exprimer un fait, sans se préoccuper de ses causes essentielles : la santé n'est jamais pour nous que relative; on peut tout aussi bien la définir un état de maladie inappréciable à nos sens, qu'un état physiologique opposé à l'état de maladie. On pourrait soutenir que nous touchons tous à des degrés différents aux maladies, par nos organes ou nos fonctions; à tel point que si la physiologie de l'homme nous était parfaitement connue, il est peu d'organisations que l'analyse trouverait irréprochables.

Voilà, si nous ne nous abusons, quant à l'anatomie et à la physiologie, le véritable état de la science médicale; et comme la pathologie offre avec elles un rapport naturel, on peut facilement prévoir à quel progrès elle est parvenue.

En pathologie, comme en anatomie et en physiologie, les travailleurs se sont jetés avec empressement sur toutes les études d'une exécution facile; ils ont interrogé de l'œil et du scalpel les organes malades, et en peu d'années une science toute nouvelle, l'anatomie pathologique, a étendu immensément le cercle de nos connaissances. Mais bientôt le zèle s'est ralenti, à tel point qu'aujourd'hui on a beau scruter les cadavres, ils restent muets devant d'habiles observateurs. On dirait que tout a été vu et connu. Si la nature morte ne révèle plus ses secrets, c'est que nos moyens d'investigation sont restés au-dessous de nos besoins: l'inconnu nous trouve impuissants, parce que nous manquons de procédés nouveaux pour analyser ses mys-

tères, parce que nous nous obstinons à vouloir trouver sur les cadavres les causes des maladies, alors qu'ils ne présentent que des effets. Aussi M. Andral était-il guidé par une haute raison quand il interrogeait la nature vivante pour découvrir la cause de ses souffrances : et ses recherches sur le sang montrent suffisamment quels succès attendent les travailleurs qui dirigeront leurs recherches en ce sens.

Nous constatons depuis longtemps les ravages de la phthisie, du cancer, de la fièvre typhoïde, de l'esthiomène, de l'éléphantiasis des Grecs, du choléra; et nous restons spectateurs effrayés devant ces maux qui nous trouvent impuissants pour les combattre. En effet, qui de nous oserait prétendre connaître la cause essentielle et le traitement *rationnel* de ces maladies? Ce n'est pas en constatant la présence des tubercules pulmonaires, des ulcérations intestinales, etc. etc. qui ne sont qu'une conséquence, qu'un effet éloigné d'une cause profonde et générale, qu'on arrivera à découvrir la cause cachée de la phthisie et de la fièvre typhoïde.

Une méthode aveugle, anti-philosophique, nous a donc toujours guidés dans cette voie périlleuse. On ne saurait trop le redire, il y a chez nous des faits physiques, des faits chimiques, des faits anatomiques, des faits physiologiques et des faits pathologiques.

La connaissance des phénomènes vitaux ou morbides ne peut résulter que de l'interprétation vraie de ces divers ordres de faits. Nous ne pouvons prétendre définir à notre époque la *force vitale* ou un *principe morbide;* mais si tant est que cela soit possible, les sciences physique, chimique, anatomique, physiologique et pathologique, peuvent seules nous y conduire. Sans doute que nous ne saurons jamais pourquoi les molécules s'agrégent pour former des cris-

taux, pourquoi telles ou telles conditions réunies font germer une plante, pourquoi deux corps de nature différente développent de l'électricité, se repoussent ou s'attirent, pourquoi les mondes qui gravitent dans l'espace s'y tiennent suspendus : on pourra, à l'exemple du grand Newton, découvrir des lois, mais on ne pénétrera jamais l'essence des forces mises en jeu. C'est là le secret de la nature. La vie, l'électricité, l'attraction s'étudient, mais ne s'expliquent pas. Chaque minéral, végétal ou animal, a sa structure intime, ses propriétés, ses phénomènes cachés, ses fonctions, ses lois; voilà ce que nous pouvons connaître. L'étude de l'homme à l'état de santé ou de maladie nous a sans doute révélé sous beaucoup de rapports d'importantes notions; mais si nous sommes riches d'un grand nombre de faits, nous manquons de conclusions, d'accords, de principes généraux, de lois, et cela parce qu'on s'en est tenu à la superficie des faits : nous observons les symptômes et nous négligeons les lésions essentielles dont ils ne sont que le résultat. Un exemple nous fera mieux comprendre : une chlorose à son début, avant qu'elle soit compliquée de troubles graves dans les organes et leurs fonctions, alors qu'elle consiste dans une altération légère du sang, échappait autrefois à l'observation; aujourd'hui, au contraire, que la chimie nous a fait connaître la cause essentielle et presque la nature de la maladie, il nous suffit de rendre au sang l'élément constitutif qui lui manque pour rétablir la santé. Eh bien! dans toute maladie grave, le médecin devrait ainsi procéder et appeler à son aide, non-seulement la chimie, mais toutes les sciences qui peuvent lui prêter un concours efficace. Croit-on que si l'on eût éclairci tant de points de physiologie encore inexpliqués, et porté son investigation sur tous les produits morbides,

vivants et mortifiés, susceptibles d'une analyse chimique, microscopique, etc. etc. qu'on ne fût pas arrivé à des notions plus précises? Pour nous, nous en avons la conviction, et nous restons persuadé que des expériences variées à l'infini, pour étudier l'altération primitive dans la phthisie, le cancer, la fièvre typhoïde, le choléra, etc. etc. etc. ne seraient pas restées sans résultat pour l'honneur de la médecine et le bonheur du genre humain. Ce n'est point à l'Institut qu'on accueillera nos espérances avec un sourire d'ironie et d'incrédulité. Dans ce sanctuaire de la science, on sait ce que l'esprit humain peut attendre de l'avenir : les travaux de MM. Dumas, Flourens, Boussingault, Milne Edwards, Rayer, Lallemand, Andral, et ceux des Muller, Vogel, Henlé, Weber, etc. etc. nous montrent assez ce que les études physiologiques promettent à la science médicale de progrès certains en pathologie et en thérapeutique. Quoi de plus philosophique, en effet, que de porter ses études sur l'embryogénie, comme l'a fait M. Velpeau ; sur les altérations du sang ; de cimenter, à l'exemple de M. Rayer, l'alliance inséparable qui doit unir l'iatrique humaine à celle de tous les animaux. Cette grande idée renferme en germe la régénération de la médecine, et si quelque chose nous étonne, c'est l'indifférence des hommes avides de renom en face de cette grande vérité.

De ces généralités nous sommes en droit de conclure que la science médicale a fait d'incontestables progrès; que les notions acquises ont porté, en anatomie, sur la structure grossière de l'homme, sur les tissus susceptibles d'une dissection facile, et non sur la trame interstitielle des organes, ni sur la constitution élémentaire des liquides vivants; qu'en physiologie, la dynamique a surtout attiré l'attention des observateurs, et qu'ils n'ont point pénétré dans l'es-

sence des phénomènes, qui touchent aux fonctions secrètes des organes et de la nutrition; qu'en pathologie on a trop souvent pris l'effet pour la cause, en cherchant sur le cadavre l'explication des maladies, qui n'y laissent que leurs effets.

Il est clair qu'en se servant des mêmes moyens on arriverait aux mêmes résultats : il faut donc de toute nécessité user d'une méthode nouvelle et appeler à son aide des instruments plus perfectionnés. A l'avenir, l'œil et le scalpel seront insuffisants; le microscope doit remplacer notre appareil optique, et les expériences chimiques et physiques tenir lieu du scalpel.

On comprendra un jour, à l'aide de ces nouveaux moyens d'observation, les modifications que subit la molécule alimentaire dans l'assimilation réparatrice; on verra quel rôle joue le corpuscule du sang dans la circulation, en le suivant dans ses transformations diverses; on saura au juste sur quelle partie solide ou liquide porte primordialement l'altération morbide dans les affections générales, phthisie, fièvre typhoïde, etc. etc. on confiera au poumon, à l'estomac, au foie, ces trois grands modificateurs du sang, une élaboration médicatrice qui portera sur toute l'économie; on fera, en un mot, de la chimie vivante. On saura si le sérum du sang ne contiendrait pas seul les altérations morbides dans certaines affections générales, si lui seul ne renfermerait pas l'élément inflammatoire, comme le prouvent les modifications apportées dans sa composition et dont l'excès de fibrine est une conséquence: on avisera alors à modifier ce sérum dans ses qualités ou sa quantité, en épargnant les produits solides ou les corpuscules, et cela afin d'aider à la guérison, en ménageant les forces dont la nature a besoin.

On montrera que les préparations antimoniales et mer-

curielles, si efficaces dans l'inflammation, agissent surtout en modifiant chimiquement les liquides; qu'il en est ainsi de l'iodure de potassium et de nos médicaments les plus efficaces. On portera son attention sur le système lymphatique et sur la composition de la lymphe dans les maladies, études trop négligées et pourtant bien riches de faits nouveaux; car un système circulatoire, aussi important que celui des vaisseaux blancs, joue dans l'absorption un rôle qu'on a trop oublié. Les vaisseaux lymphatiques, en effet, paraissent être, dans bien des cas, la voie exclusive que suivent certains liquides morbides pour infecter l'économie, dans la syphilis, par exemple. En un mot, la physiologie, éclairée par les vivisections, doit infailliblement doter la science médicale de connaissances nouvelles, importantes, et la fin du XIX^e^ siècle, livrée aux études positives, laissera le dogmatisme oiseux, dont Broussais a été le dernier écho, aux spéculateurs émérites qui voient dans la médecine une science faite et dans les élucubrations de cabinet une source infaillible de progrès. Quand les fonctions des organes ou des appareils d'organes seront comprises, quand les altérations ou maladies seront connues et toujours curables, le vitalisme pourra hasarder ses hypothèses, constituer la science de la vie; mais jusque-là soyons organiciens, observons, constatons les faits.

Il faut donc le reconnaître avec satisfaction, les travailleurs ont senti le besoin d'avoir recours à de nouveaux instruments pour se livrer à l'étude des maladies, et le microscope est un de ceux qu'ils ont le plus généralement employés dans cette intention. Mais ici encore l'homme s'est montré irréfléchi, l'amour du merveilleux l'a emporté chez lui sur l'amour de la vraie science, ou plutôt il a cru qu'il rendrait d'autant plus de services que ses travaux

seraient plus curieux, plus extraordinaires, plus transcendants; et d'un seul bond il est allé, des solides, qu'il connaissait à peine, étudier dans les humeurs les infiniment petits, dont il a vu la structure, mais dont il a imparfaitement compris l'usage et la destination.

Il aurait dû se rappeler que dans une science tous les faits s'enchaînent étroitement, et que vouloir comprendre les phénomènes vitaux à l'aide de l'inspection des liquides, sans connaître les tissus capillaires où ils circulent, et l'intérieur des organes où ils s'élaborent ou fonctionnent, c'était au moins s'abuser sur ses moyens, à part les inconvénients qui devaient en résulter pour l'étude microscopique elle-même. Cette étude encore si incertaine, si difficile, demande en effet une longue école, des essais transitoires répétés, avant d'arriver à l'inspection des globules de lait, du pus, ou du sang. Ces réflexions permettront de comprendre pourquoi les recherches micrographiques nous ont conduit à des notions encore peu profitables dans l'application, pourquoi surtout les observateurs ont été si souvent en dissidence sur les questions les plus simples, et cela au grand détriment du crédit de la science microscopique.

Ces faits nous ont frappé : il nous a semblé qu'on pourrait reprendre avec utilité l'étude de la constitution humaine, saine ou malade, là où l'œil et le scalpel l'avaient laissée, et cela, non pas en se servant des moyens les plus puissants que l'optique met à notre disposition, mais en appelant seulement à notre aide une amplification appropriée à nos besoins. Partant de cette idée, nous avons pris un microscope composé, d'une amplification de 70 diamètres, *redressant l'image*, et nous l'avons appliqué à des recherches pathologiques. L'anatomie et la physiologie nous offraient d'utiles travaux à entreprendre;

mais nous avons obéi aux exigences de notre position, et c'est à la pathologie que nous nous sommes adressé de préférence. D'ailleurs, notre position comme interne nous engageait à profiter des matériaux que certains hôpitaux mettaient à notre portée, et devait naturellement influer sur le choix des maladies qui ont fait l'objet de nos recherches.

Cherchant donc, dans le cadre nosologique, les affections qui étaient les plus propres à mettre en relief les avantages attachés à ce mode d'observation et à montrer ce que l'anatomie, la physiologie et la pathologie peuvent en attendre, il nous a paru que les maladies de peau offraient un vaste champ d'étude encore inexploré, et parmi elles, la gale a fixé notre choix.

Tel était notre but; mais c'est à l'application qu'il en fallait venir, et là des difficultés devaient être surmontées: on le conçoit facilement; employer le microscope dans les conditions ordinaires de son usage; prendre une parcelle de débris organiques, de production pathologique, et la porter sur la platine du microscope, c'était rester dans d'étroites limites, sans étendre le champ de l'observation et des découvertes. Il fallait user d'autres moyens d'étude. Nous avons enlevé du socle qui le supporte le tube d'un microscope de M. G. Oberhaeüser, et nous l'avons fixé à l'extrémité d'un levier dans l'intention d'en faire un *microscope mobile*. Ce tube du microscope a été articulé à un genou jouissant, par la disposition des pièces qui le composent, de tous les mouvements imaginables, et ce genou à mouvements multiples a lui-même été fixé à l'extrémité d'une tige horizontale, qui s'étend et s'allonge à volonté, en passant à frottement dans la mortaise d'une tige verticale qui la supporte. Cette tige verticale, qui s'élève ou s'abaisse,

est solidement soudée à une base en plomb qui soutient tout l'appareil. Comme on le comprend par ce peu de mots, le tube du microscope, armé de son oculaire et de ses lentilles, est devenu, grâce à cette disposition, une sorte de lunette qu'on peut braquer dans toutes les directions imaginables, et par conséquent promener avec facilité sur un malade, quelle que soit la région de son corps qu'on veuille observer. Mais pour tout microscope, la lumière diffuse est l'obscurité : il fallait donc employer un appareil d'éclairage spécial, car tous les moyens usités jusqu'à ce jour pour éclairer les *corps opaques* ne pouvaient nous être d'aucune utilité. Cet appareil d'éclairage devait avant tout réunir deux conditions indispensables : 1° produire un foyer lumineux assez intense pour suffire à l'absorption du système optique; 2° concentrer les rayons de lumière à l'aide d'une forte loupe sur le point précis de l'observation. Au moyen de ce microscope, d'une lampe et d'une loupe, jouissant tous d'une grande mobilité, nous avons pu nous livrer à des recherches, on peut le dire, toutes nouvelles; car jusqu'à ce jour on n'avait jamais fait passer tout le corps d'un malade sous le microscope pour observer la nature en travail, dans ses fonctions normales ou pathologiques. C'est donc un champ inexploré et tout nouveau que nous présentons aux observateurs; entre leurs mains, l'application d'un pareil instrument, légèrement modifié suivant les besoins, sera d'un usage profitable pour un grand nombre de branches des sciences naturelles. A l'avenir, on pourra porter le microscope sur les plantes, sur les animaux, sans altérer en rien le produit soumis à l'observation; le chimiste lui-même pourra l'employer pour découvrir le travail moléculaire s'opérant sur de grandes masses; l'industrie, enfin, devra y trouver un grand secours dans toutes les branches où le

travail à l'œil nu est impossible. Nous ne nous abusons pas dans ces prévisions; si l'avenir les dément, c'est qu'on n'aura pas su utiliser un moyen précieux. En effet, quand on a pu, avec un instrument, observer les mœurs de l'*acarus*, étudier toutes ses fonctions, le voir couver ses œufs; quand on a pu suivre le développement et la guérison d'une maladie de point en point; quand on a pu localiser le mal avec précision, on a quelque raison de dire que cet instrument peut, dans d'autres mains, être un puissant moyen d'observation.

Le mémoire que nous présentons à l'Institut a pour objet l'étude de la gale, considérée dans ses causes et ses effets. Nous avons traité ce sujet avec tout le développement dont il était susceptible. Pour que ce travail fût consciencieux et complet, nous n'avons reculé devant aucun sacrifice de temps, de peine et d'argent. Et encore, à quel résultat serions-nous arrivé, si nous n'avions été secondé dans cette difficile entreprise. Qu'il nous soit donc permis de rendre hommage au zèle éclairé d'un noble artiste, qui aura rendu d'éminents services à la microscopie, à M. G. Oberhaeüser, car la science trouve toujours en lui un interprète intelligent et dévoué.

Quelques mots sur les procédés que nous avons suivis doivent trouver place dans cet avant-propos.

Trois microscopes nous ont tour à tour servi, suivant les besoins de l'observation.

1° Le microscope mobile, à *image non renversée*, qui jouit de la propriété de donner une brillante lumière d'une grande netteté. Ce microscope, fabriqué par M. G. Oberhaeüser, n'est pas encore répandu dans le commerce; nous en avons le premier constaté toutes les qualités.

2° Un second microscope, ou le microscope pancratique,

qui nous a servi à des dissections partielles, quand il s'agissait, par exemple, de dépouiller les œufs des débris qui adhèrent souvent à leur enveloppe.

3° Un grand microscope composé a été employé dans toutes les études minutieuses se rapportant à l'organisation de l'*acarus;* ce microscope nous a procuré un grossissement de 850 à 900 fois, donné par la combinaison d'un jeu de lentilles n° 10 et l'oculaire n° 3 : amplification considérable et la plus élevée à laquelle il soit possible d'atteindre aujourd'hui, tout en restant dans les conditions d'une bonne observatio[illegible] compresseur armé de deux lames minces de 1/4 de millimètre d'épaisseur nous a été d'un grand secours : tout micrographe qui étudie les infiniment petits ne saurait s'en passer; comme moyen d'éclairage, nous avons fait usage de l'appareil de M. Dujardin. Quelques auteurs, nous le savons, ont refusé à cet appareil optique les avantages que d'autres lui attribuent; quant à nous, nous devons dire qu'il nous a été d'une inappréciable utilité; sans lui il nous eût été impossible de concevoir l'inextricable agencement des pièces qui composent la tête de l'*acarus*. La lumière artificielle d'une lampe nous a été souvent nécessaire pour saisir des détails d'anatomie et de physiologie qu'on ne juge bien qu'à l'aide de cette vive lumière, tempérée par un diaphragme à verres de différentes couleurs. Enfin, il va sans dire que nous avons fait un fréquent usage des réactifs les plus variés, tant pour augmenter la réfringence des tissus de l'*acarus*, que pour mettre en relief leur vitalité.

Tous les faits que nous avançons ont été vus cent fois avant d'être définitivement admis, et comme beaucoup d'entre eux échapperont nécessairement au premier abord aux entomologistes qui seraient tentés de les vérifier, car la grande habitude d'étudier le même objet vous donne à la

longue une habileté qu'on n'aurait pas dans le principe, serait-on le plus habile des observateurs, nous prions ceux qui contesteraient la présence de tel ou tel organe, de nous permettre de leur fournir la preuve de son existence.

Nous croyons que ce travail donnera une juste idée des avantages qui sont attachés à ce nouveau mode d'observation; car ce que nous avons fait pour la gale, on pourra de même le faire pour d'autres maladies.

Cet ouvrage renfermera trois grandes divisions ou trois parties principales : dans la première, il sera traité de l'historique de tous les travaux qui ont paru sur la gale; dans la deuxième, de l'entomologie de l'*acarus :* il était en effet logique d'étudier préalablement la cause de la maladie; dans la troisième partie, nous nous occuperons de la gale proprement dite. C'est à l'hôpital Saint-Louis que toutes ces recherches ont été faites : elles nous ont demandé deux années d'étude, tant pendant notre internat qu'après notre sortie des hôpitaux; aussi est-ce pour nous un devoir de remercier les administrateurs qui ont mis un laboratoire à notre disposition, bien que notre temps d'internat fût expiré.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'HISTORIQUE DE LA GALE ET DE L'INSECTE QUI LA PRODUIT.

1. Dans toutes recherches scientifiques, il est bon de remonter le cours des siècles, et d'examiner par quels progrès insensibles l'esprit humain arrive enfin à la vérité; à part l'intérêt philosophique qui se rattache à de pareilles études, on y trouve l'avantage de voir peu à peu s'étendre l'horizon dont on vient fermer les limites, et l'on prend ainsi une connaissance anticipée des faits qui vont être en discussion : c'est pourquoi nous allons faire l'historique des travaux qui ont paru sur la gale, depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours.

2. Pour mettre de la méthode dans cette exposition chronologique, nous diviserons le passé en deux grandes époques distinctes : 1° depuis les temps anciens jusqu'à la propagation des sciences dans l'Occident, c'est-à-dire depuis deux ou trois mille ans avant J. C. jusqu'au XVI^e^ siècle; 2° depuis le XVI^e^ siècle jusqu'à nos jours. Grâce à cette division, l'analyse historique, à laquelle nous allons nous livrer, se prêtera à un court résumé de l'esprit des diverses doctrines qui ont tour à tour prévalu dans la science médicale, au sujet de la gale.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDES HISTORIQUES DE LA GALE, DEPUIS LES TEMPS LES PLUS RECULÉS JUSQU'À LA PROPAGATION DES SCIENCES EN OCCIDENT, C'EST-À-DIRE DEPUIS DEUX OU TROIS MILLE ANS AVANT J. C. JUSQU'AU XVI^e^ SIÈCLE.

3. Les savants se sont fréquemment demandé si la gale était ou non connue des anciens; ils ont compulsé les auteurs avec

minutie, et toute phrase ou expression qui pouvait se prêter à une interprétation a été longuement commentée. Des médecins modernes d'une grande érudition, et entre autres, parmi les dermatologistes, Biett et M. Rayer, n'ont pas cru voir dans les textes la preuve irrécusable que la gale fût connue des anciens. De si graves autorités sont d'un grand poids dans une semblable discussion; devant elles nous pourrions décliner notre compétence et nous tenir dans une sage réserve; cependant, comme on pourrait avoir quelque raison de croire que la gale est aussi vieille que le monde, nous exposerons toutes les pièces du procès, et cela avec impartialité.

4. De tous les auteurs qui ont recherché dans les anciens écrits les passages qui pouvaient faire allusion à la gale, aucun n'a cité certains versets de la Bible, où il nous paraît être question de cette maladie; nous lisons en effet dans le XIII^e^ chapitre du lévitique, verset 6^e^ : « Et die septimo contemplabitur : si obscurior « fuerit lepra, et non creverit in cute, mundabit eum, quia scabies « est : lavabitque homo vestimenta sua et mundus erit. » *Scabies* nous dit la Bible, mot qui, pour les Latins, a la signification ψώρα des Grecs, et qui, comme nous le verrons plus loin, se rapporte incontestablement à la gale. Nous pourrions citer plusieurs autres versets de la Bible, où il paraît être question de la gale, de la gratelle, mais comme le texte est discutable, nous nous en abstiendrons.

5. M. Dezeimeris (*Dictionnaire de médecine*, tome XIII, article *Gale*) est convaincu, et nous permet de croire par de nombreuses citations empruntées aux anciens, que la gale ne leur était pas inconnue. En effet, Hippocrate parle de la psore dans plusieurs passages de ses écrits, et s'il y a parfois équivoque, c'est que le même mot a été employé nominativement et adjectivement : aussi faut-il s'en rapporter, pour fixer son opinion, au sens qui résulte indubitablement d'un ensemble d'expressions, dont la signification clairement précisée ne saurait laisser aucun doute dans l'esprit. Hippocrate nous dit[1] : « *Lepra et pruritus, et scabies* (ψώρα),

[1] *De Affectionibus*, ed. Linden, t. II, p. 182.

« *et impetigines, et vitiligo, et alopeciæ, a pituita fiunt.* Sunt autem talia « turpitudo magis quam morbi. » Le mot ψώρα, *scabies*, mis à côté de ceux de *lepra*, *pruritus*, *vitiligo*, qui désignent chacun une maladie différente, nous indique manifestement un sens précis et isolé dans l'esprit de l'écrivain. Ce qui prouve qu'il est bien ici question de la gale, maladie contagieuse, c'est qu'Aristote se sert du même mot, en lui donnant une précision qui lève toute incertitude à cet égard : il se demande dans les Problèmes[1] : « Cur a « tabe, et lippitudine, et scabie (ψώρα) capiuntur, qui appropinqua- « rint : ab aqua autem intercute, aut febre, aut stupore attonito, « aut aliquo ex numero cæterorum malorum capi nequeunt? » Il répond : « Sed scabies (ἡ δὲ ψώρα) magis quam lepra, cætera- « que vitia generis ejusdem, afficere potest : quoniam per summa « corporis errat et humore manat glutinoso : genus namque pru- « rientium omne tale est. Itaque id ipsum quia per summa oritur « glutinosumque est, nimirum idirco attingere potest : cætera ne- « queunt, vel quia non per summa proveniunt, vel quia persistere « suam ob siccitatem non possunt, quamvis per summam cutem « oriantur. »

6. Galien lui-même s'explique clairement sur l'étiologie de la gale, et il la dit contagieuse[2] : « Et quidem quod aeris pestilens sta- « tus febrem afferre consuevit, nemo sanæ mentis dubitavit, sicuti « et pestilenti morbo laborantium conversatio periculosa, ne inde « contagium contrahatur, quemadmodum *ex scabie* et lippitu- « dine. » Ce qui ne permet aucun doute sur la signification précise de ce passage, c'est que Galien a soin dans plusieurs autres endroits de ses ouvrages de rapprocher les mots *scabies* et *lippitudo*, parce que la blennophthalmie est essentiellement contagieuse et qu'à ce titre il est rationnel de placer sur le même rang la *scabies*, qui, parmi les nombreuses maladies de peau, offre un caractère bien tranché de contagion. On sait, de plus, que Galien ne regardait comme maladies contagieuses que trois ou quatre affections :

[1] Sect. VII, Probl. 8, t. IV, p. 91, éd. de Duval.

[2] Galien, *De Different. febr.* lib. I, cap. III.

l'ophthalmie en question, la peste et la *psore*. Quelques savants ont voulu voir synonymie entre les mot *scabies* et *lippitudo*, mais Galien ne permet pas le doute à ce sujet; les détails qu'il donne sur le traitement de la gale, contre laquelle il conseille les préparations sulfureuses, le prouvent suffisamment.

7. On a fait grand bruit d'un passage de Paul d'Égine, où il semble établir une grande analogie entre la gale et le *psoriasis*, analogie qui permettrait de conclure que le mot *scabies* désignait une maladie squammeuse, furfuracée, et non la gale proprement dite. Voici ce passage[1] : « Uterque affectus (lepra et scabies) cutis « aspritudo est cum pruritu, in qua corpus absumitur colliquatur- « que, originem ex melancholico humore trahens : sed lepra al- « tam cutem orbiculatim depascitur, et piscium modo squamulas ex « se remittit; scabies vero summa infestat potius, varie figurata, « furfuraceaque remittit. » Il est certain que dans l'esprit de Paul d'Égine le mot *scabies* désignerait ici une autre maladie voisine de celle de la lèpre, et incontestablement le *psoriasis*, dont la *forme est variable:* tandis que la lèpre donne des plaques squammeuses *disposées en cercle*, et quand il ajoute *furfuracea remittit*, on ne peut attribuer ce caractère à la gale. Mais l'opinion de Paul d'Égine lui est personnelle; qu'il ait vu la gale dans le *psoriasis*, cela n'a rien de bien surprenant; n'a-t-on pas vu commettre de plus grossières erreurs en pathologie? D'ailleurs, un auteur d'une autorité au moins égale à celle de Paul d'Égine, Actuarius, qui cependant avait les ouvrages de Paul d'Égine entre les mains, car il les copie souvent, s'est bien gardé de reproduire cette erreur. Actuarius, en effet, nous dit clairement qu'il y a des caractères bien tranchés entre la lèpre et la psore[2] : « Minus post elephantem mala est « λέπρα, cui scabies et huic impetigines succedunt : sed lepra al- « tius descendit et orbicularia exanthemata facit, et carnis quas- « dam colliquationes ac λεπίδας (hoc est quamulas) remittit, unde « etiam nomen adepta est. Non ita profunde scabies (ψώρα) pe-

[1] Paul Eginæt. lib. IV, cap. II.

[2] Actuarii *Med.* sive *Method. medend.* lib. II, cap. II.

« netrat, et variis figuris insignitur, *nec* furfuracea corpuscula reji-
« cit. Lepram melancholicus succus committit : sed scabiem varii
« humores, earumque variæ miscelæ constituunt. Communis utri-
« que est cutis asperitas et pruritus. »

8. On a voulu voir aussi dans la psore le *lichen agrius* de Willan; mais le *lichen* n'a rien de contagieux, et nous avons prouvé que la psore avait ce caractère pour les anciens. Il nous semble superflu de nous étendre longuement pour prouver que le mot *scabies* des Latins est la traduction fidèle de ψώρα des Grecs. On n'en pourra douter, si l'on se rappelle que les deux mots *scabies* et *psora* étaient synonymes pour les Latins : Pline en donne des exemples. Le mot ψώρα avait été latinisé.

9. Celse est le premier médecin qui, chez les Latins, ait décrit la *scabies* comme une maladie; mais avant lui plusieurs poëtes en avaient fait mention d'une manière assez claire pour nous montrer qu'ils entendaient par le mot *scabies* le mot ψώρα : ainsi Horace[1], Prudence[2], font allusion à la démangeaison de la gale dans divers passages de leurs poëmes. Cicéron nous dit[3] qu'elle cause une cuisante jouissance. Ausone note qu'elle est due à un principe contagieux[4]. Juvénal[5] remarque qu'il est une gale pour les animaux comme pour l'homme, et Quinte-Curce[6], qu'elle est contagieuse au suprême degré. L'opinion de ces auteurs n'est pas sans quelque valeur; elle montre que la gale était pour les Romains, comme pour nous, une maladie tellement connue des gens du monde, qu'il n'était pas nécessaire d'être médecin pour en parler sciemment.

10. Le passage où Celse traite de la *scabies* a été l'objet de sérieux débats; on a vu là, non la description de la gale, mais bien celle du *lichen agrius*. Un fait prouve que cette manière de voir

[1] Hor. *Epist.* lib. I, XII.
[2] Aurel. Prudentii Περὶ Στεφανῶν, lib. I, v. 254.
[3] Cicero, *De Legibus*, lib. I, cap. XVII.
[4] Ausone, *Edyllia*, n° 335.
[5] Juven. *Satir.* II, v. 78.
[6] Quinte-Curce, *Hist.* lib. IX, cap. X.

est au moins hypothétique, c'est qu'on trouve ailleurs dans Celse une description détaillée du *lichen*, avec celle de ses différentes variétés. Celse entendait si bien parler d'une maladie différente du *lichen*, quand il se sert du mot *scabies*, qu'il cite le mouton, sur lequel elle existe comme chez l'homme : rapprochement qu'il n'eût point fait à coup sûr, s'il eût voulu parler du *lichen*, car la maladie du mouton est, suivant lui, contagieuse, et le *lichen* n'est point contagieux. Columelle[1] parle aussi de la *scabies* comme d'une maladie propre aux moutons, et il conseille de la guérir au plus vite, si l'on veut éviter qu'elle ne se communique à tout le troupeau. Enfin, Pline et Végèce[2] font aussi des remarques qui prouvent, d'une manière incontestable, que la contagion de cette maladie ne faisait point question pour les anciens.

11. Il faut maintenant compulser les auteurs arabes, pour suivre la chaîne des traditions qui, sans jamais se rompre, nous conduit, par une transition insensible, des anciens écrivains jusqu'à l'époque du moyen âge.

12. Rhazes[3] est le premier auteur arabe qui fasse mention de la gale; il lui assigne pour cause la malpropreté, et pour caractère esssentiel la contagion. « Ægritudines vero quæ de uno « transeunt ad alium sunt lepra, et scabies, et phthisis, et febris « pestilentialis. Quæ tunc accidunt quum aliqui in mansionibus « angustis cum hominibus ista patientibus.... sedent.

Haly-Abbas est encore plus explicite[4] : « Maxime hæc (scabies) con- « tingit comedentibus multum et accipientibus ea cibaria quæ gros- sos gignant chimos, et qui a balneis abstinent; est autem pruri- « ginis maxime illi qui non lavatur. Multiplicantur namque sordes « in corpore residentes. Scabiei autem signa sunt pustulæ parvæ, « quæ rubeæ incipiunt, dehinc aperiuntur, et est cum eis pruritus « insignis. Et magis in manibus fiunt et inter digitos, ac in cubitis

[1] Columelle, lib. VII.
[2] Végèce, lib. III, cap. II, p. 163, éd. Gesner, 1781.
[3] Rhazes, *De Med. ad Almanz.* liv. V, c. XXVIII.
[4] *Omnia opera Ysaac.* Lyon, 1515, in-folio.

« et ossanio et confinibus, non numquam autem in toto fiunt cor-
« pore. » Cette description est presque irréprochable.

Avicenne, quoique moins explicite qu'Haly-Abbas, ne mérite pas moins d'être cité; il nous dit[1] : « Et est prætera, ex ægritudi-
« nibus quædam, quare de uno ad alium transit, sicut lepra et
« scabies, et variola, et febris pestilentialis, et apostemata pu-
« trida. Et non accidit plurimum nisi inter digitos, quia sunt debi-
« liores. »

13. Jusqu'à présent aucun des auteurs cités n'a laissé entrevoir que la gale pourrait être produite par un insecte. Avenzohar, bien qu'il ne regarde pas l'*acarus* comme une cause de contagion, paraît cependant l'avoir observé plus d'une fois. Cet auteur mérite à ce titre une mention toute particulière. Il nous dit[2] : « Orientur aliqui
« in corpore sub cuti exterius pediculi parvunculi qui, cum exco-
« riatur cutis, exeunt animalia viva tam parvuncula, quod vix pos-
« sunt videri. »

14. Ainsi, pour les Arabes, le mot *scabies* est bien le nom d'une maladie contagieuse qui siége de préférence aux extrémités supérieures, surtout entre les doigts. Enfin Avenzohar, le premier, semble avoir découvert l'*açarus* chez des galeux. Les doctrines que professaient les Arabes au sujet de la gale eurent bientôt cours dans toute l'Europe savante. A partir de ce jour, l'existence de la maladie ne fait question pour personne; on ne recherche pas davantage si elle était ou non connue des anciens : ces deux vérités sont acquises à la science. Les auteurs qui suivent observent la gale; ils la décrivent avec plus ou moins de précision et avec une perfection d'autant plus grande, qu'ils s'approchent de nous davantage. Parmi eux, nous devons citer : Constantin l'Africain[3], Arnaud de Villeneuve[4], Bernard de Gordon[5], Pierre

[1] Lib. III, fe. 16, tr. III, cap. VI, LXVII.
[2] *Theicir.* lib. II, cap. XIX.
[3] *Viaticum.*
[4] Arnald. Villanov. *Breviar.* lib. II, cap. XLIII.
[5] Gordon, *Lilium medicinæ*, particula I, cap. XXIV, rubr. 1 et 2.

d'Abano[1], Brunus, Théodoric, Lanfran, Gaddesden[2] et Guy de Chauliac. Tous ces auteurs varient quelque peu dans la description qu'ils donnent de la gale; mais tous la regardent comme contagieuse.

15. Nous avons suivi d'âge en âge toutes les publications qui ont été faites sur la gale, et nous sommes arrivé au XIV^e^ siècle inclusivement. Le XV^e^ siècle n'offre aucun progrès véritable à enregistrer : la gale a sa place dans le cadre nosologique; on la traite comme du temps des Grecs et des Romains, c'est-à-dire avec des préparations sulfureuses. Il faut qu'une idée nouvelle vienne donner un plus grand intérêt à cette maladie pour que nous y trouvions les éléments d'une discussion intéressante. C'est qu'en effet on semble entrevoir la cause véritable de la gale; on parle d'un insecte qui la produit, et à partir de ce jour une voie inconnue jusqu'alors est ouverte à l'observation. Aussi avons-nous trouvé dans ces considérations une raison suffisante pour motiver la division que nous avons établie dans cette partie historique de notre travail.

16. Arrêtons-nous un instant sur cette première période que nous venons de parcourir, et demandons-nous, après avoir exposé les preuves qui militent en faveur de telle ou telle opinion, si les anciens étaient tourmentés par cette maladie? Quant à nous, il nous semble qu'on pourrait répondre à cette question par l'affirmative. Pourquoi voudrait-on, en effet, que les Israélites, les Grecs et les Romains eussent été exempts d'une affection qui frappe sur nous depuis un grand nombre de siècles, quand beaucoup de maladies de peau qui les affectaient alors se remontrent encore aujourd'hui avec la même gravité? On aurait quelque droit de soutenir que la gale n'existait pas dans l'antiquité, si, vers le temps où elle est clairement décrite, de nouvelles perturbations étiologiques, dans le climat et les habitudes des peuples, pouvaient faire croire au développement de cette maladie. Comment

[1] Petri Aponen. *Conciliat. different.* diff. 180, § 3.

[2] Gaddesden, *Rosa anglica*, ed. Schopffii, 1595; in-4°, p. 1112.

supposer qu'une affection nouvelle ait apparu pour la première fois sur le globe vers le XII^e^ siècle, et cela, nous le répétons, sans qu'aucune grande cause perturbatrice puisse en rendre compte. Soutenir que les anciens ne se sont pas clairement expliqués sur cette maladie est une vérité discutable; mais vouloir en conclure qu'ils n'y étaient pas soumis, voilà ce que nous ne saurions accepter. N'est-il donc pas certain, pour tout homme qui a étudié l'histoire de la science médicale, qu'une foule d'affections qui ont dû exister de tout temps et que les peuples dans leur enfance confondaient entre elles, ou que même ils ont complétement méconnues, sont passées sous silence dans leurs écrits? Si la gale était due à des causes auxquelles les peuples anciens ne pouvaient être exposés, on aurait quelque raison d'avancer qu'ils en étaient exempts; mais la condition essentielle de la contagion pour cette maladie étant la présence de l'*acarus*, il faudrait supposer que la création ou le développement spontané de cet insecte ne date que du jour où la maladie a été connue et mentionnée, supposition qui n'a pour elle aucune raison qui la justifie. En résumé, nous pensons, avec la plupart des auteurs, que les Hébreux, les Grecs et les Romains laissent entendre dans leurs écrits qu'ils connaissaient la gale; et de plus, comme rien ne nous autorise à avancer que la psore ait tout à coup surgi pour frapper les peuples modernes, mais qu'il est au contraire plus philosophique et dans les lois de la nature de croire que la cause de la maladie, ou l'*acarus*, a existé de tout temps, nous restons moralement convaincu que les anciens ont été comme nous affligés de cette maladie.

CHAPITRE II.

RÉSUMÉ ANALYTIQUE DES TRAVAUX PUBLIÉS SUR LA GALE, ET PRINCIPALEMENT SUR L'*ACARUS SCABIEI*, PENDANT LES XVI^e^, XVII^e^, XVIII^e^ ET XIX^e^ SIÈCLES.

17. Déjà dès le XVI^e^ siècle, des naturalistes et des médecins du plus grand mérite signalent l'*acarus* comme cause de la gale, ou

du moins ils lui accordent une large part dans les symptômes de cette maladie. Parmi eux, nous pouvons citer Rabelais, Scaliger, Ambroise Paré, Ingrassias, Joubert, Gabucinus, Aldrovande.

Rabelais parle deux fois du ciron de la gale, dans la vie de Gargantua et de Pantagruel. Au livre II, chapitre I, de l'origine de Pantagruel, il dit : « qui engendra Enay, qui feut tres expert en matière d'oster les *cirons* des mains » ; puis livre III, chapitre XXV, lorsqu'il fait dire à Panurge : « Mais d'ond me vient ce *ciron* icy entre ces deux doigtz? Cela disoit : Tirant droict vers Her Trippa les deux premiers doigtz ouuerts en forme de deux cornes, et fermant au poing tous les aultres. »

18. Scaliger s'exprime ainsi dans son Traité adressé à Cardan en 1557[1] : « En écrivant sur l'*acarus* d'Aristote, vous l'avez justement comparé avec le *garrapate*..... Les Padouans le nomment *pedicello*, les Tauriniens, *scirro*, et les Gascons, *brigant*. Il est admirable, *sa forme est globuleuse*, il est si petit qu'on a peine à l'apercevoir..... Il se loge sous *l'épiderme, en sorte qu'il brûle par les sillons qu'il se creuse. Extrait avec une épingle et placé sur l'ongle, il se met peu à peu en mouvement, surtout s'il est exposé aux rayons du soleil. En l'écrasant entre deux ongles, on entend un petit bruit, et on en fait sortir une matière virulente aqueuse.* Ce ricin, produit de la malpropreté, s'attache à la barbe, aux aisselles, à l'aine. » A lire cet extrait, on ne saurait douter que Scaliger n'ait bien vu l'*acarus*. Cependant les derniers mots qui ne sont pas soulignés donneraient à penser que notre célèbre naturaliste a fait confusion; il a donné pour siége à l'*acarus* des régions fréquentées plus souvent par le *pediculus*. Sauf cette légère erreur, la présence de l'insecte sous l'épiderme, ses sillons, sa forme globuleuse, ne peuvent s'entendre que de l'*acarus scabiei*.

19. Ambroise Paré est encore plus explicite; voici dans quels termes il s'exprime : « Les cirons sont de petits animaux toujours cachés sous le cuir, sous lequel ils se traisnent, rampent et se rangent petit à petit, excitant une fascheuse démangeaison et gra-

[1] Scaliger, *De subtilitate ad Cardanum*, exerc. 194

telle. . . . . Les cirons se doivent tirer avec espingles ou aiguilles; toutefois il vaut mieux les tuer avec onguens et décoctions faites des choses amères et salées. Le remède prompt est le vinaigre, dans lequel on aura fait bouillir du *staphisaigre* et sel commun. » Il y a dans ces mots du père de la chirurgie tout un traité de la gale; en effet, il nous parle de l'*acarus*, des désordres qu'il cause et des moyens à employer pour le détruire. On voit que Paré avait eu de nombreuses occasions d'observer des galeux, dans les armées et dans les hôpitaux militaires. Ce passage étonne par sa précision et sa clarté; mais ce qui surprend encore davantage, c'est qu'il soit resté inaperçu pendant tant de siècles.

20. Aldrovande remarque que le *pedicello* ou *sciro* rampe entre « la peau et l'épiderme, qu'il infecte surtout les pieds et les mains, se creusant des espèces de galeries sinueuses, et formant des vésicules non suppurantes; que si l'on crève ces vésicules, il en sort des animaux si petits, que pour les apercevoir il faut de très-bons yeux et une vive lumière. »

21. Le premier ouvrage appartenant au XVII^e^ siècle où il soit question de l'*acarus* est le dictionnaire *della Crusca*, imprimé en 1612. On lit à l'article *Pellicello* : « *È un piccolissimo bacolino, il quale si genera a rognosi in pelle, e rodendo cagiona un acutissimo pizzicore.* » Cette remarque mérite de fixer l'attention, attendu que la célèbre lettre de Cestoni *a eu pour prétexte* ces quelques mots du dictionnaire *della Crusca*.

22. Mouflet, auteur anglais, parle de l'*acarus* dans le recueil[1] de ses intéressantes observations. On y lit : « Les cirons sont les plus petits des animaux connus; ils prennent leur origine ou sur le vieux fromage, ou sur la cire, ou sur la peau humaine. Les gens du peuple attaqués de la gale, les en retirent avec la pointe d'une épingle. Les Allemands les appellent *seuren*, et la manière de les prendre, la chasse des *seuren*. Ces animaux se trouvent sous l'épiderme, y creusent des galeries et occasionnent par là un prurit très-incommode. Les parties du corps où la peau est le plus

[1] *Theatrum insectorum*. Londres, 1634.

fine sont celles où ils se multiplient de préférence. En les tirant avec une épingle et en les plaçant sur l'ongle, on les voit remuer, surtout si on les expose au soleil. *Il faut observer que les seuren ne se trouvent pas dans les pustules, mais à côté.* » A côté des pustules, nous dit Mouflet; et il avait raison, car l'*acarus* ne se trouve jamais dans leur intérieur. Ce précieux avertissement mérite d'autant plus d'être remarqué, que les auteurs précédents et la plupart de ceux qui vont suivre ont prétendu avoir rencontré le sarcopte dans les pustules; fait matériellement impossible.

23. Jusqu'à présent il a été souvent parlé de l'*acarus;* mais aucun auteur n'a cherché à nous en montrer la forme. Hauptmann[1], le fondateur de la pathologie animée, est le premier qui ait eu recours au microscope pour en découvrir l'organisation. Il nous en a laissé une figure; mais cette image représente tout ce qu'on veut : c'est la naissance de la microscopie, et l'instrument a plus de part que l'observateur dans l'imperfection de la figure. Quoi qu'il en soit, il le représente pourvu de six pattes et de quatre crocs. Notons de plus qu'Hauptmann compara l'*acarus scabiei* à la mite du fromage, et qu'il crut saisir entre eux de notables différences.

24. Comme nous l'avons déjà laissé entrevoir, les Allemands savaient fort bien à cette époque que l'*acarus* formait le caractère distinctif de la gale; le mot *seuren* est pour eux synonyme du mot *acarus*. En effet, le docteur allemand Haffeuroffer[2] nous dit : « La quatrième espèce de poux prend naissance entre l'épiderme et la peau, dans l'intervalle des doigts des pieds et des mains. Sa forme est celle des œufs de papillons. Il est, en effet, rond, blanc, et si petit qu'on peut à peine le voir; il rampe sur la peau, et occasionne par sa morsure un prurit insupportable. *Il ne sort jamais, et reste toujours caché entre la peau et l'épiderme.* On l'appelle *acarus, ciron, pedicello;* en allemand, *hebendige, seuren,* etc. »

25. Plus tard, en 1664, Giuseppe Laurenzio, médecin littérateur italien, dans son dictionnaire intitulé : *Amalthea*, à l'article

[1] Dans un ouvrage sur les eaux de Walkenstein. Leipzig, in-8°, fig.

[2] *Nosodochium cutis affectus.* Ulm, 1660, p. 177 et 195.

Acarus, disait : « Vermiculus exiguus, subcutaneus, rodens (pedi-« cello) » ; et à la lettre T. *Teredo :* « Vermis in ligno nascens ; caries ; « item acarus rodens carnem sub cute (pedicello). »

Le bon La Fontaine, au milieu du XVII^e^ siècle, dédia une pièce de vers charmants à la gale, où nous lisons :

> On voit mille *cirons*, jaunes, blancs, rouges, bleus,
> Disputer de brillant avec les pierreries ;
> Et de la gale vient le nom de galerie,
> Bien véritablement et sans plaisanterie.

26. Etmüller[1] est cité comme ayant laissé des figures représentant l'*acarus* de la gale ; on se demande, toutefois, si c'est bien réellement un *acarus* qu'Etmüller a vu au foyer de son microscope.

27. C'est à cette époque, 1687, qu'il faut rapporter la lettre si remarquable que Cestoni adressa *al signor Redi, gentiluomo aretino*, et intitulée *Osservazioni interno a pellicelli del corpo umano*. Les faits qu'elle relate étaient si contraires aux idées régnantes, que Cestoni crut prudent de mettre sa responsabilité à couvert sous le pseudonyme de *Giovan Cosimo Bonomo*. Il dit dans cette lettre que c'est la lecture de l'article *Pellicello*, du dictionnaire *della Crusca*, dont nous avons déjà parlé, qui tenta sa curiosité et lui suggéra l'idée de faire des observations sur la gale. Si cette lettre intéressante sous tant de rapports pèche par quelque chose, c'est par l'excès de précision dont l'auteur aurait fait preuve dans ses recherches. En effet, quoique nous regardions Cestoni comme un habile et consciencieux observateur, nous ne pouvons pourtant nous défendre d'un certain degré d'incrédulité, quand nous le voyons trouver l'*acarus* là où tous les modernes l'ont en vain cherché.

Cestoni nous dit « qu'il vit plusieurs pauvres femmes, dont les enfants étaient galeux, tirer avec la pointe d'une épingle, *des plus petites pustules*, avant qu'elles fussent mûres et purulentes, il ne sait quoi, qu'elles écrasaient sur l'ongle, non sans un petit craquement, et qu'à Livourne les galériens se rendaient le même ser-

[1] *Acta eruditorum*. Leipsius, année 1682, p. 317.

vice. Doutant cependant que les cirons fussent réellement des vers, il résolut de s'en assurer : pour cela, il s'adressa à un galeux, en lui demandant l'endroit où il sentait la plus forte démangeaison, et celui-ci lui ayant montré un grand nombre de pustules non encore purulentes, il en ouvrit une avec la pointe d'une épingle très-fine; et, *après avoir exprimé la liqueur contenue*, il en tira un petit globule blanc, presque imperceptible, qu'il soumit à un examen microscopique. Il ajoute que cette observation lui prouva, avec toute la certitude possible, que c'était un ver dont la figure approchait de celle des tortues, de couleur blanchâtre, le dos d'une couleur un peu plus obscure, garni de quelques poils longs très-fins. Le petit animal montrait beaucoup de vivacité dans les mouvements; il avait *six pattes*, la tête pointue et armée de deux petites cornes ou antennes à l'extrémité du museau. » Cestoni ne s'en tint pas à cette première observation; il la répéta un grand nombre de fois sur diverses personnes attaquées de la gale, d'âge, de tempérament, de sexe différents, et en diverses saisons de l'année : il trouva toujours des animaux de même figure. Il en vit dans *presque toutes les pustules aqueuses*. Il dit dans *presque toutes*, parce qu'il lui a été quelquefois impossible d'en trouver. Il ajoute : « Il est très-difficile d'apercevoir ces insectes sur la superficie du corps, à cause de leur extrême petitesse et de leur couleur semblable à celle de la peau. Cependant, je les y ai vus marcher plusieurs fois, surtout dans *les plis, les articulations, les rides et les petits sillons de la peau*. Ils s'introduisent d'abord par leur tête aiguë, et ils s'agitent ensuite, rongeant et fouillant, jusqu'à ce qu'ils se soient entièrement cachés sous l'épiderme, où il nous est facile de voir qu'ils savent se creuser des espèces de chemins couverts, ou des routes de communication d'un lieu à l'autre, de sorte qu'un insecte produit quelquefois plusieurs pustules aqueuses; quelquefois aussi j'en ai *trouvé deux ou trois ensemble*, et, *pour l'ordinaire, fort près l'un de l'autre*. J'étais fort curieux de savoir si ces petits animaux pondaient des œufs, et après de longues recherches, j'eus enfin la satisfaction de m'assurer de ce fait; car, ayant

mis sous le microscope un ciron pour en faire dessiner la figure, je vis sortir de la partie postérieure de cet animal un petit œuf blanc, à peine visible et presque transparent : il était de figure oblongue comme un pignon. . . . . J'avoue donc, ajoute-t-il, que je suis très-porté à croire que la gale, nommée par les Latins *scabies*, et décrite par eux comme une affection de la peau et comme une *maladie très-contagieuse*, n'est autre chose que la morsure des petits insectes dont j'ai parlé, lesquels, rongeant continuellement la peau, y font de petites ouvertures par où s'extravasent quelques gouttes de sérosité et de lymphe. Cette sérosité ou lymphe extravasée forme les pustules aqueuses, *dans lesquelles ces vers, continuant à ronger,* causent une extrême démangeaison, et lorsque le malade se gratte, il augmente le mal et la démangeaison; il déchire, non-seulement les pustules aqueuses, mais encore la peau et les petites veines dont elle est parsemée, d'où s'ensuivent de nouvelles pustules, des plaies et les croûtes qui se forment sur les plaies. En effet, on ne voit jamais de ces plaies dans les endroits du corps où les doigts ne peuvent aisément atteindre, lors même que ces endroits sont tout couverts de gale, la seule morsure du ciron ne produisant que des pustules aqueuses. Au reste, ces petits animaux sont *sous la peau par tout le corps; mais ils se rassemblent en plus grande quantité* dans les articulations, parce qu'ils s'introduisent et se nichent avec facilité dans les plis de la peau. En quelques parties qu'ils soient d'abord logés, il s'en trouve bientôt dans les mains, et surtout entre les doigts; car en y grattant les parties où l'on sent la démangeaison, les ongles rencontrent des cirons qui ne peuvent en être entamés, parce qu'ils ont la peau très-dure, et ces cirons, *se glissant sous les ongles,* et *en se faisant des routes sous la peau,* se nichent plus facilement entre les doigts que partout ailleurs, et s'y font des espèces de nids, où ils déposent leurs œufs en si grande quantité, qu'un petit nombre suffit pour en couvrir bientôt *tout le corps.* Il me semble, continue Cestoni, que tout ce que j'ai dit jusqu'ici peut servir *à expliquer pourquoi la gale est si contagieuse.* Les cirons passent aisément d'un corps à un autre

par le seul contact de ces corps; car ces petits animaux ayant une extrême agilité, et n'étant pas tous continuellement occupés à se creuser des passages sous l'épiderme, il s'en trouve quelques-uns sur la superficie de la peau, et ils sont alors très-prompts à s'attacher à la première personne qui se présente, et, en quelque petit nombre qu'ils aient été reçus, ils se multiplient prodigieusement en pondant des œufs. Il ne faut pas s'étonner de ce que la gale se communique par le moyen des linges et autres hardes qui ont servi aux personnes galeuses; car il peut y rester quelques cirons. Ils vivent même hors du corps jusqu'à deux ou trois jours, comme j'ai eu lieu de m'en assurer plusieurs fois par l'observation. On comprend aisément comment la gale se guérit par les lessives, les bains, les onguents composés de sels, de soufre, de vitriol, de mercure simple, précipité, sublimé, et d'autres semblables drogues corrosives et pénétrantes; car ces drogues s'insinuent dans les cavités les plus profondes, dans les labyrinthes les plus reculés de la peau, et y tuent infailliblement les cirons. »

C'est, au dire de Cestoni, dans les petites pustules, avant qu'elles fussent mûres et purulentes, qu'il vit de pauvres femmes extraire un je ne sais quoi qu'elles écrasaient sur l'ongle, non sans quelque bruit. Il répéta l'expérience, et après avoir exprimé la liqueur contenue, il tira de la pustule un petit globule blanc presque imperceptible, que le microscope lui montra sous la forme d'une tortue. Comment Cestoni a-t-il pu extraire des *acarus* de petites pustules non encore mûres? C'est ce que nous ne saurions comprendre; car jamais, comme on le verra, l'*acarus* ne se trouve dans les pustules : c'est loin d'elles que nous avons soin d'aller le chercher et que nous le trouvons toujours. C'est qu'en effet il ne saurait vivre dans une pustule, et quand par hasard il s'en développe une dans son voisinage, bien loin de s'en approcher, il détournerait plutôt son sillon pour l'éviter. D'ailleurs, en supposant qu'il fût dans le voisinage de cette pustule, la crever avant d'extraire le petit animal serait le moyen le plus sûr de ne jamais l'atteindre. Il y a donc, dans ces détails que nous donne Cestoni, quelque chose

qui plaide fortement contre lui, et s'il ne mentionnait d'autres faits qui font croire qu'il a réellement vu l'*acarus*, on pourrait l'accuser d'avoir montré l'exemple d'une indigne supercherie, qu'un docteur gascon a suivi de nos jours. Cestoni va plus loin : il nous dit qu'il a vu l'animal au microscope. Il faut bien le croire; car la couleur et la forme qu'il lui prête sont réelles. Mais, dit-il, il avait six pattes, six pattes antérieures, probablement, puisque la figure qu'il nous a laissée porte bien les six pattes en question. Il ne nous dit rien des pattes postérieures, attendu qu'il pouvait difficilement les voir en observant l'insecte dans cette position. Plus loin, il ajoute : « Ils savent (les acares) *se creuser des routes de communication d'un lieu à l'autre, de sorte qu'un seul insecte* produit quelquefois plusieurs pustules aqueuses. » Il aurait trouvée *plusieurs* acarus *ensemble*, et pour l'ordinaire *fort près l'un de l'autre*. Toutes ces assertions sont dénuées de tout fondement : jamais le même insecte n'a produit plusieurs pustules; car, quand pustules il y a, il ne joue qu'un rôle bien secondaire dans leur développement. Jamais on ne rencontre deux ou trois *acarus* ensemble[1], et fort près l'un de l'autre. Cestoni était fort curieux de voir si ces petits animaux pondaient des œufs, et après de longues recherches, il eut enfin la satisfaction de pouvoir s'assurer du fait; car, ayant mis un ciron au microscope pour en faire le dessin, *il vit sortir de la partie postérieure de l'animal un petit œuf blanc à peine visible et presque transparent*. Les *acarus*, en effet, pondent des œufs, mais en avoir vu pondre sur le microscope et surtout par la partie postérieure, voilà qui est plus que surprenant; car ce que l'*acarus* pond fréquemment sur le microscope et par la partie postérieure, ce ne sont point des œufs, mais bien des matières excrémentitielles. Il a vu ces petits animaux *se glisser sous la peau, par tout le corps, sous les ongles*, et *se faisant des routes de communication*. Toutes ces assertions sont en complète opposition avec ce que l'observation démontre. Et réellement il ne nous serait point impossible de démontrer, à l'aide d'une

[1] Si ce n'est de jeunes larves, mais leur petitesse est telle qu'elle sont à peine visibles à l'œil nu.

sévère critique, que Cestoni avait quelque peu raison de se cacher sous un pseudonyme. Grâce à cette apparente modestie, il échappait à toute atteinte, et si par hasard sa lettre trouvait quelque crédit parmi les savants, ce qui en effet arriva, il lui était toujours permis de s'en déclarer l'auteur et de revendiquer l'honneur qui s'y rattachait. Aussi, treize ans après la publication de sa lettre, notre Italien, voyant qu'il ne serait pas sans profit pour lui de réclamer ce qui véritablement lui était dû, écrivit-il une seconde lettre à Vallisnieri, où il prouvait sans peine que le prétendu Giovan Cosimo Bonomo n'était autre personnage que lui Diacinto Cestoni, et comme il pouvait alors impunément fronder la faculté, il ajoute dans cette lettre : « Les médicaments internes, ceux que les médecins donnent aux galeux à prendre par la bouche ne servent absolument à rien, et ne sont bons, à proprement parler, qu'à engraisser les charlatans. » Conséquence sagement déduite du rôle que l'*acarus* lui semblait jouer dans la maladie. En résumé, nous accorderons que Cestoni a parfaitement compris comment l'humeur mélancolique selon Galien, l'altération du sang selon Avicenne, l'acide mordant évaporé du sang selon Sylvius Deleboé, le principe fermentescible selon Van-Helmont, n'étaient pour rien dans la production de la gale; mais nous le blâmerons sans ménagement d'avoir avancé des faits que la saine observation condamne, et qui nous autorisent, à bon droit, à suspecter sa bonne foi, même pour les vérités qui, trop souvent, dans sa lettre se trouvent à côté de l'erreur.

28. Morgagni nous donnerait à penser que l'opinion de Cestoni était à l'ordre du jour en Italie; car il nous dit, dans sa 55ᵉ lettre, qu'il crut avoir retiré l'*acarus* des vésicules chez une dame qui, à la fin d'une maladie grave et longue, eut une éruption critique très-abondante sur tout le corps.

29. La figure que Cestoni a donnée de l'*acarus* fut longtemps considérée par les savants comme un spécimen irréprochable de cet insecte. Ainsi Richard Mead la copia dans ses Transactions philosophiques, et Backer dans son *Employement of microscope*.

30. Lorry[1], qu'on ne peut soupçonner d'avoir ignoré tout ce qui a été écrit sur les maladies de la peau, car son livre, si remarquable par l'ordre et la clarté avec lesquels les affections cutanées s'y trouvent exposées, montre à chaque page la vaste érudition de son auteur; Lorry doutait de l'existence de l'*acarus*. Les témoignages d'observateurs tels que Richard Mead ne lui semblaient pas offrir toutes les garanties désirables pour qu'il se rangeât à leur manière de voir.

31. Tels étaient les matériaux imparfaits que les classificateurs avaient à leur disposition pour placer l'*acarus* au rang qui lui convenait dans le *systema naturæ*. Aussi Linné offrit-il trois fois à ses adversaires l'occasion de lui adresser de sévères reproches sur la trop grande confiance qu'il avait dans ses prédécesseurs, sans se donner la peine de vérifier l'exactitude de leurs travaux. Ces critiques n'avaient que trop raison. Linné, en effet, classa d'abord l'*acarus* de la gale dans les insectes aptères, genre *Acarus*, sous le nom d'*acarus humanus subcutaneus*, puis plus tard sous celui d'*acarus scabiei;* enfin, une troisième fois il commit la faute de le confondre avec la mite de la farine, et cette dernière opinion fut celle qu'il conserva définitivement, se fondant sur cette considération, que les nourrices communiquent souvent la gale à des enfants (atteints d'*erythema intertrigo*) en saupoudrant les parties malades avec de la farine de froment. Voilà, du reste, la description que Linné nous donne de l'*acarus* dans sa Faune suédoise : « Très-petit, à peine de la grosseur d'une lente, un peu arrondi, tête à peine visible, bouche et pattes rousses ou jaunâtres, ventre en forme d'œuf, de couleur aqueuse, marqué sur le dos d'une double ligne en croissant ou de deux lignes courbes brunes..... Il habite sous la peau de l'homme, où il cause la gale. Dès qu'il a déterminé une vésicule, il s'éloigne un peu en suivant les rides de la peau; il s'arrête de nouveau et occasionne de la démangeaison. Avec de l'habitude, on peut l'apercevoir, à l'œil nu, caché sous l'épiderme. On

[1] *De morbis cutaneis*, p. 230.

l'extrait facilement avec une épingle; placé alors sur l'ongle, il se meut à peine; mais réchauffé par l'haleine, il se met à courir avec rapidité. » Il n'y a rien dans cette description qui ne se trouve dans la lettre de Cestoni, si ce n'est la couleur de la tête et des pattes, vues à la loupe; et comme ces mêmes organes ont aussi cette couleur rousse chez le sarcopte du fromage ou de la farine, on ne saurait dire de quelle espèce d'*acarus* Linné entend parler.

32. Ce que nous venons de dire pour Linné s'adresse à Fabricius, avec cette différence, toutefois, que Fabricius classe l'*acarus siro*, mite de la farine, l'*acarus scabiei*, l'*acarus exulcerans* (des animaux) de Linné, sous un seul et même nom[1]. Il nous dit dans son traité : « L'insecte est la cause et non le symptôme de la maladie, ce qui prouve l'analogie des boutons avec la gale des végétaux, la nature contagieuse du mal et la manière de la guérir. » Ajoutons cependant, pour être juste, que Fabricius modifia plus tard son opinion, et qu'il donna en 1805 à l'*acarus* les caractères génériques suivants : « Suçoir à gaîne bivalve et cylindrique, deux palpes de la longueur du suçoir; blanc, pattes couleur de rouille, les quatre postérieures munies de longs poils. »

33. Nysandre, disciple de Linné, traita de la gale dans une thèse qu'il soutint sous la présidence de son maître. Nous n'en citerons aucun passage, attendu qu'il reproduit les idées régnantes, en considérant toujours l'*acarus scabiei* comme congénère de l'*acarus siro*, mite de la farine.

34. Plus tard, Casal[2] décrivit le terrier de l'*acarus* comme l'avaient fait ses prédécesseurs; Geoffroy[3] donna une description de l'*acarus* de la gale, et Pallas établissait contre Linné la différence qui existe entre l'*acarus scabiei* et l'*acarus* de la farine.

35. Il faut arriver à de Geer[4], cet entomologiste du premier ordre, pour voir la question traitée avec toute la lucidité et l'im-

[1] Fabricii *Systema entomologiæ*, édit. 1775, p. 803.
[2] *Histoire naturelle et médicale des Asturies*. Madrid, 1762.
[3] *Insectes des environs de Paris*, 1762.
[4] *Mémoire pour servir à l'histoire des insectes*. Stockholm, 1778.

portance qu'elle mérite. De Geer maniait le microscope avec supériorité, il observait lui-même; aussi lui fut-il facile de constater quelle notable différence existait entre l'*acarus* de la gale et la mite de la farine. Le premier entre tous les observateurs, il nous donne un dessin d'*acarus*, on pourrait dire presque irréprochable : la tête en est fidèlement reproduite; il ne lui représente bien que quatre pattes antérieures. Cestoni, on se le rappelle, lui en figurait six. C'est par la face ventrale qu'il l'examine, l'insecte reposant sur le dos; aussi a-t-il dessiné les quatre pattes postérieures, qu'aucun micrographe n'avait encore pu distinguer. Cette figure de de Geer pourrait soutenir le parallèle avec les dessins d'*acarus* de quelques modernes micrographes, ceux de M. Raspail, par exemple. Voici quels caractères de Geer assigne à cet insecte : « Mite un peu arrondie, blanche, à pattes roussâtres, courtes, surtout les postérieures; ces quatre pattes postérieures munies de longs poils; les quatre tarses antérieurs en tuyau, et terminés par un petit renflement en forme de vessie; tête en forme de museau court, cylindrique, arrondi au bout et garni de quelques poils; surface du corps comme raboteuse et parsemée de plusieurs poils. » A de Geer revient encore le mérite d'avoir le premier mentionné les pelotes ou ventouses qui terminent les pattes antérieures; seulement on se demande pourquoi il ne les a pas figurées sur le dessin qu'il nous en a laissé. Il ajoute ailleurs : « La mite ôtée de dessous l'épiderme ne se donne d'abord aucun mouvement; mais peu après elle commence à remuer les pattes et à se mouvoir, quoique assez lentement. »

36. A de Geer succède un observateur non moins remarquable, Wichmann, qui décrit l'*acarus* avec une grande précision. Des deux figures d'*acarus* par Wichmann, une première représente l'insecte vu par la face dorsale, de telle sorte qu'elle complète l'image que nous en avait donnée de Geer par la face ventrale. La tête, les quatre pattes antérieures et les longs poils des quatre pattes postérieures, qui dépassent de chaque côté de l'abdomen, sont fidèlement tracés; Wichmann a donné de plus le dessin de l'*acarus*

exulcerans de Linné. Cette seconde figure ne saurait être toutefois comparée à la première pour sa netteté; l'insecte était probablement recouvert de débris organiques, comme il arrive souvent, quand on l'enlève du lieu où il se niche. Wichmann complète d'ailleurs, autant par ses figures que par son texte, la description de Cestoni; il dit surtout d'une manière très-explicite que l'*acarus* est la cause exclusive de la gale.

37. Jean Hunter assure avoir examiné l'insecte de la gale au microscope sur des galeux de la Jamaïque [1].

38. Après lui, deux classificateurs cherchent de nouveau à placer la gale et l'*acarus* aux rangs qui leur conviennent dans le cadre nosologique et dans l'histoire naturelle. L'un d'eux, Pinel, tient compte des opinions des micrographes; il fait mention de l'*acarus*, il lui attribue le prurit, mais il ne voit pas en lui la cause de la contagion. Aussi n'est-ce que très-secondairement qu'il en dit quelques mots. Le second, Latreille, s'en fiant aux figures de Cestoni et de Wichmann, trop incomplètes pour guider un classificateur, fait de l'*acarus* son genre Sarcopte, sous-classe des Acères, ordre des Soleno-stomés, famille des Tiques. Les caractères qu'il lui donne sont les suivants : « Corps aptère, sans distinction de tête ni d'anneaux; organes de la manducation formant un simple avancement antérieur au suçoir sans palpes apparentes; huit pattes courtes. » Comme on vient de le voir, Latreille avait classé l'*acarus* de la gale à la place qu'il lui paraissait devoir occuper. Mais quel ne fut pas son embarras, quand, par une de ces vicissitudes si communes dans les sciences naturelles, l'*acarus*, qui avait été si bien observé par tant d'auteurs, fut de nouveau mis en doute, puis nié d'une manière absolue? C'est qu'en effet des dermatologistes célèbres, Alibert, Biett et plusieurs autres, avaient en vain cherché l'*acarus;* de telle sorte qu'on resta convaincu pendant quinze ans, en France, qu'il n'avait jamais existé. Aussi les théories humorales se donnèrent-elles de nouveau carrière. Le vice galeux joua un grand rôle dans les complications des dermatoses :

[1] *Observations sur la maladie de l'armée de la Jamaïque;* 1788.

une gale rentrée était chose redoutable; il y eut des gales vésiculeuses, pustuleuses, sèches; enfin, l'imagination, à défaut des yeux, s'évertuait à découvrir comment une maladie si générale chez quelques individus, guérissait si facilement et en peu de jours avec des topiques. Grandes étaient les discussions sur l'étrange opinion des anciens, quand tout à coup un docteur gascon vint, au grand étonnement de chacun, prouver que les anciens avaient pourtant raison; il se faisait fort, et il le démontra, de trouver cet *acarus* dont on niait l'existence. Latreille, trop facile à se laisser convaincre, car cette découverte le sauvait d'une pénible alternative, appuya de son crédit cette importante nouvelle, et bientôt la présence de l'insecte de la gale fut de nouveau acceptée sans conteste.

39. Nous étendrons-nous longuement sur les conséquences déplorables de cet événement? Dirons-nous sans dégoût comment ce médicastre des bords de la Garonne eut la coupable infamie de se jouer de la confiance publique, et d'en imposer, avec un cynisme sans exemple dans les annales de la science, aux savants distingués dont la curiosité avait été justement excitée? Raconterons-nous enfin les séances publiques où le charlatanisme le plus effréné reçut la plus honorable sanction; comment ce misérable fut prôné, récompensé, comme l'aurait été le plus consciencieux des travailleurs? Non! nous laisserons à d'autres le soin de se complaire dans de si déplorables débats.

40. La conséquence naturelle de cette soi-disant découverte fut de frapper l'attention de tous ceux qui se trouvaient à même de la vérifier. En effet, maîtres et élèves s'évertuèrent à trouver l'*acarus* là où Galès disait le rencontrer, c'est-à-dire dans les vésicules et les pustules; et comme cet insecte *ne vit jamais* dans les vésicules et pustules, il fut impossible aux observateurs honnêtes de l'y découvrir. Dès lors, le doute s'insinua de nouveau dans les consciences, puis bientôt l'incrédulité fut encore une fois complète.

41. M. le docteur Mouronval (1820) fit même, sous l'inspiration de ces idées, un gros volume, où il prouve avec un sérieux

imperturbable comme quoi l'*acarus* ne saurait exister, puisqu'il ne l'a pas trouvé après les recherches les plus attentives. Pour montrer quelle était alors l'opinion générale sur la présence de l'*acarus*, il nous suffira d'ajouter que ce livre fut reçu avec faveur.

42. Cependant une question qui avait si diversement agité les esprits depuis plusieurs siècles n'en pouvait rester là. Un auteur devait se présenter, qui, reprenant la question *ab ovo*, soumettrait à une scrupuleuse analyse les travaux des anciens, et comparerait leurs dessins des divers *acarus* avec ceux qu'avait donnés Galès. M. Raspail fut cet auteur. Il démontra sans peine que l'*acarus* présenté par Galès comme étant celui de la gale n'était autre chose que la mite du fromage. La démonstration en était facile, les insectes du fromage permettant à chacun de les reconnaître dans les dessins de Galès. Cette découverte fit grand bruit et grand scandale; quant à Galès, il se tint coi et ne releva pas le gant.

Ces recherches de M. Raspail eurent deux effets pour conséquence : 1° de prouver que Galès aurait mérité une juste répression, si, comme cela pourrait être, les écrivains convaincus de mauvaise foi et d'escroquerie en fait de science, étaient justiciables de la loi; 2° de bien établir que les anciens avaient réellement vu l'*acarus*, ce qui était mettre les observateurs dans une meilleure voie pour le retrouver.

43. Mais comme le moindre effet de ces discussions était de faire beaucoup de bruit; elles éveillèrent l'attention d'un jeune Corse, alors étudiant en médecine à la faculté de Paris, M. Renucci, qui, habitué dans son enfance à voir ses compatriotes faire la chasse aux *acarus*, n'eut pas grand'peine à l'extraire à l'aide d'une aiguille, et à en fournir à la consommation de tous les micrographes, avides, comme on le pense bien, de se faire enfin une opinion arrêtée sur un sujet depuis si longtemps controversé. Cette découverte de M. Renucci, car elle fut généralement considérée comme telle, prouva aux plus incrédules que la gale était réellement bien due à un insecte particulier. Comme ci-devant, des réunions scientifiques eurent lieu, et, si elles prouvèrent une fois

de plus combien Galès s'était indignement joué du public, elles réhabilitèrent Cestoni, de Geer, Wichmann et tous les observateurs qui, à leur exemple, avaient donné des figures, grossières il est vrai, mais du moins réelles de l'*acarus scabiei*. Cette fois, il n'y eut plus de dissidence; tout le monde accepta le fait, et la gale fut regardée comme dûment produite par un insecte.

44. M. Raspail, qui déjà avait prêté à ces discussions le concours de ses recherches bibliographiques et micrographiques, observa, avec plus de soin qu'on ne l'avait fait jusqu'alors, le petit animal en question[1]; un mémoire qu'il publia à cette époque résumait l'état de la science à ce sujet.

Nous aurions pu passer succinctement sur le mémoire de M. Raspail, mais comme le persiflage est l'arme par excellence à l'aide de laquelle M. Raspail prétend faire preuve de savoir, comme M. Raspail ne vise à rien moins qu'à se poser comme chef de doctrines *populaires* à l'endroit de la médecine, science dont il ignore la première notion; comme il prétend avoir découvert l'étiologie pathologique de toutes les maladies (son Traité d'histoire naturelle de la santé et de la maladie, en fait foi); comme il prétend guérir avec une panacée, le camphre, les affections internes de toute nature; comme, parmi ses écrits, quelques-uns jouissent d'une juste autorité et portent le cachet d'une intelligence supérieure; nous exposerons avec quelques détails, les opinions de cet écrivain et nous les commenterons.

45. Voyons d'abord ce que nous dit M. Raspail touchant l'insecte qui avait si vivement excité sa sagacité micrographique. Le résultat d'une étude *poursuivie avec soin* nous fournira le cadre de la description suivante, écrit M. Raspail.

« En l'observant sur le dos, l'insecte de la gale humaine a l'air de l'écaille de certains poissons, dont les quatre pattes antérieures et le museau représentent les appendices radiculaires qui s'implantent dans la peau. En effet, non-seulement la carapace de de l'acare a les contours sinueux d'une écaille de poisson, mais

[1] *Mémoire comparatif sur l'histoire naturelle de la gale.* In-8°; Bailli, 1834.

encore elle est striée de même par des stries concentriques et en réseau qui forment des mailles en fuseau. Outre ces stries, et sur ce travail de petites lignes qui donnent les irisations des franges lumineuses, on observe un assez grand nombre de petits points ronds et brillants, sur chacun desquels s'implante un poil roide, mousse et blanc, qui ne devient bien visible que lorsqu'on place l'insecte sur le flanc pour l'observer de profil; les deux rangées qui vont du dos aux pattes antérieures et aux côtés de l'anus sont celles qui ont les poils les plus longs. Le rostre purpurin, plat et arrondi, porte quatre poils aigus et dirigés d'arrière en avant; il *s'insère et peut se cacher sous la carapace*. Les quatre pattes laissent voir trois de *leur quatre à cinq articulations*, hérissées de poils, à travers leur transparence purpurine; elles sont terminées toutes les quatre par un ambulacre, lequel est formé d'une tige qui s'évase au sommet. Vers la partie postérieure du corps, on observe quatre longs poils qui appartiennent aux QUATRE PAIRES DE PATTES, lesquelles sont cachées sous le ventre, et puis quatre poils plus courts et intermédiaires, aigus comme les quatre autres, qui s'implantent sur les bords de l'abdomen, deux de chaque côté de l'anus. Si l'on place l'acare sur le dos et représentant sa surface inférieure à l'oculaire, tous ces divers appareils mettent en évidence leur origine et leur complication. On voit le rostre et les quatre pattes antérieures s'implanter en évantail dans les échancrures d'une espèce de plastron bordé de rouge, divisé au milieu par une ligne longitudinale rouge; ce qui lui donne assez l'air de la moitié antérieure d'une *chasuble* de prêtre catholique. Tout le reste du corps est d'une blancheur de nacre de perle. Les quatre pattes postérieures sont tout aussi compliquées, tout aussi purpurines, mais non aussi *complètes* que les antérieures; elles s'implantent aussi dans les échancrures de la partie postérieure du plastron, dont les bordures rouges paraissent là après s'être interrompues sur les flancs. On distingue assez bien, sur chacune de ces quatre pattes, la pièce *basilaire et fémorale, triangle dont l'hypoténuse regarde la partie antérieure du corps*, puis les *quatre articulations*, mais plus

serrées que nous ne les avons rencontrées sur les pattes antérieures; mais ici point d'ambulacre, lequel est remplacé par un long poil. Cet acare en marchant a l'air d'une tortue, par son organisation générale et sa *torpeur*. Sa transparence et sa blancheur le font paraître mou au microscope; mais ne craignez pas de le blesser *en le pointant au bout d'une épingle; il est dur et tellement corné dans toutes ses parties, qu'il faut plus d'efforts que la piqûre d'une épingle pour l'écraser, il faut toute la pression de l'ongle et encore on le manque, à cause de la roideur de ses poils du dos, qui le font glisser sous l'ongle et bondir loin de là.*

« En décrivant le rostre de l'*acarus* de la gale, ajoute M. Raspail, on a dû sans doute remarquer que je *n'ai parlé ni des palpes, ni des mandibules, ni des yeux;* je n'ai voulu faire entrer dans ma description que ce que j'avais distinctement vu et ce que chacun, guidé par ces données, pourrait tout aussi bien distinguer que moi. Cependant sur le rostre de l'acare du cheval, j'ai vu et dessiné deux palpes qui, chez l'acare de l'homme, se cachent sans doute sous le chaperon. *Quant aux mandibules, je ne les ai jamais aperçues faisant saillie au dehors,* ce qui me porterait à croire que cet appareil joue et fonctionne sous le chaperon du rostre, sans jamais le dépasser, au moins quand on observe l'acare, loin des chairs qu'il a l'habitude d'entamer. »

46. Si le lecteur arrête un instant sa pensée sur les passages que nous avons soulignés dans cette description de l'*acarus,* il reconnaîtra comme nous, combien M. Raspail est resté au dessous du talent micrographique qu'on pouvait attendre de lui, et qu'il a moins fait ici pour la pathologie animée que de Geer et Wichmann. En effet, si cet aperçu de l'insecte de la gale résultait d'une *étude poursuivie avec soin,* M. Raspail aurait résisté à la tentation de nous faire de spirituelles comparaisons, il n'aurait pas parlé de *quatre à cinq* articulations aux pattes; il n'aurait pas donné aux extrémités postérieures une pièce fémorale basilaire et géométriquement conformée; il ne nous aurait pas présenté l'insecte bordé de pied en cap d'une armure cornée qui le rend invulnérable;

enfin, il aurait vu ce que la moindre inspection nous force à découvrir, des palpes et des mandibules. M. Raspail, si rigide envers les autres, aurait donc pu se montrer plus scrupuleux sur les faits; en un mot, ici comme partout ailleurs, l'imagination a étendu et embelli le champ de vision du micrographe.

47. Dans cet article sur l'*acarus*, M. Raspail ne prétend qu'au rôle de naturaliste; dans ce qui va suivre, c'est comme pathologiste qu'il se montre, et nous allons voir avec quels frais d'imagination notre dermatologue crée de toute pièce les causes et les symptômes d'une maladie. M. Raspail nous a dit : « *Dès que l'acare rampe sur la peau, on éprouve, à moins que l'épiderme ne soit dur et calleux, une légère démangeaison, qui ne provient que de l'application successive des ventouses ambulatoires de l'insecte sur ce plan organisé, et du petit frôlement des poils* qu'il traîne à sa suite. La démangeaison prend bientôt le caractère d'un prurit incommode et qui porte à se gratter dès que l'acare *plonge son rostre et l'appareil fouisseur de ses mandibules dans l'épiderme*, pour y creuser son terrier. On comprend que cet effet passera inaperçu, comme symptôme, qu'il ne sera considéré que comme un infiniment petit effet local, si l'acare *est seul de son espèce* à cet ouvrage. Mais si ces insectes sont en nombre considérable et que *tout le corps en soit presque couvert*, on conçoit quel mouvement fébrile et quelles impatiences nerveuses doivent être le résultat presque immédiat de ces *milliers* de petites piqûres envenimées. »

Il paraît que M. Raspail a l'épiderme bien chatouilleux, car les malades n'ont jamais conscience de la promenade de l'*acarus* sur leur tégument. Le fait est si vrai que beaucoup d'entre eux ont vu l'*acarus* inciser leur épiderme, le soulever et s'y blottir, sans qu'ils aient éprouvé la moindre sensation agréable ou douloureuse[1]. M. Raspail couvre tout le corps d'insectes envenimés, il les voit par milliers dévorer leur proie, etc. etc.; on dirait qu'il les a comptés sur tout le corps et en grand nombre; mais tout cet épouvantail

[1] Bien plus, les *acarus* du cheval et du mouton ne font éprouver aucune sensation quand ils courent sur la peau de l'homme.

est de pure invention de sa part; la moindre observation dément de pareilles assertions.

Continuons. La faconde de l'auteur mérite de fixer notre attention. Il ajoute : « L'acare ne fouit pas l'épiderme sans profit et sans but. Il faut qu'il vive, qu'il ponde et mette son œuf à l'abri de tout accident. Nous avons vu que la présence d'un œuf dans un tissu imprime à ce tissu l'impulsion d'un développement insolite et d'une élaboration anormale, *car à peine l'œuf de l'acare est-il pondu sous l'épiderme, qu'il s'opère là une élaboration de nouvelle nature, une transsudation limpide qui, contenue par un épiderme devenu imperméable en s'atrophiant, s'arrondit en vésicule phlycténoïde de fort petite dimension; organe d'incubation qui éclate et se vide, dès que le jeune acare vient d'éclore, qui se dessèche et tombe en croûte pendant que le jeune acare va chercher ailleurs et sa pâture et l'occasion d'un accouplement, afin de venir ensuite tracer à son tour son sillon sous-cutané, et y venir déposer ensuite l'espoir de ses générations de malheur pour l'espèce humaine.* L'acare fuit de ce lieu d'incubation dès qu'il y a pondu son œuf; nul insecte, en effet, *ne saurait vivre dans le milieu où se développent ses œufs*, car dans cette classe d'êtres vivants, comme *dans les classes supérieures, la nutrition fœtale est diamétralement opposée à la nutrition adulte.*

« La vésicule d'incubation varie de dimensions et de forme, selon la nature et l'élasticité des tissus envahis, elle est d'autant plus grande que l'épiderme est plus tendre et se prête mieux à l'afflux de la sérosité qui suinte en dessous. » Mais citer textuellement jusqu'au bout nous entraînerait trop loin; nous allons, en conséquence, résumer la substance de ce qui suit. Selon M. Raspail, « partout où il se développe une papule de gale, il est *en droit d'y voir l'œuvre d'un acare.* Comme les peaux les plus tendres *sont celles qui se prêtent le mieux aux goûts et aux habitudes de l'insecte, on doit en conclure que les surfaces buccale, nasale, anale, etc. réunissent toutes les conditions propres à l'y attirer, et alors s'il s'introduisait par une de ces ouvertures, on imagine facilement les sérieux désordres qui en résulteraient, etc. etc.*

Tout ce qui suit est de cette force. Jamais, nous ne craignons pas de le dire, aucun auteur n'a poussé si loin l'abus de prendre le produit de son imagination pour des réalités, car M. Raspail paraît écrire en homme convaincu. Comme on le verra d'après nos recherches, il est faux de dire que l'œuf soit l'occasion d'un travail morbide; que l'insecte quitte ses œufs dès qu'il les a pondus; qu'une papule de gale soit nécessairement produite par un *acarus;* et qu'enfin il puisse s'introduire par les ouvertures naturelles. Vraiment, tout ce que nous venons de lire a quelque lien de parenté avec l'assurance de Galès, et si la critique avait quelque intérêt à pousser plus avant son examen et à scruter les intentions, nous en arriverions à un syllogisme accablant pour ce micrographe émérite.

48. M. Renucci, à qui revient l'honneur d'avoir définitivement fixé en France l'opinion des médecins et des savants sur la nature de la cause de la gale, nous a laissé un petit traité de cette maladie. Il en a fait le sujet de sa thèse pour le doctorat. M. Renucci a représenté le dessin de l'*acarus*. L'image qu'il en donne est plus exacte que toutes celles passées en revue jusqu'à ce moment : la tête est mieux reproduite; nous ne pouvons toutefois féliciter l'auteur de la complaisance qu'il a mise à donner comme une manière d'organe de la vue au petit animal. Les articulations des pattes sont vaguement indiquées, mais tout au moins est-ce la nature fidèlement représentée; les ventouses terminales sont aussi mieux signalées. Enfin, les pattes de derrière observées, l'*acarus* étant sur le dos, n'ont point cette forme triangulaire, à hypothénuse tourné en avant, comme nous avait dit M. Raspail. Toutefois, ce spécimen amplifié n'indique rien de sa structure intérieure; c'est toujours une ébauche imparfaite de sa forme.

M. Renucci traite de la maladie que produit l'*acarus* avec cette circonspection qui tient d'un médecin sérieux, il nous parle du sillon qu'il a bien vu et de la place véritable qu'occupe l'*acarus;* mais comme les autres, son imagination vient à son secours quand il veut expliquer comment les vésicules se développent, com-

ment les complications surviennent. Il voit même dans ces complications, les signes de différentes variétés de la maladie, et comme ses prédécesseurs il admet une gale vésiculeuse, papuleuse et pustuleuse. M. Renucci conseille plusieurs méthodes de traitement, une entre autres qui consisterait dans la destruction ou l'ablation de l'animal sans se préoccuper des complications. Enfin, cette dissertation sur la gale, est, sans contredit, ce qui a été publié de mieux pensé et de plus exact jusqu'en 1835.

49. M. Renucci ne fit pas seulement de la gale le sujet de sa thèse, il présenta aussi à ce propos un mémoire à l'Académie des sciences. Ce mémoire donna lieu à un rapport que firent MM. de Blainville et Duméril, et dans lequel ces savants signalaient avec une précision bien remarquable tous les *desiderata* que le travail de M. Renucci laissait après lui. Nous ne pouvons résister au plaisir de citer les passages de ce rapport, où les illustres membres de l'Institut semblaient nous tracer la ligne de conduite que nous avons suivie dans nos recherches : « Toutefois, disent les rapporteurs, dans ces efforts, très-louables sous certains rapports, nous ne voyons pas que l'on se soit suffisamment occupé de l'histoire naturelle de cet insecte, parasite de l'espèce humaine, comme les deux espèces de poux qui la tourmentent, et qui par conséquent croît sur elle, et se propage d'individu à individu, comme les autres parasites, ainsi que Cestoni l'a reconnu le premier. Mais les œufs sont-ils déposés par la mère dans un lieu d'élection? et celui-ci est-il au-dessous de l'épiderme comme cela est probable ? Est-ce l'œuf dont la présence détermine la formation de la vésicule aqueuse, en appelant par l'irritation au point indiqué une certaine quantité de fluide, comme cela nous semble également assez probable? Est-ce quand l'*acarus* est adulte, et en état de se reproduire qu'il quitte la vésicule dans laquelle il a vécu pendant son jeune âge, en creusant sous l'épiderme un sillon plus ou moins tortueux? ou bien a-t-il été déterminé à cet abandon par la suppuration ou la dessiccation de cette vésicule, et va-t-il en former d'autres dans un lieu plus ou moins éloigné? Voilà quelques-unes

des questions intéressantes, du moins pour l'histoire naturelle, qui sont encore à résoudre. Leur résolution, quelque complète quelle soit, ajoutera assez peu au système de traitement de cette maladie, plus dégoûtante encore que dangereuse. » Toutes ces questions ont fixé notre attention d'une manière particulière, et nous croyons avoir été assez heureux pour n'en laisser aucune sans solution.

50. Vers cette époque, 1834, parut un mémoire de M. le dr Albin Gras, élève comme M. Renucci à l'hôpital Saint-Louis: cet opuscule, qui fit moins de bruit que tous ceux que nous avons cités, leur est pourtant supérieur sous tous les rapports. Le meilleur esprit a présidé à la rédaction de ce travail; toutes les questions importantes y sont posées avec netteté et discutées avec discernement.

M. Albin Gras donne à la vésicule l'importance que commandent les doctrines encore professées, elle est pour lui le caractère pathognomonique de la maladie; il décrit le sillon ou cuniculus, indique avec exactitude à quel endroit de ce sillon se trouve l'*acarus*, il note surtout avec grand soin que l'insecte ne se trouve jamais dans la vésicule, et que celle-ci n'a jamais de communication avec le cuniculus; il ne lui a pas échappé non plus qu'il y avait indépendance entre le sillon et la vésicule, qu'en un mot l'existence de l'un n'entraînait pas absolument celle de l'autre. Il aurait vu des sillons aux pieds, aux plis des bras, aux fesses, etc. etc.

M. A. Gras n'a point observé l'*acarus* au microscope; tout ce qu'il en dit est emprunté à M. Raspail. Il aurait conservé des insectes vivants trois ou quatre jours, à une température de 15 à 18° centigrades : cette observation est juste, sauf une légère exagération; enfin, il a soumis l'*acarus* à l'action toxique de divers réactifs et il a noté quelle résistance vitale l'insecte opposait à chacun d'eux. Comme ces expériences n'ont pas été faites au foyer du microspope, il y a, dans les chiffres que nous donne M A. Gras, quelques erreurs quant à la durée absolue de la vie, sous l'in-

fluence de tel ou tel réactif. M. A. Gras termine son opuscule par des considérations pathologiques sur la cause présumée de la gale. Il se demande si le sarcopte est réellement la cause de la gale, ou si l'on doit le considérer comme un parasite qui accompagne cette affection? Pour décider ces questions, il eut recours au moyen le plus propre à les éclaircir : il se donna plusieurs fois la gale, en plaçant sur ses bras des *acarus* vivants, et, de ses expériences, il conclut que le sarcopte de l'homme doit être considéré comme la cause essentielle de la gale, et comme l'élément contagieux de cette affection : conséquence logique, à laquelle devait arriver un bon observateur. Comme on a pu en juger, le mémoire de M. A. Gras est substantiel, rien n'avait été écrit sur la gale qui fût mieux raisonné et plus sagement déduit. Il s'en faut pourtant qu'il ait eu, aux yeux des auteurs classiques, l'autorité suffisante pour les convaincre.

51. M. A. Gras, persuadé sans doute qu'il fallait posséder une grande habitude du microscope pour aborder l'étude entomologique de l'*acarus*, avait laissé à d'autres le soin de remplir cette lacune. Deux auteurs le comprirent, et se mirent à l'œuvre dans le but de compléter ce qui restait ainsi inachevé. MM. Leroy et l'abbé Vandenheckc de Versailles furent ces auteurs. Ils présentèrent le 30 décembre 1834, à la société des sciences naturelles de Seine-et-Oise, le résultat de leurs recherches microscopiques sur l'*acarus scabiei*. C'est pour la première fois que des observateurs essayent de découvrir, à travers l'enveloppe impénétrable de l'insecte, quelle est son organisation intérieure; et si MM. Leroy et Vandenheckc avaient eu quelque expérience du microscope, tout porte à croire qu'ils nous eussent donné une description anatomique et physiologique de l'*acarus* de quelque valeur. Mais, par malheur, ces deux observateurs maniaient probablement pour la première fois ce délicat instrument, de telle sorte qu'il n'est pas une seule illusion d'optique qui ne leur ait donné le change : ils ont pris des parties solides pour des canaux, des pénombres pour des muscles, des hachures pour des dents, enfin

on ferait l'anatomie d'un quadrupède qu'on ne décrirait pas avec plus d'assurance l'attache vigoureuse des fibres musculaires, et les nombreux conduits qui, en portant partout une vie luxuriante, facilitent les mouvements des diverses parties. Nous le dirons sans crainte d'être taxé d'exagération, jamais travaux microscopiques ne seront plus propres que celui de MM. Leroy et Vandenheckc, à montrer quelles grossières erreurs on doit infailliblement commettre, quand on s'avise de publier des recherches microscopiques, sans avoir, au préalable, fait de longues et consciencieuses études à ce sujet. Cette sévère, mais juste critique dit assez combien il est à regretter, pour la science microscopique et entomologique, qu'une pareille publication ait vu le jour. Nous allons en citer quelques passages, car faut-il encore que chacun soit juge dans ce débat.

52. MM. Leroy et Vandenheckc nous disent : « A la partie antérieure et latérale de la face ventrale et à la base des deux paires des membres antérieurs, se trouvent des tubes creux de substance cornée, de couleur rouge-brun. De la partie moyenne de chacun de ces tubes, part un prolongement qui marche d'avant en arrière et de dehors en dedans. Ce prolongement, qui a toujours été en diminuant de capacité, se contourne, marche alors de dedans en dehors pour se terminer en forme de boule, dans l'extrémité évasée d'un autre tube plus étroit rubané dont l'autre extrémité reçoit de la même façon la terminaison du prolongement opposé. Lorsqu'on examine ces tubes à un assez fort grossissement, on *remarque qu'ils contiennent le système musculaire locomoteur de l'insecte!!* Voici la disposition de ce système, ajoutent ces messieurs : A la partie antérieure de chaque tube, dans l'espace compris entre le membre et la première paire et la tête, se trouve un gros muscle allongé dont la partie principale se rend dans toute l'étendue de la partie inférieure de ce membre. Un faisceau interne va s'attacher aux parties internes de la tête; enfin, à sa partie interne, ce muscle se termine par une pointe et marche à la rencontre de celui du côté opposé ; un autre gros muscle situé

entre la première et la deuxième patte; enfin, un dernier petit muscle se trouve à la partie la plus externe de la base du membre de la deuxième paire. » Toutes ces parties, que les auteurs prennent pour des conduits, ne sont autre chose que des organes solides, qui constituent la charpente cornée de l'insecte et auxquels s'articulent des pièces qui entrent dans la composition des pattes. Quant à placer des muscles dans ces prétendus conduits, c'est une idée assez singulière, et dont il est inutile de faire ressortir l'étrange originalité. Le conduit strié, transversal, n'est autre chose qu'une fente, qui occupe la couche la plus superficielle de la face ventrale, c'est-à-dire sur un plan optique qui ne saurait avoir des rapports avec l'extrémité postérieure des tubes en question. Enfin, ces muscles, si gros, si distincts par leurs attaches et leurs divisions, ne sont autres choses que des pénombres dues à l'inexpérience des observateurs, qui n'ont point su saisir le point véritable où le foyer optique donnait aux organes leur aspect réel. Illusions optiques, difficiles à éviter quand on aborde de prime abord l'étude d'un insecte si petit, à une amplification si considérable, et, tout le porte à croire, avec un instrument imparfait. Tout ce que MM. Leroy et Vandenheckc nous rapportent de la structure du corps de l'*acarus* est d'une complète inexactitude; quant à ce qu'ils nous disent de l'agencement des pièces de la tête, c'est au moins aussi singulier. Ils donnent à l'*acarus* de belles et bonnes dents, ils lui font mâcher ses aliments, et des muscles solides mettent en mouvement les fortes mandibules qui entament les chairs.

Une considération plaide toutefois en faveur de ces messieurs: l'intérêt de la science les guidait dans leurs travaux; il y aurait injustice à ne pas leur tenir compte de leur louable intention.

53. Il nous reste, pour conduire l'histoire chronologique de la gale et de l'*acarus* jusqu'au moment où nous nous sommes mis à l'œuvre, à parler de quelques entomologistes modernes dont les travaux ont fait époque, et à passer en revue les divers auteurs classiques qui, dans leurs traités de maladies de peau, ont parlé de la gale. Parmi les naturalistes dont les travaux nous ont fourni des

notions et des analogies applicables à notre sujet, nous devons citer MM. Hermann, Milne Edwards, Lyonnet, Dufour, Dujardin et surtout messieurs Dugès et Audouin, qui, ayant fait des observations microscopiques sur des genres qui touchent de près à l'*acarus scabiei*, nous ont facilité l'intelligence de la structure si compliquée de cet insecte.

54. C'est en vain que nous avons cherché parmi les travaux des naturalistes micrographes, un traité spécial sur l'anatomie et la physiologie de l'*acarus scabiei* chez l'homme. Par une sorte de fatalité bien regrettable, c'est précisement l'insecte qu'il importait le plus à l'homme de connaître, qui nous était le plus complétement ignoré. M. Dugès a donné des notions nouvelles sur la structure anatomique du sarcopte de Latreille, ou sur la mite du fromage; mais dans ces intéressantes publications sur la grande famille des Acariens, M. Dugès garde un silence absolu sur l'*acarus* de la gale de l'homme : voici tout simplement ce qu'il en dit : « Nous nous bornerons à avertir le lecteur, que l'*acarus exulcerans* de Linné, *acarus scabiei* (de Geer), celui enfin dont M. Raspail a donné la figure, n'est pas le ciron de la gale humaine, *animalcule fort rare et d'une existence problématique;* mais celui de la gale du cheval. »

L'opinion de M. Dugès, bien faite pour surprendre au premier abord, s'explique pourtant facilement, si l'on se reporte à l'époque où ses mémoires ont paru; en 1834, en effet, on avait fait justice de l'escobarderie de Galès, on ne croyait plus à l'*acarus scabiei;* il est donc tout naturel que M. Dugès mette son existence en doute.

55. Parmi les auteurs classiques modernes qui ont écrit sur la gale, nous devons mentionner messieurs les docteurs Biett, Alibert, Rayer, Cazenave et Chedel, Gibert. Biett et Alibert ont donné des descriptions de la gale, remarquables à bien des égards; mais où les doctrines humorales trouvent une trop large place; ils semblent pressentir qu'il y a là un inconnu qui leur échappe, et qu'un jour ce mystère sera dévoilé; Alibert surtout soupçonnait

la présence d'un insecte dans ces désordres si étendus, et pourtant si prompts à disparaître.

56. M. le docteur Rayer[1], à qui une vaste érudition ne laisse rien ignorer, voit bien dans l'*acarus* la cause de la gale, mais il se tient dans un sage éclectisme, il concilie les divers systèmes, il reste fidèle à cette méthode classique qui a pour elle la sanction du temps, et qu'on ne saurait enfreindre sans y être autorisé par une conviction déduite de l'observation ou des faits; et comme l'expérience n'a pas encore prononcé sur ces questions litigieuses, il place la gale dans la famille des maladies de peau, où elle devait être alors incontestablement rangée, dans les inflammations vésiculeuses. Il l'a définie d'après les caractères les plus tranchés, c'est-à-dire d'après le siége et la forme de la vésicule, d'après les démangeaisons. M. Rayer décrit les symptômes dans les différents âges, il en fixe la durée, apprécie l'influence de l'invasion ou de la disparition de la maladie au point de vue d'une pathologie plus générale, mais en blâmant Ramazzini et Testa d'avoir pu croire que la rétrocession de la gale était capable de produire l'hématurie et des affections du cœur. L'article des causes nous expose avec un ordre et une lucidité remarquables les diverses doctrines qui ont tour à tour régné dans la science. Ces savantes citations nous ont été d'un grand secours dans l'exposition que nous avons faite des divers auteurs qui se sont occupés de la gale. Comme nous l'avons dit, l'honorable membre de l'Institut sait donner aux progrès l'importance qu'ils méritent, et après avoir fixé l'attention d'une manière toute particulière sur le rôle que joue l'*acarus* dans le produit de la maladie, il en donne un dessin où la forme extérieure de l'insecte est fidèlement reproduite. La gale pour M. Rayer n'est plus vésiculeuse, pustuleuse, sèche; il ne voit dans ces symptômes que des complications, et non des caractères propres à marquer différentes formes d'une même maladie. Le diagnostic, le pronostic, le traitement, sont exposés avec non moins d'exactitude et de talent. En un mot, cet article *Gale*

[1] *Traité théorique et pratique des maladies de peau*, t. I, 1835.

est un traité précieux, où l'observateur, le savant et le médecin se montrent avec une égale supériorité.

57. Messieurs Cazenave et Schedel[1] ont aussi publié un excellent article sur la gale. La position exceptionnelle de M. Cazenave, comme médecin de l'hopital Saint-Louis, attaché au service des galeux, lui permettait, trois ans après la publication de la dernière édition de l'ouvrage de M. Rayer, de nous faire faire quelques pas de plus en avant, et d'accorder plus d'importance qu'on ne l'avait fait jusqu'alors à la cause de la gale, à l'*acarus scabiei*. En effet, quoique M. Cazenave suive, dans sa description, la même méthode que celle de ses prédécesseurs, quoique le même esprit préside à l'interprétation des faits, on n'en remarque pas moins une tendance manifeste à regarder l'*acarus* comme la cause exclusive de la maladie; le traitement, sauf des cas exceptionnels, est purement local, les théories humorales sont laissées à d'autres temps; la pathogénie de cette affection vise à une unité qui domine les caractères sur lesquels on se fondait naguère pour la définir et la spécialiser. Nous ne terminerons pas cet alinéa sans remercier M. Cazenave du bienveillant intérêt qu'il a pris à nos travaux; c'est avec une généreuse abnégation qu'il a mis tous ses malades à notre disposition; sans lui, notre bonne volonté pour faire ces recherches eût été vaine : nous comprenons l'étendue du service que M. Cazenave nous a rendu, et nous ne l'oublierons jamais.

58. Deux ans plus tard (1840), M. Gibert, médecin aussi à l'hôpital Saint-Louis, a publié une seconde édition de son traité pratique des maladies de peau. Quoique plus récent que les deux derniers ouvrages dont nous venons de parler, il s'en faut pourtant que celui de M. Gibert les égale par l'indépendance de ses doctrines; l'hippocratisme et le galénisme jettent sur le tableau que l'auteur nous fait de la gale, une teinte de cette dyscrasie humorale qu'on voudrait voir abandonnée depuis longtemps. Le genre des maladies que M. Gibert traite à l'hôpital Saint-Louis

[1] *Abrégé pratique des maladies de peau*, 1838

nous rend compte du reste de ses opinions, à propos de la maladie sporique; ce n'est qu'accidentellement qu'il traite des galeux: il ne saurait donc avoir l'occasion ni la nécessité de faire des observations sur cette maladie, et par conséquent de sentir le besoin de modifier ses doctrines.

59. Nous devons mentionner les noms de plusieurs naturaliste et docteurs allemands qui, persuadés de l'existence du sarcopte, ont su lutter avec une louable opposition contre les funestes doctrines d'Hanhemann : ainsi Aithen, Rosenstein, Paulet, Slanius, Kehler, Baüm, de Siebold, Aohde, Hyland, Veiel Kraüse, Elb, Vezin, etc. etc. etc. qui tous attribuaient à un insecte les accidents qui arrivent à un galeux.

60. Tel était l'état de la science sur la gale et son insecte, lorsqu'en 1843 nous avons entrepris de traiter cette question sur toutes ses faces et de manière à ce qu'elle fût vidée à jamais; les moyens nouveaux que nous mettions en usage (voyez la description de notre microscope mobile, à l'avant-propos) nous permettaient de tenter cette difficile entreprise, et, nous le croyons, notre attente n'a pas été trompée.

Nos travaux touchaient à leur fin, quand M. le docteur Hebra, de Vienne, publia, dans les *Annales des maladies de peau*, un excellent article sur la gale de l'homme, où se trouvent énoncées certaines conclusions auxquelles nous étions nous-même arrivé. M. Hebra pose en principe :

1° Que la présence des sillons et des sarcoptes est absolument nécessaire au diagnostic de la gale;

2° Que la gale se communique par le transport du sarcopte;

3° Que cet insecte se trouve presque toujours aux mains et *aux pieds;*

« 4° Que les efflorescences observées proviennent, d'une part, du travail des sarcoptes pour creuser leurs sillons dans l'épiderme; de l'autre, de la pression et du frottement; enfin, que les ulcérations sont causées par les malades qui se grattent;

« 5° Qu'il suffit, pour guérir la gale, de détruire les sarcoptes,

de faire des frictions aux mains et aux pieds avec une pommade contenant des substances insecticides;

« 6° Que les récidives proviennent d'une nouvelle infection, ou de ce que les sarcoptes n'ont pas été détruits;

« 7° Qu'il n'existe point de dyscrasie psorique; que la gale n'épargne personne, et atteint aussi bien les individus rachitiques que ceux qui sont en bonne santé; que sa durée prolongée doit nécessairement avoir une influence nuisible sur l'organisme, car un système aussi important que celui de la peau ne peut être troublé dans ses fonctions sans qu'il en souffre : d'ailleurs, des exsudations continuellement répétées sur la peau doivent nécessairement *donner lieu à un manque de liquide, à une anémie*, à un dépérissement général;

« 8° Que les métastases de la gale sont des chimères, qui n'ont été réellement inventées que dans les livres, et non des faits observés au lit du malade. »

Telles sont les conclusions du docteur Hebra. On ne saurait trop en louer le bon esprit; elles sont l'expression d'une observation exacte, ou plutôt c'est la vérité logiquement et sévèrement déduite de l'analyse des faits. Mais M. Hebra n'apporte point dans cette description les preuves matérielles sur lesquelles il base ses opinions, de ces preuves enfin que le dogmatisme même exige dans toute démonstration, et qui seules donnent aux faits la puissance d'une explication inattaquable.

C'est que M. Hebra a observé à l'œil nu, ou à l'aide d'une faible loupe; c'est qu'il n'a pas fait de la cause de la gale une étude approfondie. Aussi se trompe-t-il sur le siége qu'occupe l'*acarus;* il ne dit rien de la physiologie pathologique de cet insecte, par rapport aux accidents qu'il cause; il ne sait rien de sa propagation, de ses mœurs; il n'a rien vu de sa structure intime. Les œufs de l'insecte, qui ont une importance si grande dans la production de la maladie, et surtout de ses récidives, sont complétement passés sous silence. Chez M. Hebra, le médecin seul est en cause; le naturaliste ne se montre pas. Aussi l'opuscule de M. Hebra eût-il paru

longtemps avant le nôtre, qu'il nous fût encore resté un vaste travail à effectuer; il est arrivé aux conclusions auxquelles les dermatologistes français auraient dû être conduits, quand M. Renucci est venu leur montrer l'existence indubitable de l'*acarus*.

M. Hebra n'est pas allé au delà de ce que permettait une saine logique, dès qu'il fut bien établi que l'*acarus* était la cause réelle de la gale. Nous le répétons donc, il s'en faut que le docteur de Vienne ait traité la question avec toute l'étendue qu'elle méritait; et ses compatriotes, en quittant la France, après avoir suivi nos leçons[1], emportaient sur leurs notes les éléments d'une dissertation aussi intéressante que celle qu'il a publiée.

Ici se termine ce que nous avions à dire sur la seconde période chronologique de l'histoire de la gale.

61. Arrêtons un moment notre attention sur les doctrines qui ont tour à tour prévalu dans la science médicale, quant à la nature et aux causes cachées de cette maladie. Une affection telle que la gale, capable de déterminer sur la peau des éruptions de diverses natures, ne pouvait tenir, pour les médecins du moyen âge, qu'à une altération générale de l'économie, et suivant les temps, on appelait à son aide, pour comprendre d'où venaient les accidents, la théorie ou la doctrine pathologique alors à l'ordre du jour; c'est ainsi que l'*effervescence des esprits*, l'*acidité des humeurs*, la *crudité de la lymphe*, donnaient aux intelligences supérieures l'explication des phénomènes morbides. Plus tard, on laissa de côté ces doctrines qui préjugeaient trop de la nature des altérations; on rejeta des termes trop précis dans leur signification, et des expressions plus générales, plus vagues, et par conséquent plus en rapport avec l'état des connaissances, vinrent remplacer l'*effervescence*, l'*acidité* et la *crudité* qu'on prêtait au divers fluides; le mot vice, auquel on ajoutait adjectivement ceux de *dartreux*, *galeux*, fut alors généralement adopté comme le plus propre à donner une idée de la lésion inté-

[1] On sait que les internes des hôpitaux de Paris font souvent des leçons cliniques aux médecins étrangers qui viennent en France avant d'enseigner ou de pratiquer la médecine dans leur propre pays.

rieure, ou de la nature de la maladie. C'est en vain que des observateurs du premier mérite venaient expliquer la cause naturelle de la gale; la présence d'un insecte enfoui sous l'épiderme, irritant incessamment la peau, cet organe important de la sensibilité et de l'exhalation, ne paraissait qu'un épiphénomène de la maladie à des esprits prévenus et imbus des doctrines d'un étroit galénisme. D'ailleurs, comment de profonds théoriciens n'auraient-ils pas imposé à la masse des esprits leurs doctes interprétations, quand cet insecte, découvert par les uns, était bientôt nié par les autres. Ainsi donc les théories humorales, vagues soupçons d'altérations véritables dont la chimie et la physique nous donneront peut-être un jour l'explication, faisaient rejeter bien loin toute localisation de la maladie. C'est en vain que Mouflet, Wichmann, de Geer, démontraient le siége de la psore; l'observation dut céder le pas aux hypothèses qui jusque dans ces derniers temps ont prédominé, et fait loi dans la science comme dans la pratique.

62. En dernière analyse, si nous jetons un coup d'œil rétrospectif sur l'histoire de la gale et de son insecte, plusieurs grands faits frappent l'esprit et l'intéressent. On se demande si réellement les anciens étaient affectés de cette maladie; on cherche à se rendre compte, et l'on y parvient facilement, du vague de ces théories à l'aide desquelles on croyait expliquer les désordres qui l'accompagnent; on constate avec intérêt l'influence qu'eut sur l'interprétation des accidents l'emploi du microscope; mais un fait qui plus que tout autre attire l'attention, c'est la lutte prolongée entre les localisateurs, qui voyaient tout dans la présence de l'insecte, et les théoriciens imbus de doctrines galéniques, qui trouvaient la cause de l'affection dans un vice des humeurs; ce sont les étranges péripéties qui ont successivement agité les esprits relativement à l'*acarus;* car quoi de plus inexplicable et de plus curieux que de voir cet insecte tant de fois découvert et tant de fois nié de nouveau. En effet, n'est-il pas incompréhensible qu'un fait simple en lui-même, d'une si grande importance relative et d'une si facile constatation, ait rencontré tant de fois une opposition insurmontable

avant d'être accepté définitivement dans la science. Si ces obstacles que rencontrait la vérité étaient un fait isolé dans la science médicale, passe encore; mais malheureusement ce que nous avons vu pour la gale est applicable à beaucoup d'autres maladies, et s'il a fallu trois ou quatre mille ans avant que la présence de l'*acarus* fût irrévocablement admise, combien de milliers d'années ne faudra-t-il donc pas discuter et combattre, pour substituer à toutes les hypothèses et à tous les inconnus qui tiennent lieu de doctrines, une connaissance véritable des lésions qui produisent les accidents ou les symptômes des maladies. Ces recherches historiques ont pour le médecin philosophe un puissant intérêt; elles lui montrent ce qu'un mince progrès coûte de siècles et de labeurs; elles lui permettent de juger ce qu'on peut attendre de l'avenir, après ce qu'a donné le passé, et s'il jette un coup d'œil sur les transformations qui s'opèrent de nos jours dans les sciences comme dans les arts, il se plaît à calculer leur influence sur la science qui importe le plus à l'humanité, sur la science médicale.

DEUXIÈME PARTIE.

63. Comme on peut en juger par les travaux de mes prédécesseurs, deux points sont acquis définitivement à la science :

1° L'existence de l'*acarus scabiei;*

2° La présence de cet insecte comme symptôme pathognomonique de la gale.

Nous pouvons donc, sans discussion préalable, aborder l'étude microscopique de ce parasite, et rechercher quel rôle il joue dans la production de la maladie.

Cette seconde partie de notre mémoire comprendra l'entomologie de l'*acarus* en général, c'est-à-dire son anatomie, sa physiologie et son ovologie; et pour plus de méthode, cette seconde partie sera divisée en trois chapitres.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ANATOMIE DE L'*ACARUS*.

64. L'*acarus* de la gale, chez l'homme, est un petit insecte d'un tiers de millimètre en longueur et d'un quart de millimètre en largeur, par conséquent sensiblement oblong. Plusieurs entomologistes ont cherché à préciser le rang qu'il doit occuper dans la famille des acariens; M. Dugès, entre autres, l'a placé dans la cinquième famille, à palpes adhérents, avec les hypopes et les sarcoptes. Nous avons déjà laissé entendre que l'*acarus scabiei* n'avait pas été assez suffisamment étudié pour qu'on pût le classer avec connaissance de cause à la place qu'il doit occuper, et qu'une classification vraiment naturelle ne sera réellement possible qu'après des recherches microscopiques nouvelles. Nous n'insisterons donc

pas davantage sur le rang qu'il faut assigner à l'acare de l'homme parmi les acariens; avec le temps, les classificateurs se chargeront de ce soin, et nous nous estimerons heureux, si nos travaux peuvent leur être de quelque utilité pour arriver à ce but.

65. L'acare de la gale est d'une couleur blanchâtre, rosée; des débris organiques adhérents à l'insecte, ou les fluides contenus dans son intérieur lui donnent parfois d'autres teintes, mais qui ne sont que passagères. Sa couleur blanchâtre, dans son ensemble, n'est cependant pas partout uniforme; les pièces solides intérieures qui lui servent comme de squelette, d'une teinte rouge-brique, et qui sont surtout placées vers l'extrémité céphalique, donnent à cette extrémité un aspect rougeâtre qui tranche sur les parties abdominales, quand on observe l'acare à la lumière réfléchie et à un grossissement de 50 diamètres. A cette amplification, on distingue facilement une face dorsale et une face ventrale : la face dorsale, d'une convexité variable, suivant que l'insecte est plus ou moins gorgé de liquide, laisse apercevoir des lignes ou sillons ainsi que des poils. La face ventrale est légèrement arrondie, mais à un degré beaucoup moindre que la face dorsale. La tête[1] occupe l'une des extrémités du corps de l'insecte (pl. 2, fig. 8, *a*); elle porte les organes de la manducation. L'ouverture anale est à l'extrémité opposée (*r*). Les pattes sont au nombre de huit, quatre en avant et placées de chaque côté de la tête (pl. 2, fig. 8, *b, b, b, b*), quatre en arrière (*e, e, o, o*); elles sont toutes les huit placées à la face ventrale. Les pattes antérieures se terminent par un tube armé d'une ventouse, et les postérieures par un long poil : ces appendices de terminaison sont les principaux organes de la progression.

Tel est l'aspect général que présente l'*acarus* extérieurement; mais si l'on porte son attention sur chacune de ces parties isolément, l'organisation intérieure révèle des détails infinis qui captivent l'observateur.

[1] La tête n'est pas représentée avec netteté, attendu que le foyer optique porte sur l'ensemble de l'insecte et non sur l'extrémité céphalique exclusivement. Le compresseur et les réactifs employés ont d'ailleurs aussi leur part dans sa déformation.

66. L'enveloppe extérieure du corps est continue dans son ensemble, depuis l'extrémité céphalique jusqu'à l'extrémité anale; c'est en vain qu'on cherche un thorax distinct de l'abdomen, et *à fortiori* le protothorax, le mésothorax et le métathorax de certains insectes. Le corps n'est qu'une cavité où les organes plus ou moins distincts de la nutrition sont contenus. Cependant, si l'observation se répète sur un grand nombre d'insectes, surpris dans divers états de réplétion, on distingue, sur les bords latéraux du corps, des contours irréguliers; ainsi de chaque côté de la tête on voit le corps déborder légèrement, de façon à empiéter sur la base de chaque patte (pl. 1, *k*, *k*). En dehors de celles-ci, ou plus postérieurement, l'abdomen est comme sinueux (pl. 1, fig. 3); on dirait des scissures profondes qui divisent cet abdomen, et si l'on compte les régions principales que ces scissures semblent isoler, on en voit une première antérieure qui correspond à l'insertion de la deuxième paire de pattes et s'étendant derrière celles-ci de *c* en *d*, puis une seconde région allant du point *d* au point *e*, enfin une troisième comprise entre le point *e* et la scissure *f*, où se remarquent des rudiments de poils. Si l'œil s'arrête un instant sur ces diverses régions, que les scissures limitent distinctement, il découvre une analogie frappante entre ces trois régions et celles qui, chez certains insectes, représentent un thorax, ou mieux un proto, un méso et un métathorax; il voit, dans cette organisation de l'*acarus*, un dernier vestige d'une structure plus complète et qu'offrent les insectes placés à un degré plus élevé dans l'échelle animale; il n'en découvre que les vestiges, disons-nous: en effet, si l'*acarus* est plein de vie, s'il veut fuir le danger qui le menace, quand le compresseur le retient prisonnier, par exemple, on le voit luttant avec énergie contre l'obstacle qui l'arrête, s'efforcer en se traînant de tourner son corps à droite, à gauche; et dans ces derniers mouvements de latéralité, les divisions, ou les scissures que nous avons notées sont d'autant plus profondes, à droite, par exemple, que l'insecte tend à se tourner davantage de ce côté, et d'autant moins visibles à gauche (pl. 1, fig. 3), à tel

point qu'on cherche vainement de ce côté la trace des scissures. En un mot, les scissures sont des sortes de plis résultant d'une fausse articulation à mouvements plus ou moins étendus; aussi disparaissent-elles dans une réplétion exagérée de l'insecte, qui, moins agile, se remue tout d'une pièce sans pouvoir se courber latéralement, ou lorsque la compression est portée à un certain point.

67. La face dorsale est très-variable dans sa conformation extérieure; sa convexité diffère suivant l'état de vacuité ou de réplétion de l'abdomen, et présente une courbure généralement régulière; cependant, on voit quelquefois une voussure qui part du train postérieur de l'insecte et va se perdre vers le pseudo-thorax. Cette face dorsale est armée de nombreux organes destinés à servir de point d'appui à l'*acarus* quand il fouille son sillon sous-épidermique. Ces organes sont nombreux et d'une structure différente; on en distingue facilement de trois espèces : les uns (pl. 1, fig. 1, *c, c, c, c*), généralement au nombre de seize, occupent la partie moyenne et postérieure; ils sont symétriquement rangés sur le côté; leur longueur est de $0^{millim.}03$ et leur largeur de $0^{millim.}01$; ils prennent naissance dans l'épaisseur de l'enveloppe tégumentaire, par une sorte de follicule, et s'étendent en forme d'appendice conique à base large et à sommet plus ou moins obtus; ces organes sont cornés et présentent un canal intérieur (pl. 1, fig. 2). Quand on les observe dans la verticale, alors qu'ils ne sont pas couchés ou inclinés, ils simulent assez bien les aspérités que présentent chez d'autres insectes les ouvertures des trachées ou les stigmates, mais la moindre attention rectifie cette illusion d'optique. D'autres appendices moins volumineux et moins longs se rencontrent dans le voisinage des précédents (pl. 1, fig. 1, *d, d, d*), et servent comme de transition entre les premiers décrits et ceux dont il nous reste à parler. Ces derniers, incomparablement plus nombreux, sont disséminés au centre de la surface dorsale suivant les lignes concentriques *i, i, i;* ils figurent de petits tubercules coniques dont la base va se perdre dans l'épais-

seur du tégument, et dont le sommet est très-aigu : ce sont tout simplement des productions épidermiques sans canal intérieur; leur longueur, égale à la largeur qu'ils ont vers leur base, est de $0^{millim.}0085$[1]. Ces trois espèces de productions cornées, qui ne sont autre chose que des rudiments de poils à bulbes plus ou moins développés, concourent tous au même usage; leur volume, leur longueur, leur position sont appropriés au rôle qu'ils sont destinés à remplir, eu égard à la conformation de la face dorsale : en effet, comme cette face est convexe, il est facile de comprendre comment les appendices pileux et cornés qui sont les plus petits, et qui occupent le sommet de la convexité, peuvent s'arc-bouter contre l'épiderme lorsque l'*acarus* s'en est recouvert; on comprend aussi comment les appendices du second ordre, moyens en volume et placés plus bas sur le plan incliné que présente la face dorsale, peuvent encore atteindre l'épiderme, attendu qu'ils ont plus de longueur que les précédents, et donner un point d'appui à l'insecte lorsqu'il cherche à poursuivre sa voie souterraine; enfin, il ressort avec la même évidence que les appendices les plus longs, les plus volumineux et les plus forts peuvent de même prêter à l'insecte un secours efficace; car leur éloignement du centre de la convexité est proportionné à leur longueur, de telle sorte qu'ils peuvent, tout aussi bien que les plus petits, s'arc-bouter sur les parois internes du sillon que l'insecte s'est frayé[2]. La face dorsale offre encore en *f*, *f* (pl. 1, fig. 1), et plus postérieurement en *g*, *g*, des poils symétriquement placés; ils semblent être des organes de tact. Elle est sillonnée en tous sens par des rides ou plis, destinés à se prêter à l'amplification de l'insecte, quand il se gorge de lymphe, ainsi qu'aux divers mouvements qu'il effectue sur lui-même, comme

[1] Nous devons dire, une fois pour toutes, que nous adoptons le millimètre pour unité, et que toutes les mesures qui exprimeront le volume réel des objets ayant moins d'un centième de millimètre, seront portés jusqu'au dix millième de millimètre : 0,0085 exprimeront, zéro millimètre, 85 dix millièmes de millimètre.

[2] Ces appendices ont un intérêt qu'on était loin de soupçonner : tout porte à croire que l'*acarus* de l'homme seul en est pourvu, parce que lui seul, de tous les *acarus* connus, vit sous l'épiderme.

la figure 3 de la planche 1 nous en a donné l'exemple. Notons enfin deux autres petits poils, très-ténus et situés en avant, à l'endroit où le corps empiète légèrement sur la tête, quand elle se réfléchit en bas ou quand elle se rétracte fortement en arrière (pl. 1, fig. 1, *e*, *e*).

68. La face abdominale ou inférieure (pl. 2, fig. 8) est légèrement convexe; elle présente, comme la face dorsale, des plis dirigés en différents sens (pl. 1, fig. 4), et qui ont les mêmes usages. Un de ces plis attire surtout l'attention; il est placé (*m*) au-dessous des extrémités postérieures de la pièce sternale et des épimères; il est profond et paraît une ouverture transversale propre à une fonction spéciale (la ponte). Les *acarus* qui ont subi plusieurs métamorphoses, et qui sont à la période de la ponte, sont seuls pourvus de cette ouverture. L'insertion des pattes, surtout celle des pattes postérieures (*n*, *n*), se voit très-bien sur cette face inférieure; on aperçoit encore, à travers les téguments, quelques pièces cornées qui servent comme de squelette intérieur; enfin, cette face abdominale présente, comme la face dorsale, quelques poils très-ténus; on en compte sept (pl. 1, fig. 4) : deux entre les épimères, trois au niveau du pli profond dont nous avons parlé, et deux autres entre chaque paire de pattes postérieures vers leur naissance.

69. L'enveloppe extérieure qui constitue la face dorsale est disposée, par rapport à celle qui forme la face abdominale, de telle façon qu'elle la déborde à l'endroit où elles se rencontrent, et de la réunion de ces deux faces résultent les bords; c'est presque l'aspect que présente la partie convexe ou supérieure de la carapace d'une tortue, par rapport à la face inférieure. L'*acarus*, en effet, offre une grande analogie de forme avec ce chélonien, surtout pour ce qui est de la disposition de la tête et des pattes antérieures. Le bord qui réunit les deux faces est plus ou moins tranchant, suivant l'état de réplétion de l'insecte; toutefois, en avant vers l'insertion de la tête et des pattes, il présente toujours une sorte de plan incliné, dirigé de haut en bas et d'avant en arrière vers la face ventrale, et c'est sur ce plan incliné que la tête et les

pattes prennent naissance, en s'abritant ainsi sous le corps. Les pattes postérieures, insérées à une grande distance des bords, sont naturellement recouvertes par l'abdomen. On remarque sur les bords, de chaque côté, au niveau du tiers postérieur, trois appendices cornés, coniques et pointus (pl. 2, fig. 8, *i, i, i*); ils permettent à l'*acarus* de prendre latéralement des points fixes dans ses laborieux efforts pour soulever l'épiderme. Enfin, postérieurement, de chaque côté de l'ouverture anale *r,* on voit trois poils à bulbe très-prononcé (*k, k, k*), qui servent d'organes de tact vers cette région postérieure.

Telle est la conformation extérieure de l'insecte : si nous avons négligé quelques détails, c'est à dessein; ils trouveront leur place ailleurs.

70. Nous, suivrons dans la description anatomique de l'*acarus*. la méthode la plus propre à bien faire comprendre la structure de ses organes; nous exposerons avec suite les parties qui ont ensemble des rapports de fonction; en un mot, nous suivrons une méthode physiologique. Ainsi, avant d'aborder l'étude de la conformation des pattes antérieures, nous décrirons les pièces du squelette intérieur auxquelles elles empruntent des points d'attache et dont elles ne semblent être que la continuation.

71. L'organisation intérieure de l'*acarus* est très-compliquée, à tel point que tous les auteurs qui nous ont précédé se sont généralement contentés de faire une description de ses organes les plus apparents, sans chercher à dévoiler la structure anatomique des parties profondes. Observé à l'aide de la lumière réfléchie et par réfraction, l'*acarus* présente une conformation intérieure un peu différente, suivant qu'on l'examine par la face dorsale ou la face ventrale : non pas qu'il soit impossible d'apprécier cette conformation, en faisant passer le foyer optique par les divers plans de son épaisseur, de la face dorsale à la face ventrale, et réciproquement; mais comme on peut, à l'aide du compresseur, l'examiner alternativement sur l'une et l'autre de ces faces, il est préférable d'en agir ainsi.

Si donc on place un *acarus* sur des lames de verre de 1/4 de millimètre d'épaisseur, solidement collées aux deux branches du compresseur, et de manière à présenter, sur un premier plan optique vers l'observateur, sa face ventrale, on y remarque une enveloppe extérieure transparente, sillonnée de plis et laissant voir des organes qui semblent constituer un squelette intérieur. Ces organes solides (apodèmes) qui frappent l'attention sont longitudinalement situés vers le tiers antérieur du corps : l'un d'eux occupe la ligne médiane (pl. 2, fig. 8, *g*); les autres, les régions latérales (*f*, *f*), de telle sorte que ces trois apodèmes divisent la partie antérieure du corps en quatre espaces à peu près égaux. Ces trois organes intérieurs sont d'apparence cornée, d'une couleur rouge-brique : leur structure, leur position, leurs articulations avec des parties qui entrent dans la charpente solide des pattes, tout prouve qu'elles sont destinées à offrir des points d'attache aux muscles. Celle de ces pièces qui occupe la partie moyenne est simple, insymétrique (pl. 1, fig. 6, *m*) dans une portion de son étendue; arrivée au point *p*, elle se continue par deux branches à droite et à gauche, de manière à former en avant une sorte de concavité où vient se placer la base de la tête. La disposition de cette pièce à la *face ventrale* et sur la ligne médiane, sa division en deux branches qui vont se porter à la première paire de pattes antérieures pour lui fournir des points d'union, lui font tout à fait jouer le rôle d'une sorte de sternum. Elle est aplatie de manière à présenter une face inférieure et une face supérieure: celle-ci est en rapport avec un conduit particulier qu'on pourrait appeler *œsophagien* (pl. 5, fig. 33, *a* et *c*, *c*, *c*); cette pièce sternale est de 0,0694 en longueur et 0,0089 en largeur; elle laisse voir, vers la moitié antérieure de sa longueur, une sorte d'épaississement qui ferait croire qu'elle est double et divisée: il n'en est pourtant rien. Au point où cet épaississement se termine en *l* (pl. 1, fig. 6), cette pièce sternale est flexible, de telle façon que sa moitié antérieure peut se porter à droite ou à gauche dans les mouvements de latéralité de l'avant-train de l'insecte. Vers son extrémité antérieure, au point *p*, la pièce ster-

nale se divise en deux branches qui se dirigent en avant et en dehors; ces deux branches sont symétriques, et présentent, après un court trajet, une double division (pl. 1, fig. 6, *r, r*). De ces deux divisions, une première s'articule au point (*r, r*) avec un anneau dont on ne voit qu'une demi-portion, une seconde se dirige en avant et en dehors où elle s'unit en *v*, *v* avec l'extrémité interne de deux pièces qui constituent la base de la patte. Il est facile d'apercevoir sur la face inférieure de la pièce sternale (celle que nous observons), et cela pour son tronc comme pour ses branches, une sorte de bordure, ou de liséré qui forme relief sur elle (*i*). Ce relief n'est autre chose que la trace d'une division que présente la pièce sternale avant son complet développement.

Cette doublure ou liséré semble avoir pour but de donner plus de solidité à l'organe, et comme on l'aperçoit d'autant mieux que l'*acarus* est plus près de subir une métamorphose, on peut voir là une de ces crêtes rugueuses qui marquent chez beaucoup d'insectes le premier travail d'un dépouillement encore éloigné. Le bord antérieur des deux branches sternales n'a qu'un rapport de contiguïté avec la tête : il donne probablement insertion aux fibres musculaires qui, du tronc, se rendent aux organes cornés de l'appareil céphalique.

72. Les deux autres pièces latérales (pl. 1, fig. 6, *n, n*) paraissent être, d'après leur forme, leur structure, leur position et leurs usages, l'analogue des pièces écailleuses qui, chez beaucoup d'insectes, servent à donner insertion aux parties formant la base des pattes et qui portent le nom d'*épimères :* l'analogie est si complète que nous n'hésitons pas à leur donner le même nom. Ces pièces latérales, ou épimères, sont au nombre de deux, d'apparence cornée, un peu courbées suivant leur longueur, de telle sorte que leur extrémité postérieure se porte en dedans et leur extrémité antérieure en dehors : celle-ci est double et fournit une première division externe (*s, s*) qui s'articule avec l'anneau de la deuxième paire de pattes, puis une seconde division interne (*k, k*) qui se rend en dedans vers la première patte, et qui donne insertion à

des ligaments destinés à unir la première patte à la deuxième vers le bord externe de l'anneau : en un mot, les épimères sont pour la deuxième paire de pattes ce que les deux branches de la pièce sternale étaient tout à l'heure pour la première paire. L'épimère offre, comme la pièce sternale, un relief qui déborde sur sa face inférieure et se termine, comme elle, par une extrémité obtuse.

73. Avant d'aborder la description des parties solides qui constituent le squelette des pattes, nous devons revenir sur la pièce sternale qui, indépendamment des divisions qu'elle fournit à droite et à gauche à la paire de pattes, présente encore à noter une disposition fort curieuse. Soit un *acarus* placé sur sa face abdominale, c'est-à-dire ayant sa face supérieure ou dorsale sur le premier plan vers l'observateur : si dans cette position on fait jouer le système optique de la superficie de l'insecte à ses parties profondes, on aperçoit derrière la tête, dans la direction des deux premières pattes (pl. 1, fig. 5, *a*, *a*), une lame mince, et comme isolée au milieu du tissu intérieur : cette lame présente une double courbure, une première suivant les bords, une seconde suivant ses faces, dont la supérieure est convexe, et l'inférieure concave. Cette lame paraît isolée, avons-nous dit; mais si l'on comprime assez fortement l'*acarus*, on voit bientôt l'extrémité externe briser ses attaches et se diriger en arrière (pl. 1, fig. 7, *i*, *i*), tandis que l'extrémité interne se porte en avant, de manière à empiéter sur la tête (*c*, *c*) et à laisser voir en s'effaçant une branche qui, tout à l'heure, était verticale et produisait l'ombre du point *b*, *b* (pl. 1, fig. 5). La compression, en effet, en couchant suivant un plan oblique cette branche verticale, l'a mise en évidence, et nous la montre servant de point d'union entre la pièce sternale qu'on aperçoit profondément et la lame mince qui était au-dessus d'elle (pl. 1, fig. 7, *d*, *d*). Cette pièce verticale, ou d'union, est donc complétement masquée quand on observe l'insecte suivant son épaisseur : il faut, pour la voir, qu'elle s'étende sur les branches latérales de la pièce sternale ou au-devant d'elles,

et cela sous l'effort d'une compression méthodique. Il est clair qu'en relevant par la pensée les points *c*, *c* (pl. 1, fig. 7), on les verra entraîner la pièce verticale en arrière et la masquer enfin complétement: d'où les points ombrés que nous avons notés en *b*, *b* (pl. 1, fig. 5). Cette lame mince, à double courbure, d'apparence cornée, a des points d'union par son extrémité externe avec la branche interne de l'épimère : des ligaments, dont on aperçoit la trace fugitive quand la séparation s'opère sous l'influence de la compression, servent à unir ces pièces entre elles. Si maintenant nous cherchons à nous rendre compte du rôle physiologique de cette lame à double courbure, seule pièce solide qu'on rencontre à la face dorsale, et qui, réunie en dedans et profondément à la pièce sternale, en dehors à la branche interne de l'épimère, semble établir un rapport de fonction entre la première et la deuxième paire de pattes, on découvre bientôt qu'elle tient lieu d'une sorte de clavicule et qu'elle contribue pour sa part à maintenir l'épimère dans sa position respective. Ce mécanisme est facile à concevoir: quand l'épimère se porte en dedans, il rencontre l'extrémité externe de la lame mince, et comme celle-ci est unie à la pièce sternale, il y a nécessairement entre toutes ces parties un rapport de fonction. Nous sommes donc en droit de voir dans cette lame mince un organe remplissant le rôle d'une clavicule.

74. Maintenant que nous avons décrit les organes qui forment les bases sur lesquelles les pattes prennent leur point d'appui, nous pouvons exposer comment celles-ci sont constituées. Un *acarus*, placé dans sa position naturelle, c'est-à-dire reposant sur la face ventrale et soumis à une légère compression, agite ses pattes en tous sens et permet de saisir vaguement leur structure intérieure : mais, pour en bien concevoir la véritable conformation, il faut augmenter la compression, et la pousser jusqu'à opérer la déchirure des points d'attache qui unissent la lame claviculaire à l'épimère : à ce degré de compression en effet, et lorsque la lame claviculaire s'est déplacée, on aperçoit au-dessous d'elle une ligne transversale qui lui est parallèle (pl. 3, fig. 13, *b*, *b*, *b*, *b*), et qui

se présente avec la même structure et la même disposition pour les quatre pattes antérieures.

Nous parlons d'une simple ligne, mais si l'on retourne le compresseur, de manière à présenter la face ventrale sur un premier plan vers l'observateur, on aperçoit une seconde ligne qui offre tout à fait la même disposition (pl. 2, fig. 9, *d, d, d, d*) et qui se trouve seule visible; pour découvrir la première, il faut faire descendre le système optique vers la face dorsale [1]. Ces deux lignes, à peu près parallèles, ont le même aspect quant au volume et à la couleur; c'est presque l'image de la lame claviculaire décrite plus haut. Elles sont bien distinctes, occupent un plan différent et se continuent vers leurs extrémités, de manière à se confondre : avec un peu d'attention on ne tarde pas à constater qu'elles forment un seul et même tout, ou, ce qui revient au même, qu'elles représentent un cercle complet. Lorsque le compresseur fonctionne, il altère souvent les organes au point de les rendre méconnaissables, mais aussi souvent il les dispose de la manière la plus heureuse pour en bien faire comprendre la disposition : c'est ce qui est arrivé pour l'*acarus* de la planche 3, fig. 11, où l'on voit l'anneau couché sur ses bords (*p, p, p, p*) : dans cette position on constate facilement qu'il forme un tout bien complet. Cet anneau, comme toutes les autres pièces solides, est rougeâtre et d'apparence cornée; il suit le mouvement des pattes, et occupe, à l'état de repos, le plan incliné dont nous avons parlé quand il a été question des contours de l'insecte. De cette façon, son grand diamètre transverse est perpendiculaire à l'une des pattes, qui, elles-mêmes, prennent naissance sur le plan incliné, ou sur le bord, compris entre la face dorsale et la face ventrale. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler, pour bien nous

[1] Dans nos microscopes, la position de l'objet soumis à l'observation est invariable; c'est le corps du microscope armé de lentilles et de l'oculaire qui seul s'élève ou s'abaisse, quand l'œil cherche à observer les divers plans qu'un corps transparent quelconque présente dans son épaisseur. Nous appelons système optique le tube du microscope armé des lentilles et de l'oculaire, et foyer optique le point *précis* où l'organe qu'on veut examiner se présente avec la plus grande netteté.

faire comprendre, que les bords antérieurs de l'*acarus* présentent une grande épaisseur vers la région qu'occupent la tête et les pattes : et comme ces bords vont en fuyant en dessous, c'est à la faveur de cette disposition que les pattes peuvent manœuvrer facilement sous l'insecte, bien qu'il se traîne sur sa face ventrale. Par suite de l'inclinaison de l'anneau ou du cercle, le compresseur a pour action naturelle de porter en avant le demi-cercle qui correspond à la face dorsale, tandis que le demi-cercle qui correspond à la face ventrale se porte en arrière : la pl. 3, fig. 13, *a* et *b*, ou mieux la pl. 3, fig. 11, *p*, *p*, *p*, *p*, donne une idée de la position que prend l'anneau sous l'influence de la compression.

L'anneau que nous venons de décrire a de nombreux rapports avec les pièces qui sont liées de fonction avec lui. Ainsi, en dedans il prend naissance, pour la première paire de pattes, à la division externe des branches sternales (pl. 1, fig. 6, *r*, *r*), et pour la deuxième paire à la division externe de l'épimère (même figure, *s*, *s*.) Cette insertion à la pièce sternale et à l'épimère se voit sur la plupart des figures; elle est disposée de telle sorte, quant à la conformation des surfaces et à la laxité des liens d'attache, que cet anneau se meut autour des points *r*, *r* et *s*, *s*, comme centre, dans tous les sens imaginables. En dehors, le cercle offre des articulations plus compliquées ; nous ne pouvons les décrire avant d'avoir fait connaître les pièces avec lesquelles il a des rapports de fonction. Ces pièces font partie intégrante des pattes : les figures 14 et 15 de la planche 3 les représentent à un grossissement de 850 et de 900 fois. Comme la structure est la même pour les quatre pattes antérieures, il nous suffira de faire la description de l'une d'elles pour en donner une idée exacte.

75. Prenons pour exemple la deuxième patte droite, l'insecte reposant sur la face ventrale (fig. 14); pour la mettre en position, on peut la transporter par la pensée à la figure 13, c'est-à-dire à la place de la patte marquée *g*. Cette figure 14 offre sur un premier plan, une demi-portion de l'anneau, τ, et, sur un second plan, une pièce à double branche qui forme un triangle irré-

gulier, dont la base serait en dehors suivant la ligne courbe φ, et le sommet en a. Les deux lignes principales de cette pièce sont disposées transversalement, se réunissent et forment en dedans, vers leur point de terminaison en a, une surface articulaire; en dehors elles s'écartent et se rendent isolément, l'une en ligne droite en β, l'autre obliquement en γ, où elles rencontrent un ligament qui les réunit. Les trois angles qui résultent de la réunion de ces deux branches et de leur ligament sont le siége de deux articulations principales, savoir : une première en dedans (a), une seconde en dehors et en arrière (γ). La première articulation a lieu avec la division interne d'une des branches sternales (pl. 1, fig. 6, v, v), ou avec la division externe de l'épimère pour la deuxième paire de pattes, et la seconde articulation avec la demi-portion inférieure de l'anneau γ. L'anneau, en effet, est plutôt ovale que circulaire, et c'est vers l'extrémité externe de cet ovale qu'a lieu l'articulation. Plus profondément au-dessous de cette première pièce, sur un troisième plan, se remarque une seconde pièce à peine visible (pl. 3, fig. 14 π), attendu qu'elle est masquée par presque toute l'épaisseur de la patte; ce qui revient à dire que les parties solides qui entrent dans la conformation du squelette sont doubles à la base des pattes : l'une se trouve à la face dorsale, nous venons de la décrire; l'autre à la face ventrale, nous allons nous en occuper. Si l'on retourne le compresseur, la seconde pièce, que l'on soupçonnait à peine, se montre dans tous ses détails, tandis que la première s'aperçoit profondément en π, fig. 15.

La seconde pièce est en rapport avec la face de flexion de la patte, et présente quelque analogie de forme avec la première : comme celle-ci, elle a deux branches principales (δ et ε, fig. 15), mais incomparablement moins longues, attendu qu'elles se réunissent après un court trajet en un seul tronc qui se dirige en dedans[1] et se termine par une surface articulaire (a): en un mot, cette pièce de la face de flexion forme aussi un triangle dont la base est en ω et le

[1] Car il ne faut pas oublier que le corps de l'insecte présenterait toujours les mêmes rapports avec la patte.

sommet est très-allongé en *a* ; celui-ci s'articule avec la division interne de la branche sternale, ou avec la division externe de l'épimère, divisions qui viennent ainsi se placer entre les deux extrémités fournies par la pièce de la face d'extension, et par celle de la face de flexion. L'angle postérieur et externe γ s'articule avec l'anneau en un point commun avec le même angle de la pièce précédemment décrite.

Ces pièces, tant celle de face de flexion, que celle de la face d'extension sont curvilignes et en sens inverse, de telle sorte qu'en se réunissant vers leurs extrémités en dedans et en dehors, elles forment un cercle complet. La pièce qui occupe la face d'extension est convexe supérieurement et concave inférieurement; l'inverse a lieu pour la pièce de la face de flexion. Nous aurions voulu dessiner les articulations qui lient ces pièces entre elles, mais cela nous a été impossible, attendu que la compression affaisse toujours les parties de manière à les superposer suivant leur longueur en masquant les articulations et leurs ligaments. Il est à peine nécessaire d'observer que la patte doit sa forme circulaire à la disposition de ces pièces solides, qui décrivent chacune un demi-cercle, et forment, comme l'anneau déjà décrit, la base du cône dont la patte donne l'image dans son ensemble. On a dû remarquer que ces deux pièces, formées en dehors par deux branches, sont simples en dedans. Cette conformation a ses raisons d'être; en effet, le mouvement d'adduction des pattes antérieures est très-borné, mais comme elles peuvent se fléchir en dedans, ce mouvement est augmenté d'autant, et cela grâce à la conformation de cette double pièce, car si elle avait eu en dedans l'écartement fixe qu'elle présente en dehors de β en γ, la flexion eût été très-bornée et le mouvement d'adduction à peine sensible.

76. Nous donnerons à l'anneau et à ces deux dernières pièces, les noms techniques qui semblent leur appartenir : ainsi l'anneau sera désigné sous le nom de *hanche*, et les deux pièces qui constituent par leur ensemble un anneau secondaire sous ceux de *trochanter* et de *trochantin;* les organes dont la description va suivre prendront les dénominations de *cuisse*, *jambe*, *tarse*, etc. etc.

77. Au-devant des deux dernières pièces irrégulièrement triangulaires que nous avons décrites, se voient d'autres organes qui, comme elles, sont doubles, transverses, curvilignes, et réunis en dedans et en dehors. Seulement, ces organes n'ont plus ni le même volume, attendu qu'ils sont plus près du sommet du cône, ni la même solidité, surtout du côté de la face d'extension, où ce sont plutôt des ligaments que des pièces cornées. On peut s'en assurer sur la planche 3, fig. 14, où l'on voit en ω une ligne courbe, concave en avant, qui se rend à droite et à gauche aux extrémités d'une autre ligne plus large, mais aperçue vers un plan plus profond et par conséquent moins visible (o). Dans la figure 15, au contraire, cette ligne profonde est seule mise en relief (ν) et nous montre deux points d'attache à ses extrémités, où elle reçoit l'insertion du ligament transverse que nous avons noté en ω, figure 14. Ce ligament n'en concourt pas moins pour sa part à former, avec la pièce cornée à laquelle il s'unit, un cercle complet propre à donner à la région moyenne de la patte une forme arrondie : il est facile de s'en assurer en observant les pattes en mouvement, ou bien en faisant passer le foyer optique dans toute sa longueur et dans la direction de leur axe central; quand, par exemple, la patte se présente en haut, et comme posée verticalement sur sa base, alors on aperçoit fort bien une série d'anneaux qui se débordent à mesure qu'on avance vers la base, et qui sont inscrits l'un dans l'autre à mesure qu'on arrive vers le sommet. On a encore une idée parfaite de cette disposition en anneaux des articles des pattes, quand on observe celles-ci dans une flexion exagérée; la planche 4, fig. 17, nous en montre un exemple (r, r, r, r).

Après cette pièce solide et ce ligament, on voit (pl. 3, fig. 14, μ et ν) un autre article, également composé de deux parties, l'une ligamenteuse (μ), située vers la face dorsale; l'autre très-forte, vaguement dessinée en ν et plus nettement présentée (figure 15, μ). Cette pièce, comme on le voit, est double en dedans et simple en dehors, ce qui lui donne trois extrémités ou trois facettes articulaires. Deux extrémités seulement sont reliées par un cordon liga-

menteux : c'est la plus postérieure des deux. De cette conformation résulte encore un cercle complet, en tout semblable à celui que formait l'article précédent, si ce n'est qu'il a sensiblement moins d'étendue. Enfin, en poursuivant l'observation plus avant vers l'extrémité de la patte, on constate encore la présence d'un article plus petit et offrant une disposition semblable de tout point aux autres articulations (fig. 15, ρ). Peut-être pourrait-on considérer comme un cinquième et sixième article les derniers organes qui forment le sommet du cône de la patte (fig. 14, n° 5), du moins l'exemple de quelques entomologistes nous autoriserait à le faire : quoi qu'il en soit, la patte se termine par une extrémité obtuse, rugueuse, garnie de longs poils et armée d'un tube creux et flexible. Parmi ces poils, il en est qui sont toujours tronqués (fig. 14, pl. 3, n° 5), ce qui leur permet de fournir un point d'appui à la patte, quand le tube qui lui fait suite vient à se briser, ou quand elle se fléchit fortement sur ce tube. Un petit appendice conique, qui prend naissance au milieu de ces poils, a le même usage; un très-long poil qui se détache aussi de l'extrémité de la patte en dehors du tube (fig. 14, π'), semble être un organe de tact. Toutes ces parties présentent à leur naissance une extrémité bulbeuse, et de leur ensemble résultent la teinte foncée et l'apparence de corps solides qui termineraient la patte. Nous avons dit qu'elle se continuait par un tube (fig. 16, pl. 3, *a*) creux et flexible; en effet, la patte ne jouit de la plénitude de ses fonctions qu'à la condition d'être armée de ce conduit, qui lui-même porte à son extrémité un organe membraneux et contractile, sorte de houppe ou mieux de ventouse qui adhère fortement aux corps sur lesquels elle s'applique par l'effet du vide qui se produit à son intérieur. Le tube et la ventouse ont été nommés l'*ambulacre* de l'*acarus*, et avec quelque raison, car c'est l'appareil actif de la progression. Ces deux organes ne forment qu'un seul tout; une partie, rétrécie en forme de col, les réunit l'un à l'autre, et le canal intérieur du tube communique largement avec la cavité intérieure de la ventouse ou de la caroncule. Celle-ci est membraneuse en appa-

rence, mais composée probablement par un tissu particulier qui tiendrait du tissu musculaire et tendineux, et chez lequel une grande souplesse et une grande élasticité s'allieraient à une solidité remarquable. Le tube a 0,041 de longueur, 0,0057 de largeur, et la caroncule, 0,0117 tant en longueur qu'en largeur.

78. La patte antérieure est, en outre, formée par une enveloppe extérieure tégumentaire, très-mince, transparente, sillonnée de plis articulaires vers la face de flexion, et se continuant avec l'enveloppe tégumentaire du tronc. Quand le compresseur étend fortement les pattes, on les voit se continuer sans interruption avec le tronc; mais quand l'*acarus* est observé dans sa position naturelle, il est difficile à l'œil de suivre le tégument dans ses replis articulaires. Un tissu mou, légèrement opalin, dans lequel on distingue très-facilement des fibres musculaires et des vésicules où la respiration et la circulation s'opèrent, complète la structure de la patte antérieure. Nous reviendrons plus loin sur ces importants organes. N'oublions pas de noter que la patte est armée à sa surface extérieure, et surtout vers son côté externe, de poils plus ou moins longs : il y en aurait un ou deux pour chaque article. Ces poils se voient sur beaucoup de figures. Nous avons à dessein passé sous silence une pièce solide, et qui paraît comme supplémentaire dans le squelette de la patte antérieure; nous voulons parler de cette partie rougeâtre et d'apparence cornée qu'on aperçoit pl. 1, fig. 6, *o, o, o, o,* et pl. 2, fig. 10, *a, a;* elle est placée à la partie interne de la base de la patte, entre l'anneau et les deux extrémités internes des pièces triangulaires qui forment le premier article; elle naît de la division externe de l'épimère et de la branche sternale; après un court trajet en dehors, elle vient se terminer à la face abdominale par un follicule volumineux qui donne naissance à un poil. Cette pièce supplémentaire suit l'anneau dans tous ses mouvements; son principal usage nous paraît être d'offrir des surfaces d'insertion à un grand nombre de fibres musculaires, lesquelles acquièrent une puissance d'autant plus grande, que le point où elles s'attachent et qui remplit les fonctions de

levier, les entraîne plus loin du parallélisme dans les mouvements si étendus de l'anneau. Les fibres musculaires s'aperçoivent très-distinctement quand la patte est en mouvement; dans l'état du repos, au contraire, elles se perdent au milieu des autres tissus.

Ici se termine ce que nous avions à dire sur les organes qui servent de squelette aux pattes antérieures, et qui remplissent chez l'*acarus scabiei* les fonctions du système osseux.

79. L'étude des pattes postérieures va nous offrir de nombreuses analogies de forme et de structure entre les pièces que nous venons de passer en revue et celles qui entrent dans leur composition. Ces pattes postérieures sont, comme les antérieures, au nombre de quatre, quand l'insecte est parvenu à son complet développement. Elles sont placées, comme on l'a vu planche 2, fig. 8, *e, e, e, e,* sur les côtés de la face ventrale, et dirigées dans l'état du repos en arrière et en dehors[1]. Un petit espace sépare les deux pattes d'un même côté, c'est-à-dire qu'aucun ligament n'établit entre elles un lien de communication : leur forme générale est celle d'un ovale qui s'effilerait à chacune de ses extrémités. L'extrémité antérieure et interne prend naissance dans l'épaisseur même, ou dans l'intérieur du corps (pl. 2, fig. 8, *l, l, l, l*); l'extrémité postérieure et externe donne naissance à un poil long et fort (*d, d, d, d*). Les pattes postérieures ont, comme les antérieures, une face d'extension en rapport avec la paroi abdominale, et une face de flexion, généralement en rapport avec les corps sur lesquels l'*acarus* repose : la face d'extension ne s'aperçoit qu'à travers l'épaisseur de l'abdomen, quand l'*acarus* est dans sa position naturelle, ou de la patte elle-même, quand l'insecte est placé sur le dos. Elles naissent, comme les antérieures, d'une pièce cornée, qui est plongée dans les tissus superficiels de l'abdomen, et dont la forme varie pour les deux pattes d'un même côté. Cette pièce représente tout à fait celle que nous avons appelée épimère pour les pattes antérieures; et comme rien ne répugne à ce que nous acceptions cette analogie,

[1] Le graveur a oublié de désigner la deuxième paire de pattes postérieures par les lettres *e, e,* indiquées dans le texte : le lecteur rectifiera facilement cette erreur.

nous leur donnerons le même nom. Cet épimère des pattes postérieures est d'apparence cornée, rougeâtre; il a 0,0050 d'épaisseur et 0,033 de longueur, il se termine à la surface tégumentaire de l'abdomen, au moment où il donne naissance à un appendice corné et comme onguiculé qui longe la patte en dehors (pl. 2, fig. 8, *n, n, n, n*). Cet appendice est toujours tronqué pour celle des pattes qui se trouve en avant, tandis qu'il s'effile en pointe pour celle qui est en arrière; il suit les mouvements de la patte quand elle se fléchit ou s'étend. A partir du point où cet appendice onguiculé prend naissance, la patte devient tout à fait libre à l'extérieur, c'est-à-dire qu'elle fait saillie sur la face abdominale [1], et dans ce point l'enveloppe extérieure de l'abdomen se continue sur elle de manière à lui fournir une gaîne complète. Quant à limiter le point précis où l'enveloppe de l'abdomen s'étend sur la face d'extension de la patte, c'est une disposition difficile à rendre, attendu que cette région ne saurait jamais se voir à nu; qu'on tourne l'insecte sur la face dorsale ou ventrale, toujours d'épais tissus couvriront ce point de communication entre la patte et l'abdomen. A voir les mouvements étendus de flexion et d'extension dont jouit la patte, on est en droit de supposer qu'elle devient libre et saillante pour la face d'extension, à l'endroit même où l'appendice onguiculé prend naissance. Quoi qu'il en soit, l'épimère, vers son extrémité antérieure ou abdominale, n'a pas la même conformation pour les deux paires de pattes; en effet, il est courbé en forme de crosse en dedans et en arrière pour la première paire de pattes, tandis qu'il est droit et comme coupé en biseau pour la deuxième (pl. 2, fig. 8, *l, l, l, l*). De même que nous avons vu l'épimère des pattes antérieures donner naissance à des pièces qui forment leur base, à l'anneau, par exemple, de même aussi l'épimère des pattes posté-

[1] L'usage du compresseur est nécessaire pour mettre en complète évidence toutes les parties qu'on veut observer, mais il a l'inconvénient de les niveler suivant un plan mathématique, et quand un réactif très-réfringent a donné aux tissus une grande transparence, on ne distingue plus les ombres qui se voient naturellement quand l'insecte est seulement plongé dans l'air ambiant : de là vient que tous nos dessins manquent de relief et se réduisent à des lignes.

rieures est continué par plusieurs pièces plus ou moins circulaires et d'une complication presque inextricable. Pour avoir une idée nette de la disposition de ces parties, on placera un *acarus* d'une transparence parfaite entre les lames du compresseur, on l'infiltrera d'acide sulfurique presque pur, et on l'observera à un grossissement de 400 diamètres. Dans ces conditions d'observation, il sera facile de constater, en tournant alternativement l'*acarus* sur ses faces ventrale et dorsale, et en faisant passer le foyer optique dans les différents plans d'épaisseur de la patte, qu'elle est formée dans le point *e, e, e, e,* pl. 2, fig. 8, par une série de pièces superposées qui toutes sont articulées avec l'extrémité postérieure de l'épimère en *m, m, m, m,* autour d'un petit appendice conique qui le termine en ce point.

Pour bien concevoir l'agencement de ces diverses pièces, nous examinerons d'abord l'*acarus* du côté de sa face abdominale, et nous le disposerons de telle sorte, que l'extrémité céphalique soit dirigée en arrière et l'extrémité anale en avant, et cela afin d'observer ses pattes postérieures suivant leur longueur. Pour plus de précision, mettons la figure 8, pl. 2, dans cette position, et choisissons parmi les pattes postérieures, car l'organisation est la même pour toutes, une de celles qui sont à droite, marquée n° 4 par exemple, et transportons-la par la pensée, toujours dans cette position, sur la planche 4, fig. 19. Cette figure nous montre une pièce irrégulièrement triangulaire, formée de trois branches, une transversale et deux latérales (*a, a, a*); les deux latérales se réunissent en *d* où elles s'insèrent sur l'épimère. Cette première pièce est sur un premier plan; on en voit facilement une seconde, au-dessous d'elle, dont les extrémités se découvrent en *b, b,* vers un plan plus profond, et qui est dessinée isolément dans la figure 20, *b, b;* elle n'a que deux branches réunies en *d* à l'épimère, et qui seraient libres par les deux autres extrémités *c, c,* si elles ne s'articulaient avec un organe (*e*) dont nous allons parler tout à l'heure. Les figures 21 et 22 montrent encore cette seconde pièce à double branche (*b, b*) La disposition

de ces deux premières pièces ainsi superposées, est d'une évidence palpable ; et la certitude n'est pas moins entière pour ce qui regarde une troisième pièce, placée par conséquent sur un troisième plan : celle-ci occupe la face d'extension, car, ne l'oublions pas, c'est la face de flexion qui se présentait sur le premier plan tout à l'heure. Chercher à se rendre compte de la disposition de la pièce qu'il nous reste à observer à travers les deux premières que nous avons décrites, serait chose difficile; c'est pourquoi, nous préférons comprimer fortement l'*acarus* afin de rendre la transparence aussi complète que possible, et continuer notre étude, en le plaçant la face dorsale vers l'observateur. Les choses ainsi disposées, la troisième pièce se trouvera sur un premier plan (fig. 23, pl. 4), et l'on constatera sans difficulté qu'elle présente un ovale irrégulier, ayant aussi un point d'insertion sur l'épimère, et une extrémité libre au milieu des tissus. Cette sorte d'anneau diffère tellement des autres parties par sa forme, son volume, sa position, qu'on ne saurait le révoquer en doute. Nous appuyons sur l'existence réelle de ces trois organes, attendu que les entomologistes micrographes ne seront pas embarrassés pour démontrer comme quoi une seule et même pièce diversement disposée nous a induit en erreur. Il en sera de même pour bien d'autres organes dont nous aurons à parler; on doutera, avec raison, et l'on nous accusera d'avoir mal observé, ce qui sera moins logique. Mais nous récusons à l'avance tous ces jugements portés à la légère; ce sont des faits indestructibles, incontestables, que nous mentionnons et dont nous serons toujours prêt à fournir la preuve. Ces trois pièces ainsi superposées occupent toute l'épaisseur de la patte à sa naissance; un tissu intérieur et des plans musculaires les séparent. Elles sont confondues et à peine dessinables dans le point où elles prennent naissance sur l'épimère; mais vers leurs larges extrémités, où elles sont en rapport avec le premier article, on les distingue facilement. Elles semblent représenter quant au nombre, et à la rigueur quant à la conformation, l'anneau et les deux pièces triangulaires de la patte antérieure.

80. La pièce que nous avons dessinée (pl. 4, fig. 20, 21 et 22) en *b b*, est placée entre celles que nous avons notées fig. 19, *a*, *a*, et fig. 23, *f*, *f*; elle donne insertion, vers ses extrémités en *c* (fig. 20, 21 et 22), à un premier article situé transversalement, et qui est indiqué par les lettres *e*, *e*, *e*. Ce premier article offre une disposition difficile à bien rendre : deux branches entrent dans sa composition; une première, qui parcourt transversalement la patte de *c* en *c* (fig. 20), s'articule à ses extrémités avec la pièce basilaire intermédiaire *b b*; la seconde représente un arc de cercle qui serait sous-tendu par la première. Cet arc de cercle prend naissance sur la branche transversale (pl. 4, fig. 22, *e*); il n'a point de situation fixe; il tourne autour d'un axe que représente la branche transversale qui lui donne naissance. Cependant, il est généralement placé dans la région de la patte qui dépend de la face dorsale ou d'extension. En examinant avec soin le mécanisme de ce premier article, on comprend presque la nécessité de sa conformation; en effet, les mouvements de flexion de la patte postérieure sont peu étendus par rapport aux mouvements d'extension : dans la flexion, tous les articles tendent à se rapprocher, et ils se touchent réellement quand elle est exagérée; mais alors la face d'extension serait privée de parties solides propres à lui donner de la consistance, et à offrir des points d'insertion aux fibres musculaires, si l'arc de cercle situé au milieu de cette région dorsale ne satisfaisait à cette double nécessité. Il est facile, du reste, de se rendre compte de cette conformation du premier article; il suffira pour cela de fixer un moment son attention sur la figure 22, qui montre la partie transversale du premier article en *e* et l'arc de cercle qui en dépend en *i*. Dans cette figure, la patte est fortement étendue, et l'arc de cercle, cédant sous l'attraction des fibres musculaires, ou mieux du compresseur, est venu se placer en *i*; mais qu'on se représente la patte dans une flexion exagérée, et l'arc de cercle viendra se placer de l'autre côté de sa corde, vers l'extrémité de la patte.

81. Comme pour les pattes antérieures, nous avons maintenant

à décrire des pièces transversales qui forment autant d'articles isolés; ainsi, sur les figures 19, 20, 21 et 22 de la planche 4, on voit aux points *h, h, h* un second article; un troisième est désigné par les lettres *k, k, k;* enfin, la patte se termine par une réunion de follicules qui donnent naissance à des poils et à deux tubercules coniques (pl. 2, fig. 8, *o, o, o*), mais surtout à un long poil qui remplace aux pattes postérieures le tube armé d'une ventouse que nous avons décrit aux pattes antérieures. Il va sans dire que ces divers articles décrivent une courbe suivant leur surface, et de façon à présenter une concavité vers l'axe central de la patte. Comme nous avons dessiné ces articles vus par la face de flexion, nous n'avons pu mettre en relief les ligaments qui unissent l'extrémité de chacun d'eux, de manière à les transformer en cercle complet : d'ailleurs la conformation des pattes postérieures étant la même que celle des pattes antérieures, il est inutile d'insister davantage à cet égard.

Telle est la description anatomique des divers organes qui constituent le squelette des pattes antérieures et postérieures : nous reviendrons plus tard sur les fonctions de ces appareils de la progression, dans le chapitre qui traitera de la physiologie de l'*acarus* en général.

82. Nous allons maintenant faire l'exposition des pièces solides qui composent la tête.

L'étude microscopique de la tête de l'acare est d'une difficulté inouïe; il nous a fallu une observation suivie, de plusieurs heures par jour pendant plusieurs mois, avant d'arriver à bien saisir le mécanisme, ou plutôt la structure de chacune des parties qui, par leur réunion, forment cet important appareil. Il est nécessairement indispensable de réunir dans ces recherches toutes les conditions les plus propres à faciliter l'observation; ainsi, on aura recours à l'acide sulfurique pur, ou seulement étendu d'une partie d'eau : nous donnons la préférence à ce réactif, non-seulement à cause de sa grande réfrangibilité, mais encore en raison de la singulière propriété dont il jouit, d'opérer une sorte de dissection

des différents organes de la tête. Rien n'est plus curieux, en effet, que de voir, sous l'action énergique de cet acide, les différentes pièces se dissocier, se séparer, tout en conservant leur forme primitive, de façon qu'on peut en quelque sorte les étudier isolément. Il est vrai qu'il faut une patience à toute épreuve, et sacrifier des centaines d'*acarus*, avant que le hasard vous serve suivant vos souhaits, car l'organe que vous voulez observer exige souvent bien des tentatives avant de se présenter de la manière la plus propre à bien faire comprendre sa structure; mais avec de la persévérance on y arrive cependant. La tête de l'*acarus* a 0,065 de long et 0,054 de large. Nous l'avons dit déjà, elle occupe une des extrémités du corps, entre les pattes antérieures; extérieurement elle se continue avec le tégument qui recouvre la face dorsale et abdominale, et comme elle a beaucoup moins d'épaisseur que le corps, on l'aperçoit à peine quand le foyer optique s'arrête sur une de ces faces : c'est ce qui a lieu pour la planche 1, fig. 1, *a*. La face dorsale présente un plan incliné vers la tête; à l'endroit où elle se continue avec elle, il existe une duplicature qui est d'autant plus sensible que la tête se rétracte davantage dans l'épaisseur du corps. Cette duplicature disparaît, au contraire, quand l'insecte fléchit fortement la tête vers la face abdominale, ou bien encore lorsque le compresseur la met dans une extension forcée, ce qui du reste a lieu pour toutes les figures. Vers la face abdominale, la tête se dessine de même sur un plan inférieur, et la même disposition donne lieu aux mêmes remarques; notons cependant qu'un pli très-persistant laisse, même dans une forte compression, les traces du point où le tégument quitte le corps pour gagner la tête; il en résulte une sorte de ligne blanchâtre, qu'on pourrait attribuer à la présence d'un organe profond, si l'on ne se mettait en garde contre cette illusion d'optique.

Pour la face dorsale, deux petits poils à peine visibles (pl. 1, fig. 1, *e, e*) marquent l'endroit précis où la tête est réunie au tronc. Notons aussi que la planche 1, fig. 7, montre la position que prend la tête quand elle se rétracte vers le corps.

83. Comme nous l'avons fait pour les autres parties déjà décrites, nous examinerons la tête par sa face d'extension et sa face de flexion, et suivant l'ordre de superposition ou les divers plans qu'offrent les organes. La tête est irrégulièrement ovalaire, et plus large vers sa base que vers son extrémité; le tégument qui la recouvre est lisse et transparent. Quand on l'examine vers sa face d'extension (l'insecte reposant sur sa face abdominale), à une amplification de 500 fois et une compression portée à l'extrême, on aperçoit un premier organe symétriquement constitué (pl. 5, fig. 24, *a*, *a*) par deux parties, lesquelles donnent naissance (*i i*) à une ligne ligamenteuse simulant un arceau et allant se réunir vers la ligne médiane *f*. Cet organe est formé, avons-nous dit, de deux parties symétriques placées à la base de la tête et sur les côtés : une première externe (*a a*), une seconde interne (*c c*). Ces deux branches sont réunies en avant au point *i;* et en arrière, une lame mince confondue avec elle les relie l'une à l'autre, de telle sorte que ce double organe forme un seul tout qu'on pourrait enlever dans son ensemble; il recouvre ainsi les organes profonds qui passent au-dessous de lui, et contribue pour sa part à limiter en arrière la base de la tête. La lamelle d'union se voit en *d;* elle est très-mince, d'apparence cornée et rougeâtre; elle décrit une courbure, de manière à dessiner une concavité qui regarde en arrière. Nous verrons plus loin à quoi sert cette première pièce. Tous les organes qui sont en avant de celui que nous venons de décrire sont sur un plan un peu plus profond, mais, comme rien ne les masque, on les aperçoit facilement en abaissant légèrement le système optique : ce sont les palpes (*m*, *m*) et les mandibules (*n*, *n*). Les palpes se continuent en arrière jusqu'à l'extrémité postérieure de la tête, mais dans ce point, la première pièce à arceau les recouvre. On voit en *k* le palpe droit pénétrer vers un plan plus profond, ce qui laisse entendre qu'il faut observer ces palpes vers la face de flexion pour en avoir une idée nette. Retournons donc le compresseur de manière à mettre en évidence la face inférieure de la tête (pl. 5, fig. 25). Une pièce médiane, en forme

de fer à cheval, frappe surtout l'attention dans cette figure; cette pièce est formée par deux branches latérales (*o*, *o*) qui s'étendent en arrière (*p*) et se terminent en avant par une sorte de tubercule renversé en dehors (*r r*). Cet organe, d'une teinte très-foncée, est beaucoup plus épais que toutes les autres parties solides de la tête; il laisse voir en *p*, au-dessous de lui[1], une petite lamelle arrondie fort importante, sur laquelle nous reviendrons. Les deux organes que nous venons de mentionner aux faces d'extension et de flexion, offrent cela de particulier qu'ils ne s'étendent pas en avant; ils semblent destinés, tout en concourant à d'autres fonctions, à consolider le squelette de la tête vers sa base : notons aussi que la pièce en fer à cheval se prolonge plus loin en arrière; c'est ce qu'il est facile de constater sur les figures 25 et 26, pl. 5. En dehors de cette pièce en fer à cheval et sur un plan plus profond, s'aperçoivent les palpes (pl. 5, fig. 25, *t*, *t*); ils sont larges en arrière, rétrécis en avant, où ils se terminent par un article en forme de pointe acérée et à courbure dirigée en dedans. En dehors de ces premiers palpes, on en voit deux autres moins volumineux, aussi terminés par une partie rétrécie, qui s'effile en pointe très-aiguë; ce sont de faux palpes ou des palpes secondaires qui se confondent en dedans avec les premiers et n'ont que la moitié de leur longueur, ou plutôt qui naissent en *y*, *y* de la tige-mère des palpes principaux : ceux-ci occupent, à droite et à gauche, les régions latérales de la tête; ils sont formés par une branche interne, laquelle vient se perdre en arrière sous l'extrémité antérieure de la pièce en fer à cheval, et d'où semblent naître des appendices dirigés en dedans et en avant (*z*, *z* et *ω*), appendices qui concourent à former le plancher sur lequel reposent les mandibules, ou mieux ce que les auteurs ont appelé la lèvre. La branche externe des palpes fixe les limites de la tête en dehors; on la voit en *y*, puis en *x*, où elle se recourbe en dedans pour aller se confondre en *v* avec la courbure de la pièce en fer à cheval, du moins autant qu'on peut en juger, car il s'en faut qu'il soit facile de

[1] Ou mieux au-dessus de lui, quand l'insecte est sur le dos.

déterminer la part que prennent tous ces organes à former l'ombre épaisse signalée en *c c* (pl. 5, fig. 24). La branche externe des palpes principaux laisse voir sur sa longueur plusieurs points de séparation qui figurent autant d'articles dont elle se compose; ces articles sont difficiles à bien voir, cependant on en compterait quatre ou cinq (pl. 5, fig. 32, ε, ε, δ, δ). Les faux palpes pourraient être considérés comme formés aux dépens d'un article, et remplaceraient ici les crochets dont sont armés les palpes d'un grand nombre d'insectes, et même de beaucoup d'acariens. La branche interne paraît offrir également des traces de division, mais nous renonçons à les figurer, tant il est difficile de faire la part de ce qui appartient à telle ou telle partie dans cette inextricable complication. Avant de quitter la face inférieure de la tête, revenons sur trois pièces transversales qui semblent prendre naissance sur la branche interne des palpes, et qui se dirigent en dedans et en avant (pl. 5, fig. 26, γ, β, ρ). Ces pièces concourent très-efficacement à former le plan profond sur lequel reposent les mandibules; les tissus intérieurs et les téguments qui les tapissent complètent ainsi ce qu'on appelle la lèvre et le menton.

84. En dedans des palpes, sur le même niveau et dans une sorte de rainure qu'ils forment aux dépens de leur branche interne, se trouvent les mandibules. Celles-ci sont appuyées sur la lèvre qui leur sert de plancher et les masque vers la face inférieure de la tête; vers la face supérieure ou d'extension, au contraire, elles sont pour ainsi dire à découvert; c'est pourquoi nous examinerons de nouveau la tête par sa face supérieure, pour bien concevoir la disposition de ces mandibules. Elles s'aperçoivent très-facilement au-dessous et en avant du double organe dont les branches se réunissent en arceau au-dessus d'elles (pl. 5, fig. 24, *n*, *n*, ou mieux encore pl. 5, fig. 27, *a*, *a*). Les mandibules sont en apparence au nombre de deux et placées côte à côte; un petit espace ou sillon qui occupe longitudinalement la partie moyenne de la tête les sépare : elles sont oblongues, arrondies en dehors, presque rectilignes en dedans; de manière qu'on formerait un ovale complet

en les rapprochant par la pensée. Elles présentent vers leur milieu une ligne transversale (pl. 5, fig. 27, *b b*) qui fait légèrement relief sur leur face supérieure : cette ligne mérite de fixer l'attention, attendu qu'elle sert de point d'arrêt aux mandibules quand elles se portent en arrière. Leur extrémité postérieure est bordée d'une doublure d'apparence cornée, d'une teinte plus foncée que les parties antérieures (*d, d,* fig. 27, pl. 5), et qui se termine en dehors par un appendice obtus recourbé en dedans (*e e*). En avant, elles sont divisées dans une très-petite étendue (*i i*) : la division externe est plus longue et se porte sur l'interne ; elle n'est autre chose qu'un onglet qui s'étend ou se fléchit à volonté. La figure 27 le montre fermé, et la figure 28 le représente ouvert (*k k*). Nous avons laissé entendre que les mandibules étaient simples, mais la vérité est qu'elles sont réellement doubles : on peut déjà s'en convaincre en observant avec soin la figure 28, pl. 5, où une seconde mandibule s'aperçoit de chaque côté à travers la transparence de la première. Cette seconde mandibule se voit avec tous ses caractères, si l'on porte le foyer optique vers un plan plus profond, ou mieux si l'on retourne l'*acarus* de façon à placer la face inférieure en dessus : dans cette position, on aura la figure 29, *l, l,* où la lèvre a été omise à dessein. Comme on le voit, ces mandibules secondaires ont la même forme que les premières, si ce n'est qu'elles sont un peu moins longues et terminées, en avant, non pas par un onglet mobile, mais par deux courtes divisions armées de hachures, sorte d'organe de préhension et de trituration. Ces doubles mandibules sont unies par les faces qui se superposent et se meuvent ensemble[1]. Des fibres musculaires nombreuses qui s'insèrent vers leurs extrémités postérieures, et surtout autour de l'appendice corné des mandibules à crochets, les mettent en mouvement (pl. 5, fig. 24, *ω*; et pl. 5, fig. 27, *p*); enfin, rappelons-nous que les arceaux des pièces qui sont tout à fait superficielles

[1] L'*acarus* du mouton ou du cheval, dont nous faisons en ce moment l'entomologie, est également pourvu de mandibules doubles.

à la face supérieure, sont en rapport avec les mandibules à crochets.

Sur le même plan que les mandibules, et derrière elles, on voit un petit corps sphérique, terminé en pointe en avant, et qui occupe l'espace laissé libre entre elles (pl. 5, fig. 24, θ, ou mieux pl. 5, fig. 27, f); ce petit corps est rougeâtre, d'une substance solide; il jouit d'une grande liberté dans les mouvements de rotation qu'il décrit autour d'un axe qui le traverse verticalement; il ne se meut que sous l'impulsion qu'il reçoit des mandibules; son mécanisme est des plus curieux.

85. Tels sont les organes intermédiaires qui se trouvent dans la première moitié antérieure de la tête; mais derrière les mandibules, sous les fibres musculaires, s'en voient d'autres qui sont dignes du plus grand intérêt.

D'abord, c'est un conduit cartilagineux placé longitudinalement sur la ligne moyenne et qu'on voit représenté planche 5, fig. 31, m, ou mieux figure 30, m, parce que dans cette figure il est joint à un organe avec lequel il a des rapports de fonction : nous voulons parler d'une membrane valvulaire, placée à la base de la tête, à l'endroit où elle communique avec le tronc; cette membrane est plutôt une petite languette cornée, si l'on en juge à sa couleur et à sa consistance quand elle entre en jeu. Elle est ronde ou ovalaire, libre en avant (pl. 5, fig. 30, m), et présente en arrière des rapports de contiguïté et peut-être de continuité avec la courbure antérieure de la pièce en fer à cheval, qui est placée au-dessous d'elle. La languette valvulaire est donc libre en avant; sur les côtés et de tous ces bords libres partent des fibres musculaires à peine visibles qui se dirigent en avant; mais les fibres musculaires latérales se perdent à droite et à gauche où elles se rendent aux parties solides, tandis que les fibres les plus antérieures rencontrent, après un court trajet, une sorte de ligament transverse sur lequel elles s'insèrent : ce ligament transverse se rend lui-même sur les côtés, où l'on ne saurait le suivre. En examinant avec soin la figure 30, pl. 5, on apercevra les fibres et le ligament. Rien

n'est plus intéressant que de voir cette languette en mouvement: c'est elle qui règle les fonctions de la déglutition; enfin, tranchons le mot, elle remplit le rôle d'une valvule à l'isthme du gosier. De pareilles assertions auront droit de surprendre et avec raison, car c'est bien loin de ce qu'on avait entrevu sur l'organisation intérieure des acariens. Mais nous ne saurions trop le répéter, ce que nous décrivons nous l'avons vu, bien vu, et nous le démontrerons facilement à quiconque aura de bons yeux et l'habitude du microscope.

86. Telle est l'organisation intérieure de l'appareil céphalique. A l'extérieur, un tégument transparent offre une enveloppe de protection à tant d'organes; et sur ce tégument extérieur on voit des follicules armés de poils, véritables organes de tact qui sont au nombre de six et disposés par paire : deux se voient sur la partie antérieure et supérieure des palpes (pl. 5, fig. 24 et 32); deux autres prennent naissance sur ces mêmes parties, mais à la face inférieure; on les aperçoit se montrant en *y* sur la même même figure. La troisième paire occupe la partie moyenne de la face inférieure (pl. 5, fig. 25, *r, r*).

Nous pouvons, maintenant que nous avons décrit les différents organes que renferme la tête, chercher à les rapporter aux divisions que les entomologistes ont établies dans cet appareil.

On divise généralement la tête des insectes en six paires d'appendices, savoir :

1° La lèvre supérieure ;
2° Les mandibules ;
3° L'épipharynx;
4° L'hypopharynx ;
5° Les mâchoires;
6° La lèvre inférieure.

Non pas que nous prétendions appliquer d'une manière précise à notre *acarus* cette division, qui n'est absolument vraie que pour les insectes placés plus haut dans l'échelle animale. Les entomologistes sauront mieux que nous quel organe appartient à tel ou tel appareil.

1° *Lèvre supérieure.* — Si l'on doit comprendre sous ce nom les parties qui forment le premier plan supérieur de la tête, la lèvre supérieure serait constituée en arrière par la partie rétrécie de la pièce à arceaux qui limite les mouvements des mandibules en arrière (pl. 5, fig. 24, *b, b*); plus en avant, par le rapprochement des palpes; enfin, par la membrane d'enveloppe qui va s'effilant et s'arrondissant de façon à former une ouverture buccale, à travers laquelle passent les mandibules.

2° *Mandibules.* — Les mandibules sont ces quatre organes superposés deux à deux, qui se terminent, les supérieures, par un onglet mobile, les inférieures, par une division en hachures qu'on voit bien planche 5, fig. 29, et qui donnent insertion en arrière à des fibres musculaires nombreuses.

3° *Épipharynx.* Il comprendrait le corpuscule placé entre les mandibules, et qu'elles mettent en mouvement; les branches solides et postérieures de la pièce à arceaux, sous lesquelles passent les fibres musculaires des mandibules.

4° *Hypopharynx.* — Il serait formé par le conduit buccal qui correspond à la partie inférieure et postérieure des mandibules, par la valvule qui règle les mouvements de la déglutition, par la pièce en fer à cheval ou le palpigère (pl. 5, fig. 25, *o, o*); enfin, par la naissance de l'œsophage (pl. 5, fig. 33, *b, b*).

5° *Mâchoires.* — Elles comprendraient les palpes depuis leur naissance au palpigère jusqu'à leur double terminaison en pointe aiguë; le faux palpe (pl. 5, fig. 25, *s, s*) équivaudrait aux antennes des autres insectes.

6° *Lèvre inférieure.* — Elle serait constituée par les parties solides qui partent du bord interne des palpes et forment ainsi un plancher solide à la tête (pl. 5, fig. 25, ω, ω et z, z), en avant, par le rapprochement de l'extrémité des palpes et l'enveloppe que rejoint sur les côtés la lèvre supérieure.

87. Si nous ne nous sommes pas mépris sur les fonctions de la valvule décrite plus haut, elle fait supposer l'existence d'un conduit particulier et propre à recevoir les fluides nourriciers, en un mot,

d'un conduit œsophagien; c'est ce qu'en effet l'observation démontre. Pour bien voir ce canal alimentaire, on placera l'*acarus* sur le dos, la face abdominale regardant l'observateur; on le comprimera légèrement après l'avoir infiltré d'essence de térébenthine, par exemple; dans ces conditions, on apercevra facilement le jeu des mandibules et de la valvule, et si l'on suit plus en arrière les parcelles d'essence qui ont franchi la valvule, on les voit parcourir un trajet donné et pénétrer, après des mouvements de va-et-vient, jusque dans la partie moyenne du corps. Ces parcelles ne sont point disséminées, comme on pourrait le croire, au milieu d'un tissu vasculaire ou celluleux; non, elles sont renfermées dans un conduit bien limité, et c'est en le suivant qu'elles vont se perdre dans la portion abdominale proprement dite.

La planche 5, fig. 34, nous présente ce conduit œsophagien; on le voit naître de chaque côté de la valvule (*b*, *b*, pl. 5, fig. 33), passer sous la courbure de la pièce en fer à cheval (car l'*acarus* est sur le dos), suivre son trajet et se montrer en toute évidence dans l'espace libre compris entre la tête et les branches sternales (*a*, fig. 3), plus loin il pénètre sous la pièce sternale elle-même, la déborde de chaque côté (*c*, *c*, *c*), et va se perdre vers une cavité stomacale qui n'est autre qu'un tissu vésiculeux où la digestion s'élabore. La figure 34 nous représente le conduit œsophagien vu par la face dorsale; il contient des globules, que ses contractions font voyager jusqu'en *e*, où l'on en voit quelques-uns. On distingue facilement les fibres latérales du conduit membraneux (fig. 33); celles qui le limitent en avant et en arrière sont dissimulées par la compression; pour bien les voir, il faut les observer en fonction, alors qu'elles se contractent et font avancer les fluides alimentaires. L'œsophage se trouve à égale distance de la face dorsale et de la face abdominale, il est entouré de tissus mous qui le maintiennent en position; ses fibres paraissent de nature musculaire et légèrement opalines.

88. C'est en vain qu'on cherche à suivre ce conduit œsophagien dans l'abdomen proprement dit; arrivé au point *e* de la figure 34,

ses fibres deviennent tellement ténues qu'il est impossible de les suivre.

Il était d'un grand intérêt de rechercher si l'*acarus scabiei* possédait ou non des organes propres à l'élaboration des fluides nourriciers; ce point d'anatomie a souvent fixé notre attention, et jamais nous n'avons rien distingué qui eût l'apparence d'une cavité stomacale ou intestinale bien circonscrite. Il nous est bien arrivé de rencontrer des vésicules plus ou moins volumineuses et douées de contractions particulières; mais elles n'avaient rien de fixe quant à leur siége, et beaucoup d'*acarus* n'en présentaient pas la moindre trace. Ainsi donc, les humeurs que l'*acarus* absorbe dans nos tissus suivent le conduit œsophagien, et se répandent irrégulièrement au milieu d'un tissu particulier appelé *sarcode,* et dans lequel s'opèrent à la fois l'élaboration des aliments et l'acte de la respiration. Ce tissu sarcodique intérieur est commun à toute la cavité comprise entre l'enveloppe tégumentaire des deux faces dorsales et abdominales, c'est une sorte de parenchyme celluleux, à mailles tellement déliées qu'il est impossible d'en bien saisir la structure entrelacée, et au milieu duquel circulent des vésicules sphériques plus ou moins colorées et des granules généralement noirâtres. Ce parenchyme sarcodique occupe tous les interstices intérieurs de l'insecte, l'intérieur des pattes par exemple; il entoure la pièce sternale et les épimères, en un mot il existe partout, et partout circule dans ses mailles l'humeur limpide qui constitue le fluide nourricier. Nous avons dit qu'il renfermait des vésicules sphériques; il faut ajouter que ces vésicules occupent plus spécialement certaines régions du corps, les régions antérieures, la base des pattes, et une ligne longitudinale qui masque constamment le conduit œsophagien vers la face dorsale. La figure 36, pl. 6, nous donne une idée imparfaite de la réunion de ces vésicules ou globules par groupes irréguliers. Il n'est pas rare de rencontrer vers la partie moyenne du corps, un peu en arrière, à la pièce sternale et aux épimères, une ligne sinueuse dessinant comme une membrane d'enveloppe qui renfermerait des vésicules; cette membrane

paraît recevoir le conduit œsophagien, et la cavité irrégulière qu'elle circonscrit est le siége de contractions particulières qui mettent en mouvement les globules emprisonnés par cette membrane. Ces contractions s'opèrent de droite à gauche, et sous leur influence les globules intérieurs voyagent dans ce même sens; enfin, on dirait une sorte de cavité intérieure, très-irrégulière, douée de fonctions spéciales; et comme elle communique directement avec le canal alimentaire, peut-être pourrait-on voir là une cavité plus spécialement destinée à recevoir le liquide nourricier qu'absorbe l'insecte. Il s'en faut que cette membrane très-diaphane, dont il est impossible de saisir la structure, se montre chez tous les *acarus;* parfois on n'en découvre pas le moindre vestige; c'est donc avec une grande réserve et sans en garantir la véritable existence que nous la mentionnons. La figure 35 *i, i, i*, pl. 6, en donnerait l'image infidèle. Vers la région postérieure du corps, le tissu sarcodique est généralement parsemé de granules miliaires, noirâtres, et, dans certains cas, ces granules sont réunis par groupes réguliers, de manière à faire croire qu'ils sont contenus dans une cavité; c'est ce que semble indiquer la figure 36 *a*. Ces granules sont généralement des produits excrémentitiels, et de leur réunion résulte un amas globuleux, rouge-brun, très-foncé en couleur, qu'on voit distinctement, figure 35, *b*. Ils se rencontrent très-fréquemment dans l'ouverture anale (*c*), ou au milieu du conduit qui lui fait suite (*d*) : bien des auteurs anciens ont pris ces résidus naturels pour des œufs. Ces fèces suivent donc un conduit particulier de *a* en *c* pour être expulsés au dehors. L'existence indubitable d'un canal œsophagien et celle non moins certaine d'un intestin rudimentaire destiné à l'expulsion des fèces, nous font croire qu'on découvrira un jour, à l'aide d'instruments plus perfectionnés, un appareil digestif qui rendra un compte plus satisfaisant des fonctions de la digestion.

89. Tous les organes que nous avons décrits sont mis en mouvement par de nombreuses fibres musculaires dont nous allons maintenant nous occuper. Ainsi les pattes antérieures renferment

à l'intérieur des fibres musculaires longitudinales, qui partent de l'extrémité de la patte à l'endroit même où le tube de l'ambulacre prend naissance, et se rendent, en devenant de plus en plus nombreuses, vers la base de la patte (pl. 5, fig. 18, *e*, *e*, *e*) : quelques-unes s'arrêtent sur les pièces cornées qui forment les articles, mais la plupart suivent la patte dans toute sa longueur, traversent l'anneau et vont se confondre avec d'autres fibres qu'on voit planche 5, fig. 33, *k*, *k*. Les pattes postérieures sont aussi abondamment pourvues de fibres musculaires (pl. 3, fig. 12, *x*, *x*); quoiqu'il soit difficile de dessiner celles qui se trouvent à leur intérieur, elles n'en existent pas moins comme il est facile de le constater quand la patte entre dans ses mouvements alternatifs de flexion et d'extension.

On se rappelle combien les fibres musculaires qui président aux fonctions des mandibule sont nombreuses : outre cet usage, elles ont encore pour action d'exciter les contractions du tissu sarcodique en prenant sur lui leur point d'attache, et, comme il est facile de s'en assurer, elles ne sont pas sans avoir une grande influence sur les mouvements péristaltiques dont ce tissu est le siége. Indépendamment de l'impulsion qu'il reçoit de ces fibres musculaires et de celle des pattes, le tissu sarcodique est encore excité à des contractions énergiques par des plans musculaires qui naissent de la face dorsale et abdominale, et dont on constate la présence sur des *acarus* pleins de vie. C'est sous l'effort harmonique de tous ces muscles que le liquide intérieur circule dans toutes les parties de l'insecte.

Nous avons semblé dire que les épimères étaient libres au milieu du tissu sarcodique, mais c'était de notre part une erreur volontaire. Car il est facile, très-facile de constater, en examinant l'insecte par la face ventrale, qu'ils donnent attache par leurs extrémités postérieures à des fibres blanchâtres (pl. 3, fig. 12, β, β), lesquelles s'épanouissent en arrière pour aller se confondre avec les fibres musculaires qui vont aux pattes postérieures. Ces linéaments blanchâtres, qui se détachent des épimères, sont-ils tendi-

neux? servent-ils à fournir aux épimères une situation fixe, alors qu'ils prêtent un point d'appui aux pattes dans l'acte de la progression? servent-ils à les relier aux pattes postérieures de manière à établir une sorte d'harmonie de fonction entre les extrémités antérieures et les postérieures? C'est possible; mais nous croyons pouvoir assurer que ces linéaments entrent aussi pour leur part dans les contractions des mouvements intestins, attendu qu'ils se perdent entre le tissu sarcodique et l'enveloppe abdominale.

Les organes qui entrent dans la composition de l'appareil de la tête, et qui sont destinés à exercer les plus grands efforts, les palpes par exemple, ont assurément un système musculaire très-puissant : nous n'avons pourtant pu en saisir le moindre vestige; il est vrai de dire que l'agencement si compliqué des pièces de cet appareil explique du reste notre impuissance.

Enfin, quel nom donner à un organe qui a longtemps piqué notre curiosité (pl. 3, fig. 12, μ, μ)? De quelle nature sont ces fibres qui partent du centre du corps et vont s'irradiant vers la cavité abdominale? Sont-elles tendineuses, musculaires, nerveuses? Questions pleines d'intérêt et que nous ne saurions résoudre. Ces fibres naissent bien d'un ganglion ou d'un globule comme sphérique (ν), elles occupent bien une position centrale, elles s'irradient bien vers la périphérie; mais de là à pouvoir assurer qu'elles sont de nature nerveuse, il y a trop loin pour que nous osions nous prononcer; car pour que nous avancions un fait, il nous faut la certitude qu'il ne puisse un jour être mis en doute.

Pour ne rien laisser à décrire de toutes les parties qu'on peut aujourd'hui apercevoir, mentionnons, en terminant l'anatomie de l'*acarus*, deux prolongements de l'enveloppe extérieure, en forme d'appendice pileux qu'on voit entre la tête et la première paire de pattes (pl. 5, fig. 24, π π), appendice qu'on ne découvre bien que par l'action de l'acide sulfurique pur, dont nous ne voyons pas l'importance, et qui suit la patte dans ses divers mouvements.

90. Nous terminerons là tout ce que nous avons à dire sur la structure anatomique de l'*acarus*. On s'étonnera, nous n'en dou-

tons pas, de nous voir borner là notre description, car enfin, cet insecte respire, il se multiplie, et il n'a nullement été question des appareils qui président à ces fonctions. Notre silence doit laisser entendre qu'on ne distingue rien dans l'insecte qui ressemble à des stigmates, à des trachées, et quant aux organes génitaux, la dissertation à laquelle nous nous livrerons dans le chapitre suivant complétera ce qui paraît inachevé, et ne laissera, nous l'espérons du moins, aucune question qui n'ait été discutée et résolue.

CHAPITRE II.

PHYSIOLOGIE DE L'*ACARUS* DE LA GALE DE L'HOMME.

91. Nous aurions pu exposer les fonctions de chaque appareil après l'avoir décrit, et traiter ainsi en même temps de l'anatomie et de la physiologie; mais à part les longueurs et la confusion que cet ordre eût entraînées dans le chapitre précédent, nous n'en aurions pas moins été obligé de faire un article purement physiologique pour des fonctions incontestables dont les appareils nous sont inconnus : c'est pourquoi nous avons préféré traiter séparément des fonctions de l'*acarus* en général. Nous gagnerons à cette division de donner plus d'unité et peut-être plus d'intérêt à notre dissertation. Nous suivrons, autant que possible, dans ce chapitre, l'ordre que nous avons adopté dans la description anatomique. Ainsi nous traiterons successivement et dans autant d'articles séparés :

1° Des fonctions de la locomotion;

2° Des fonctions de la nutrition, qui comprendront la nutrition proprement dite et la respiration;

3° Des fonctions de sécrétion, auxquelles nous rapporterons les métamorphoses et l'expulsion des fèces;

4° Enfin, des fonctions de reproduction ou de la génération : ce qui nous conduira tout naturellement à traiter de l'ovologie ou de l'embryogénie.

ARTICLE PREMIER.

DES FONCTIONS DE LA LOCOMOTION.

92. S'il est vrai, comme on l'a dit avant nous, que l'*acarus* soit comparable à une tortue, ce n'est pas seulement par sa forme extérieure, mais c'est encore par ses allures et la disposition qu'il aime à donner à sa tête et à ses pattes, quand il repose ou sommeille endormi sur sa face abdominale. Comme la tortue, en effet, sa tête et ses pattes sont alors rétractées sous la carapace; on n'en voit que les extrémités : mais qu'une douce température vienne réveiller ses sens engourdis : qu'un corps étranger l'excite ou le tourmente, bientôt il soulèvera son lourd abdomen à l'aide de ses pattes postérieures, et portera plus spécialement par ce mécanisme, en bas et en avant vers la surface où il repose, sa tête et ses pattes antérieures; quand son corps est ainsi soulevé, la face dorsale présente un plan incliné en avant. Mais pour que la progression ait lieu, il faut que l'insecte étende les pattes antérieures, qu'il porte en dedans et en avant l'ambulacre qui les termine, qu'il le fixe en faisant le vide à son intérieur, et opère, sur ce point devenu fixe, une traction qui le portera facilement en avant, attendu que son corps, soulevé par les pattes postérieures, n'a plus à vaincre la résistance du frottement. Dans cette fonction, le point fixe est en avant à l'adhérence des ambulacres; la puissance au milieu, les fibres musculaires des pattes la représentent; et la résistance en arrière, c'est tout le corps. L'ambulacre reste fixé jusqu'à ce que la patte dont il dépend ait développé toute la puissance qu'elle est capable de fournir; mais tout en restant fixe, il se trouve bientôt en dehors et en arrière, attendu que le corps de la patte avance sur lui. Pour faciliter ce mouvement de progression, le tube terminal se courbe suivant toutes les inclinaisons possibles; il se fléchit en tous sens sur la ventouse sans que le point fixe soit pour cela déplacé. Les pattes antérieures jouissent d'ailleurs de mouvements parfaitement isolés, c'est-à-dire que la

flexion et l'extension de l'une d'elles n'entraînent pas nécessairement un mouvement semblable pour les autres.

93. On juge bien de l'usage de chacune des pièces qui entrent dans la composition des pattes, en observant l'insecte sur la face dorsale, car alors rien ne masque leurs mouvements depuis leur base jusqu'à leur extrémité libre. Dans cette position, l'anneau laisse facilement voir sa forme circulaire ainsi que ses mouvements sur un axe fictif qui passerait par son point d'insertion à la branche sternale ou à l'épimère. Qu'on se figure un cercle placé à peu près verticalement dans le repos, tenu dans cette position par un point d'attache situé à l'une des extrémités de son axe transversal, se mouvant de manière à se présenter obliquement, puis horizontalement, et l'on aura une idée des fonctions de l'anneau quand la patte se fléchit ou s'étend. En un mot, de vertical qu'il se trouve quand la patte est étendue, il devient horizontal quand elle se fléchit, en décrivant un quart d'arc de cercle. On voit encore très-bien, par cette face abdominale, comment les deux pièces triangulaires, qui seraient le trochanter et le trochantin des auteurs, sont unies à droite et à gauche, et courbées suivant leur longueur, de manière à former un cercle complet. La ligne qui passerait par le centre des mouvements qu'elles décrivent dans la flexion et l'extension représente, comme pour l'anneau, un arc de cercle à courbure plus ou moins marquée. On découvre avec la même facilité comment la patte peut se prêter à un mouvement d'adduction considérable, grâce à la disposition de ces pièces triangulaires, qui forment un triangle dont le sommet correspond à la face d'adduction, et la base à celle d'abduction. Enfin, il n'est pas moins facile de distinguer comment les autres articles se rapprochent dans la flexion, et s'éloignent l'un de l'autre dans l'extension. Il n'est pas rare de voir le dernier article, celui qui porte le tube de l'ambulacre, se fléchir exclusivement, entraînant avec lui tout l'appendice ambulatoire en dehors et en arrière, sans que le reste de la patte participe à ce mouvement de flexion : ce petit phénomène est bien propre à donner une idée de la puissance

des fibres musculaires qu'on voit se contracter énergiquement à l'intérieur de la patte, à mesure que l'ambulacre se fléchit. Les nombreux poils tronqués qu'on aperçoit à droite et à gauche du tube de l'ambulacre à sa naissance, fournissent à la patte des points d'appui très-efficaces quand elle se fléchit outre mesure.

94. Pendant que les pattes antérieures se meuvent de cette manière, les postérieures ne restent pas inactives; en effet, on les voit se fléchir en avant et disparaître sous la carapace, puis reparaître de nouveau en dehors dans les mouvements d'extension. Lorsque le corps n'est pas trop replet, l'insecte s'appuie sur le dernier article des pattes postérieures, qui sont armées pour cet usage de deux petits tubercules coniques et comme cornés; mais quand l'abdomen est trop volumineux, les longs poils qui terminent les pattes postérieures servent eux-mêmes de point d'appui, et l'abdomen, ainsi fortement soulevé, permet à la tête et aux pattes antérieures de porter sur le plan où l'insecte se traîne.

95. Indépendamment des mouvements qu'il exécute à l'aide de ses huit pattes, l'*acarus* jouit encore de la faculté de se mouvoir sur lui-même : ainsi, il peut tourner la tête à droite et à gauche, l'étendre ou la fléchir, sans que les autres parties entrent pour cela en activité. Il peut de même imprimer à la partie antérieure de son corps des mouvements de latéralité sans que le train postérieur se déplace, et comme nous l'avons déjà dit, la pièce sternale se courbe alors vers son milieu, de telle sorte que sa moitié antérieure suit la direction de la tête, pendant que sa moitié postérieure reste immobile sur la ligne médiane. L'*acarus* est d'autant plus libre dans ses déplacements de côté, que son corps est moins gorgé de liquide : on conçoit facilement qu'un corps qui peut ainsi se prêter à une distension exagerée doit offrir, quand il est presque vide, de profonds sillons résultant d'une surface en excès, attendu que le contenu n'est plus en rapport avec le contenant; c'est pourquoi l'on voit la surface dorsale et la surface abdominale, mais surtout la surface dorsale, sillonnées transversalement de plis profonds quand l'insecte est soumis à un jeûne prolongé; ces plis

sont parfois tellement prononcés, que les petits appendices coniques qui recouvrent la face dorsale changent de direction en suivant le tégument qui se plisse, et de manière à tourner en haut, puis en avant, leur extrémité pointue, qui est ordinairement dirigée en arrière. L'*acarus* prend quelquefois un tel volume, que sa panse devient pour lui un lourd fardeau qui le fait trébucher au moindre mouvement; dans cet état d'obésité exagérée, il est impropre à creuser son sillon, et se trouve condamné à attendre que la digestion l'ait rendu plus dispos et plus agile pour qu'il se remette à l'œuvre. Il va sans dire que les poils nombreux dont le tégument est parsemé lui viennent en aide pour la progression, en même temps qu'ils sont pour lui des organes de tact.

96. Lorsqu'on retire l'*acarus* de son sillon pendant le jour, on le trouve toujours engourdi et comme insensible; il reste dans cet état si la température est froide, mais si une douce chaleur le réveille de sa torpeur, il étend ses petits membres, se soulève et essaye de reconnaître dans quel lieu inconnu il se trouve; puis bientôt il se met en marche, parcourt les plis de la peau, cherche son ancienne demeure, et s'y blottit dès qu'il l'a trouvée. Ce fait de voir l'*acarus* revenir ainsi à son premier gîte, frappe votre attention; vous l'en retirez de nouveau pour le déposer à quelques centimètres de distance, et ce n'est pas sans intérêt que vous le voyez recommencer ses pérégrinations, jusqu'à ce qu'il ait retrouvé la trace de son sillon, où il se cache comme tout à l'heure. On se demande alors si l'*acarus* ne serait pas doué d'un appareil de vision, dont il est impossible de découvrir le moindre vestige, tant il paraît chercher son terrier; et si, pour se faire une opinion à cet égard, on tend des embuches à l'insecte, si on lui présente une pointe d'aiguille très-acérée qu'on fait jouer devant sa tête, il vient imprudemment se heurter contre elle : enfin, si l'on tente divers autres moyens pour s'assurer s'il a réellement des yeux, on reste bientôt convaincu que, jusqu'à présent, rien ne permet de le supposer. L'*acarus* ne revient cependant pas toujours au sillon d'où on l'a tiré; parfois, il prend une autre route,

fait de longs circuits, et sa marche devient par moments si accélérée, qu'il est difficile de le suivre à l'aide du microscope mobile. A en juger par les longues promenades que nous lui avons vu faire au pas de course, il pourrait de la main parvenir à l'épaule en moins de dix minutes. La grande préoccupation de l'*acarus*, quand il voyage sur la peau, est de trouver un lieu convenable, où il puisse se creuser une nouvelle demeure; pour cela, il suit avec soin les plis de la peau, s'arrête aux moindres aspérités de l'épiderme qui pourraient lui présenter un point facile à attaquer; il tâte surtout la base des poils, dont le follicule tend à soulever l'épiderme, et si l'endroit lui semble propice, il se met à l'œuvre. L'insecte enlevé du sillon, une ou deux heures après que le malade s'est couché, est d'une agilité extrême; il prend sa course sans y être excité : il est manifestement à l'état de veille.

97. Le sarcopte, nous pouvons le dire par anticipation, ne creuse pas indifféremment son sillon sur toutes les régions du corps; non, il a des préférences, et son instinct le sert admirablement dans son choix. C'est ainsi qu'il a une prédilection marquée pour les mains; soixante et dix fois sur cent, à la période d'incubation, c'est uniquement là qu'on le rencontre. Qu'on ne croie pas qu'il se trouve si souvent exclusivement sur les mains parce que c'est par les mains qu'on le gagne : il y a d'autres motifs pour qu'il en soit ainsi. L'*acarus* est un insecte fouisseur, admirablement conformé pour entamer nos tissus et s'en recouvrir. Mais malgré l'heureuse disposition de ses organes, il s'en faut que toutes les régions de notre tégument lui offrent un accès également facile; il y a pour lui, à cet égard, une grande différence entre la peau de la main, des parties génitales, et celle de l'avant-bras, par exemple. La peau de la main, en effet, est très-souple; elle présente des plis nombreux, que recouvre un épiderme pour ainsi dire mobile sur le derme; organisation en rapport avec les fonctions de cette extrémité, et sur laquelle il est inutile d'insister. Ajoutons, de plus, que la circulation capillaire y est très-active, et que l'épiderme forme des étuis à des

papilles abondamment pourvues de suc nutritif, avec lesquelles l'insecte se trouve immédiatement en rapport. L'*acarus* rencontre donc là les conditions les plus propres à lui faciliter le soulèvement de la couche la plus extérieure de la peau : aussi est-ce avec facilité qu'il incise l'épiderme des mains et qu'il le détache afin d'y trouver un abri. A l'avant-bras, au contraire, l'épiderme, très-adhérent au corps muqueux, est fortement étendu sur le derme, et ce n'est généralement qu'après les plus grands efforts que l'acare parvient à y tracer son *cuniculus*. Il lui faut une demi-heure pour qu'il s'enterre complétement à la main, tandis qu'il met une heure et plus à l'avant-bras, et encore est-ce souvent après avoir entrepris plusieurs sillons qu'il abandonne, que, de guerre lasse, il pousse jusqu'au bout cette laborieuse entreprise. Toutefois, un *acarus* que nous avons placé sur notre avant-bras gauche, le 14 février 1846, ayant rencontré entre la base de deux poils une pellicule épidermique toute détachée, s'y est blotti, et en moins de vingt minutes il a disparu sous l'épiderme. Cet *acarus* même ne laisse pas que de nous préoccuper : nous l'avions placé sur l'avant-bras parce que dans ce lieu il était à l'abri de toute atteinte extérieure, en même temps que nous pouvions facilement l'observer. Mais le malin parasite nous a joué un mauvais tour; il paraît que notre avant-bras n'était pas de son goût; cette nuit, à la faveur de notre sommeil, il est allé chercher fortune ailleurs. Quoi qu'il en soit, nous allons nous tenir en éveil, et nous rendrons compte de ce qu'il adviendra. Comme notre intention est de nous donner la gale, nous recommencerons l'expérience, si celle-ci venait à avorter.

98. Quand l'insecte, après bien des tâtonnements, a fait élection d'un lieu propice au décollement de l'épiderme, on le voit se soulever sur les longs poils de ses pattes postérieures, de façon à se placer presque verticalement sur la peau; cette position lui étant plus favorable, à ce qu'il paraît, pour inciser la première pellicule des téguments. Le microscope mobile, qui donne un maximum de grossissement de 70 fois, permet de l'observer quand

il est ainsi à l'œuvre; mais comme il est impossible, à ce degré d'amplification, de bien saisir le jeu des palpes et des mandibules, on ne comprendrait pas pourquoi il reste ainsi immobile, si bientôt on ne voyait sa tête disparaître sous une légère pellicule épidermique qu'il a incisée, puis détachée : il continue ce travail pendant un quart d'heure, et quand la tête et les pattes antérieures sont déjà recouvertes, il se retire, et l'on croit qu'il va aller chercher ailleurs un lieu plus favorable. Il n'en est pourtant rien; cette manœuvre est calculée et nécessaire : aussi le voit-on tourner son train postérieur à droite ou à gauche, se soulever comme tout à l'heure sur ses longues pattes, et entamer l'épiderme au point précis où la pellicule, qui est déjà détachée, adhère au corps muqueux. On ne sait trop d'abord dans quel but il vient ainsi soulever l'épiderme plus en dehors, mais l'on s'en rend bientôt compte; en effet, la portion d'épiderme qui a été détachée directement devant l'*acarus*, et qui recouvrait sa tête, serait insuffisante pour donner passage à son pseudo-thorax, dont le volume devient tout à coup très-considérable; aussi l'*acarus* est-il obligé d'élargir la voie déjà frayée, et ce n'est que quand il est certain qu'il pourra entrer de front dans cette large ouverture, qu'il y pénètre pour n'en plus sortir. A partir de ce moment, on le voit détacher l'épiderme sans trop de peine et porter sa tête de droite à gauche, en décrivant une courbe à convexité antérieure. Ces premières difficultés surmontées, l'insecte avance rapidement, car alors il peut user de tous les organes dont il est pourvu pour se frayer une voie souterraine. Les appendices pileux et cornés que nous avons signalés à la face dorsale et sur les côtés, entrent en action et lui fournissent des points d'appui très-efficaces. Tous ces organes, en effet, si bien disposés quant à leur forme et leur longueur, se fixent dans la paroi interne de l'épiderme détaché, se couchent sur le dos de l'insecte quand il avance, pour se hérisser, lorsque son train postérieur tend à se porter en arrière. Sous l'influence de tous ces efforts, l'*acarus* est bientôt complétement caché, et c'est seulement alors qu'il se repose de ses

longues fatigues. Les appendices cornés que l'*acarus* de l'homme porte sur sa face dorsale ont une extrême importance : lui seul, parmi tous les *acarus* connus aujourd'hui, en est pourvu, parce qu'il est également le seul qui soit destiné à vivre dans un sillon.

Nous avons parlé de l'action des palpes et de celle de tous les organes propres à faciliter l'introduction du sarcopte sous l'épiderme, sans dire quelle part les mandibules prennent à cette fonction : c'est une lacune qu'il importe de combler. On se rappelle la structure des mandibules (84), leur forme, leur position : quand une fois l'épiderme est incisé, elles entrent en jeu, et ce sont elles qui le détachent du corps muqueux. Pour cela, elles se portent en avant, et au delà de la pointe acérée des palpes, par des mouvements alternatifs de va-et-vient; et comme leur extrémité antérieure est obtuse, elle frappe sur les adhérences qui s'opposent à la marche de l'insecte; elles font, en un mot, fonction de fouloirs. L'impulsion qui les pousse en avant, et qui vient des fibres musculaires, est des plus énergiques, et si, grâce à une petite bordure transversale qu'elles portent sur leur face supérieure, elles ne venaient s'arrêter sur les arceaux des pièces latérales (83), elles seraient entraînées en arrière bien au delà du point qu'elles ne doivent pas dépasser. L'inspection au microscope permet de constater que l'onglet des mandibules supérieures concourt peut-être pour sa part au décollement de l'épiderme, attendu qu'il se redresse avec force chaque fois qu'une mandibule devient libre au-devant des palpes. Le petit organe qui sépare les mandibules en arrière, et qui fait fonction de poulie quand elles s'avancent ou se retirent, entre aussi en action dans cette circonstance. Nous aurons d'ailleurs occasion de revenir sur cette importante fonction des mandibules.

Les sillons des femelles, à la période de l'accouplement, ainsi que ceux des mâles, sont à peine visibles à l'œil; nous doutons même que le mâle fasse des sillons proprement dits : tout porte à croire qu'il se contente de chercher un abri momentané sous l'épiderme pendant vingt-quatre ou quarante-huit heures.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur le sillon, puisque nous serons obligé d'en parler avec détail quand nous traiterons de la gale proprement dite : et comme les palpes et les mandibules ont surtout pour action de concourir aux fonctions de la nutrition, nous compléterons ce qu'il nous reste à dire sur leurs usages, dans le deuxième article, qui suit.

ARTICLE II.

DES FONCTIONS DE LA NUTRITION.

99. L'*acarus* puise à deux sources pour entretenir sa vie; il trouve sur nos tissus des liquides essentiellement nutritifs, et dans l'atmosphère les éléments constitutifs de l'air nécessaires à tout être vivant.

Un *acarus* privé de l'une de ces deux conditions essentielles ne saurait vivre longtemps; et encore ne pourraient-elles satisfaire toutes deux aux besoins de sa vitalité, s'il n'en réunissait une troisième non moins indispensable : nous voulons parler d'une température convenable. Ainsi il ne peut se nourrir et respirer qu'au milieu d'un air ambiant de 25 à 35° centigrades; au-dessous, à 10°, par exemple, il meurt au bout de quelques heures. En hiver, si nous le laissions par mégarde hors de notre étuve, il succombait au bout de peu de temps, tandis qu'en été, il vivait sur notre bureau pendant deux jours et plus. Le besoin le plus impérieux pour l'*acarus*, quand il a été extrait de son sillon, est donc de se garantir du froid et de s'enfouir au plus vite sous l'épiderme, et comme il trouve sur nos téguments tout ce qui est nécessaire à son existence, c'est-à-dire des sucs liquides, déjà élaborés et d'une facile digestion, de l'air qui revivifie son *sang*, il y resterait plusieurs semaines sans changer de lieu, comme cela arrive à la femelle lors de la ponte. Mais absorber nos humeurs, soulever l'épiderme, aspirer les principes nutritifs que l'exhalation cutanée pourrait lui fournir ne suffit pas à notre insecte : ses besoins sont d'un ordre plus élevé; il lui faut une proie luxuriante sur laquelle il puisse se

repaître et assouvir ses petits instincts carnassiers; ses palpes et surtout ses mandibules sont admirablement conformés pour cela. On le comprendra facilement, si l'on se rappelle l'onglet des mandibules supérieures et la pince à dentelures des mandibules inférieures. Quand l'*acarus* se sent pressé par la faim, il plonge l'onglet dans nos tissus, il les ponctionne, les pince, les malaxe, en fait sortir les liquides qu'ils contiennent, les corpuscules du sang; de telle sorte que ceux-ci affluent abondamment et deviennent ainsi d'une absorption facile. Tous les soirs, généralement à la période de la ponte, il quitte la place qu'il a occupée le jour et prolonge son sillon, après avoir eu toutefois la précaution de perforer l'épiderme au-dessus de lui; il fait ainsi une petite ouverture qui marque ses stations, et pourrait servir à calculer approximativement depuis combien de jours il habite le même *cuniculus*. Cette petite ouverture faite à l'épiderme semble avoir pour usage de donner à l'air un accès facile, tout en préparant aux jeunes *acarus* qui viendront à naître une voie de sortie toute frayée. Quand l'insecte veut pousser son sillon plus avant, les palpes principaux et les faux palpes s'écartent; leurs extrémités cornées, si acérées, s'enfoncent dans le tissu adhérent, puis elles se rapprochent vers la ligne médiane; par ce mécanisme, tout le tissu compris dans l'écartement des palpes cède sous leurs efforts, et, les mandibules soulevant l'épiderme, une place nouvelle est bientôt fouillée. Les palpes, avec leurs différents articles et leur extrémité postérieure si large et si forte, sont, du reste, merveilleusement conformés pour cet usage; la pièce en fer à cheval avec laquelle ils ont des rapports de fonction, semble produire l'effet d'un ressort qui se tendrait quand ils s'écartent, et reviendrait ensuite sur lui quand ils se rapprochent. Mais une fois l'épiderme détaché, l'insecte n'aurait pu le soulever qu'à la condition de faire de l'extrémité de sa tête une espèce de boutoir, si, comme nous l'avons déjà vu, la nature ne l'avait pourvu d'organes propres à remplir cette fonction. Ces organes sont les mandibules, dont les fibres musculaires entrent en contraction, de manière à leur imprimer un mouvement alter-

natif de va-et-vient; et comme l'espace laissé libre entre l'extrémité des palpes ne pourrait contenir les deux mandibules à la fois, quand l'une s'avance, l'autre se retire et lui fait place. Ce mouvement des mandibules est fréquent, et à en juger par leur vitesse, elles doivent imprimer un choc d'une grande puissance relative : il faut bien qu'il en soit ainsi, pour qu'un insecte d'un tel volume puisse briser les adhérences qui unissent l'épiderme au corps muqueux. Rien n'est plus curieux que de voir les mandibules en fonction, car bientôt l'organisation révèle des détails vraiment bien remarquables : ainsi leurs fibres musculaires, qui naissent sur une grande étendue vers la face dorsale, se réunissent et se pressent en se dirigeant vers la base de la tête, où elles franchissent un étroit passage, avant d'aller s'épanouir sur les mandibules elles-mêmes. Quel effet doit-il résulter du point d'appui ou du frottement que les fibres musculaires reçoivent en franchissant ce passage rétréci? Chacun le devine : l'avantage de détruire leur parallélisme, de leur fournir un point d'appui qui double leur puissance, mais aussi une tendance à porter, à droite, la mandibule du côté gauche; et à gauche, la mandibule droite; disposition essentiellement nuisible à leur fonction, si la nature n'avait su faire tout pour le mieux. En effet, on n'a pas oublié le petit corpuscule corné qui sépare les mandibules en arrière, et qui remplit le rôle d'une petite poulie sur laquelle elles frottent dans leurs mouvements. Eh bien! comme ce petit corpuscule est fixe, il s'oppose à ce que les mandibules se rapprochent, et qui plus est, il leur vient en aide en tournant toujours sur son axe vertical, dans le sens même où la mandibule est entraînée.

100. Nous avons expliqué par quel mécanisme l'insecte de la gale pénétrait sous l'épiderme, et comment il faisait affluer vers son rostre les liquides propres à le nourrir. Lorsque ces liquides baignent ses mandibules, il les absorbe par une sorte de succion, les fait pénétrer dans son conduit alimentaire placé entre les mandibules qui sont en dessus, et la lèvre qui est en dessous; conduit contractile (84), qui chasserait ces liquides absorbés vers la base

de la tête et même jusque dans l'intérieur du tronc, s'il n'y avait un obstacle à franchir sur ce trajet. Cet obstacle, placé vers l'arrière-cavité buccale, est constitué par une valvule (85) qui règle les mouvements de la déglutition, et s'abaisse pour livrer passage aux matières alimentaires. Le jeu de cette valvule est très-intéressant à observer. Si l'on inonde l'insecte d'eau tiède ou de sérum, on la voit s'abaisser ou se relever d'une manière régulière, et donner passage à quelques globulins qu'on suit distinctement depuis leur entrée à l'ouverture buccale, jusqu'à leur introduction dans la cavité abdominale. Mais si c'est un liquide toxique qui tend à pénétrer l'*acarus*, on voit celui-ci se crisper sur lui-même, rétracter fortement sa tête, clore avec soin toutes les ouvertures perméables qui laisseraient au poison une introduction facile; puis les mandibules entrer en mouvement, et chasser, par d'énergiques contractions, le fluide qui menace sa vie; la valvule reste dans une contraction fixe, volontaire et instinctive, et ferme ainsi hermétiquement l'ouverture du canal œsophagien. Mais, quoi qu'il fasse, l'*acarus* ne saurait s'opposer longtemps à l'absorption de ce breuvage empoisonné qui l'envahit par tous ses pores; déjà ses forces l'abandonnent, le jeu des mandibules se ralentit, et la valvule, obéissant à cet état général d'affaissement, se baisse et se relève jusqu'à ce qu'enfin la vie s'éteigne complétement. Notons à ce propos, que la tête et les pattes ne donnent plus depuis longtemps aucun signe de vie, qu'on voit encore le tissu sarcodique, animé de ses mouvements intestins, entretenir une active circulation. La vie organique est donc chez notre insecte, comme chez les animaux d'un ordre supérieur, la dernière à s'éteindre.

En observant la valvule en mouvement du côté de la face abdominale, on constate facilement qu'elle est obliquement placée dans cette situation anormale au-dessus des mandibules, de façon à offrir un plan incliné en arrière. Lorsqu'elle donne passage aux humeurs, son bord antérieur s'affaisse, et elle tend à devenir horizontale pour reprendre bientôt sa place primitive. Pendant ce dépla-

cement, son bord postérieur reste fixe vers la courbure de la pièce en fer à cheval qui est en dessous, et avec laquelle on le dirait uni par des fibres ligamenteuses.

101. Au delà de la valvule, vers sa face supérieure qui regarde en haut et en arrière, naissent les fibres du tube œsophagien (87) : ces fibres sont continuées vers la face dorsale et sur les côtés, tandis qu'elles laissent une petite ouverture vers la face ventrale, un peu en arrière de la pièce en fer à cheval. En un mot, le tube œsophagien présenterait un canal complétement fermé, s'il n'avait une petite ouverture sur sa paroi inférieure, au moment où il va franchir l'espace laissé libre entre la tête et les branches de la pièce sternale. Cette petite ouverture est disposée dans le sens le plus favorable à sa déhiscence, c'est-à-dire transversalement, par rapport aux fibres musculaires de l'œsophage; elle a pour fonction spéciale de donner passage à l'air, et comme elle se ferme complétement quand l'œsophage contient des liquides alimentaires, celui-ci offre alors un canal complet. Nous n'avons pas donné le dessin de cette petite ouverture, par laquelle s'opère l'acte de la respiration, attendu qu'on ne peut la distinguer que quand l'*acarus* respire au milieu de l'air ambiant, et sans être comprimé, ou mieux quand elle fonctionne, car à l'état de repos on ne saurait en découvrir le moindre vestige à travers les tissus qui l'enveloppent. D'ailleurs, nous allons décrire avec soin les faits qui démontrent son existence, et cela avec d'autant plus de raison, que les fonctions digestive et respiratoire vont tout à l'heure devenir communes, le conduit œsophagien étant commun à l'une et à l'autre.

102. La question de savoir comment l'*acarus* respirait, et à l'aide de quel organe cette fonction s'exécutait, nous a longtemps préoccupé; car jamais, dans nos recherches, nous n'avions découvert la moindre trace de trachées, ou d'ouvertures exclusivement destinées à donner passage à l'air : ce fait négatif nous surprenait d'autant plus que plusieurs entomologistes ont mentionné, chez les acariens, des stigmates propres à la respiration.

Comment des acares si voisins de notre *acarus scabiei* présenteraient-ils l'appareil respiratoire ordinaire aux insectes, lorsque celui-ci en est dépourvu? Il y avait là, nous l'avouons, quelque chose qui nous semblait difficile à accorder. Nous ne sommes pas entomologiste, mais nous soupçonnons, en y mettant toute la réserve commandée par notre position de profane, qu'on s'est trop hâté de conclure, et qu'on s'est mépris en voulant fonder les caractères d'une classification sur des dispositions anatomiques tirées de la structure d'organes qui ne sont indispensables à la vie que d'une manière éloignée, tels que les palpes, les mandibules, les articles des pattes, etc. etc. Les appareils fonctionnels de la vie végétative fourniraient peut-être des caractères immuables, essentiels, appartenant incontestablement à tous les individus d'une même famille.

Il nous est bien permis d'en appeler à des études plus sérieuses quand nous voyons ce que l'on sait des acariens, en comparaison de ce qu'il reste à en découvrir. Revenons à la fonction de la respiration.

Pour bien concevoir le mécanisme de la respiration, il faut choisir un *acarus* plein de vie, aussi transparent que possible, et le placer entre les lames du compresseur, en dirigeant la face abdominale de l'insecte vers l'observateur, et de façon à le tenir en place sous une compression ménagée. On l'examinera à un grossissement de 400 fois environ, en ayant soin de fixer son attention vers la base de la tête, vers l'espace qui la sépare des branches de la pièce sternale : le foyer optique portera sur un point intermédiaire à la face dorsale et à la face ventrale, et on l'éclairera à l'aide d'une lampe. Quand les choses seront ainsi disposées, on verra une bulle bleuâtre, très-ombrée vers ses bords, mieux éclairée vers son centre, franchir de temps à autre cet espace libre intermédiaire à la tête et aux branches sternales, et bientôt, avec quelque attention, on constatera que cette bulle pénètre par l'ouverture buccale, suit un trajet direct, passe *sous la valvule et ses annexes*, et vient enfin se perdre vers l'espace libre dont nous

avons parlé. Quand l'observateur a plusieurs fois suivi le trajet de cette bulle, il s'arrête naturellement sur les détails du mécanisme qui la met en mouvement, et bientôt il remarque avec intérêt qu'elle pénètre dans la bouche au-dessous des mandibules, entre celles-ci et la lèvre, qu'elle ne suit pas le conduit buccal alimentaire qui communique avec la valvule, mais un canal isolé tout à fait en rapport avec le tégument qui tapisse la face de flexion de la tête. Il voit de plus, qu'arrivée au niveau de la valvule, cette bulle, comprimée sur elle-même, est soumise à des mouvements alternatifs de va-et-vient qui la portent en avant et en arrière; il constate enfin que c'est une bulle d'air. A mesure que les contractions se multiplient, la bulle pénètre plus profondément, et si une autre bulle, introduite auparavant, se trouve plus en arrière et plus séparée de la bulle nouvellement entrée, on voit ces deux bulles se confondre, non-seulement sous l'effort des contractions du conduit respiratoire qui les renferme, mais aussi sous l'influence de cette attraction réciproque qui opère si facilement, sous le microscope, la fusion des bulles d'air entre elles. Le séjour prolongé de l'air dans ce tube, et les déplacements qu'il éprouve, ont sans doute pour but de le mettre en équilibre de température et de le préparer à la décomposition qu'il va subir, car de temps à autre on voit la petite ouverture œsophagienne devenir béante, et sous l'influence de contractions harmoniques avec celles qui font refluer l'air en arrière, livrer à celui-ci un libre passage dans l'œsophage. Ce curieux phénomène se répète plusieurs fois dans une minute, et toujours dans le même ordre fonctionnel. L'absorption de l'air par l'ouverture buccale n'est pas continue, le volume de la bulle d'air absorbée paraît régler la fréquence de l'introduction d'une quantité d'air nouvelle. Il s'en faut de même qu'il y ait un rapport proportionnel entre l'air qui pénètre par l'ouverture buccale, et celui qui franchit l'ouverture œsophagienne; plusieurs mouvements de déglutition sont généralement nécessaires pour l'absorption complète et définitive d'une quantité d'air absorbée d'un seul coup par la bouche. Lorsque l'ouverture

œsophagienne (sorte de glotte) ouvre passage à l'air, il s'y précipite en abondance; mais bientôt les bords de l'ouverture se rapprochent et s'opposent à son introduction complète.

Nous avons également constaté que les *acarus* du cheval, du mouton, de la farine et du fromage respirent par la bouche.

103. Nous pensons avoir expliqué clairement le mécanisme de l'acte de la respiration, nous allons maintenant suivre l'air dans le canal œsophagien. Le fluide qui a pénétré dans l'œsophage s'y accumule sous la forme d'une bulle oblongue et volumineuse qui occupe quelquefois jusqu'à la moitié de sa longueur, et comme ce canal est animé de mouvements intestins très-remarquables, l'air est soumis à un déplacement continu qui le pousse insensiblement vers la cavité digestive et respiratoire proprement dite. L'œsophage, comme on le juge facilement aux contractions énergiques des fibres musculaires qui composent ses parois, est des mieux constitués pour remplir cette fonction. Ces contractions rétrécissent dans certains endroits son calibre, et l'augmentent dans certains autres, de telle sorte que l'air est soumis à une sorte de flux et de reflux qui le comprime et le mélange. Au premier abord, ces contractions paraissent irrégulières, mais si l'on observe avec soin leurs successions répétées, on reconnaît, non sans étonnement, qu'elles sont isochrones et qu'elles simulent des mouvements de systole et de diastole très-réguliers : la surprise augmente encore si l'on vient à les compter, car on constate qu'il y a le plus souvent seize mouvements de systole et de diastole par minute. Dans ces déplacements successifs, l'air atmosphérique pénètre jusqu'à la cavité abdominale, où il se mélange avec des bulles d'air déjà en partie assimilées, puis revient de nouveau en avant; de telle sorte que l'air subit dans l'œsophage un premier travail d'assimilation, et ce n'est que quand il a été modifié dans sa composition élémentaire qu'il pénètre enfin dans le tissu sarcodique, où il va se dissoudre. Une fois répandu dans le parenchyme intérieur, qui constitue le sarcode, l'air entre dans la circulation générale, et il est souvent possible de suivre la dissolution insensible de ses

bulles au milieu d'un tissu comme vésiculeux. On assiste, pour ainsi dire, à l'acte de la respiration.

Les bulles d'air ainsi introduites ne se rendent pas indifféremment dans toutes les régions de l'abdomen : toute la partie postérieure de cette cavité est plus spécialement destinée à l'élaboration des liquides alimentaires, tandis que les régions antérieures paraissent être le siége de l'assimilation de l'air atmosphérique. Les grands centres de la respiration se voient surtout en avant; ainsi la planche 6, fig. 36, représente en *a a* un groupe de vésicules assez bien imité, qui communique en arrière avec le tissu sarcodique général, tandis qu'il se porte en avant presque exclusivement à la deuxième paire de pattes antérieures; il en est de même d'un autre groupe situé plus en dedans, en *b b*, et qui fournit à la première paire de pattes. Ces centres circulatoires sont en communication directe avec des vésicules de même nature qui remplissent la cavité intérieure des pattes auxquelles ils correspondent. Vers la face dorsale, on voit généralement une réunion de vésicules se dessiner au-dessus de l'œsophage et le masquer dans toute sa longueur. La planche 5, fig. 34, *d*, nous représente un *acarus* qui, par exception, n'avait qu'un très-petit nombre de vésicules accumulées dans ce sens : aussi l'avons-nous dessiné pour bien montrer l'existence de l'œsophage. D'autres centres de circulation respiratoire existent vers les parties postérieures, mais ils sont moins dévéloppés que ceux qui occupent les parties thoraciques. Tous ces groupes de vésicules sont agités d'un mouvement continu de va-et-vient, qui s'opère de droite à gauche, et réciproquement; et dans ce mouvement elles se déplacent, se mélangent, disparaissent, et sont remplacées par des vésicules nouvelles. Les contractions qui opèrent ce déplacement général représentent assez bien les mouvements intestinaux, péristaltiques et anti-péristaltiques : le corps entier de l'insecte y participe. Très-étendues et très-énergiques au centre de l'abdomen, ces contractions vont s'affaiblissant vers la périphérie, où on les aperçoit avec peine, surtout en arrière. Les vésicules qui circulent au milieu du

tissu sarcodique sont globuleuses, dépressibles; leur volume varie avec la quantité d'air introduite; on dirait une bulle d'air divisée à l'infini et en partie dissoute au milieu d'un liquide où elle a perdu ses qualités optiques, tout en conservant certaines propriétés essentielles à l'air atmosphérique, telle que la compressibilité. L'extrémité abdominale de l'œsophage est un grand centre de circulation, et les vésicules qui s'y forment sont toujours plus volumineuses; elles deviennent plus petites à mesure qu'elles pénètrent vers des régions plus éloignées du centre.

104. Tout ce que nous venons de dire du mécanisme de la respiration est, à peu de chose près, applicable à la digestion : en effet, quand les liquides ont franchi la valvule qui règle les temps de la déglutition, ils se répandent dans l'œsophage, où ils circulent sous l'influence de ses contractions, comme cela a eu lieu pour l'air atmosphérique, et sont ainsi conduits dans le tissu sarcodique, qui occupe plus spécialement la région abdominale. Lorsque le liquide ainsi absorbé est composé de lymphe sans mélange de globules, on le voit se perdre au milieu des fluides déjà en circulation, et l'on ne saurait dire ce qu'il devient; mais quelquefois on aperçoit dans l'humeur que charrie l'œsophage des corpuscules blancs et rouges de notre sang, de telle sorte qu'on peut les suivre quelque temps après leur entrée dans la circulation générale. Ces petits globules ne sont pas entraînés dans les grands centres circulatoires avec la même rapidité que les bulles d'air, ils séjournent quelquefois des heures entières vers la terminaison de l'œsophage, et ce n'est qu'après avoir été longtemps en contact avec le fluide *sanguin* qu'ils finissent par aller se perdre dans les centres circulatoires antérieurs proprement dits. Ces détails sembleraient laisser entendre que le tissu sarcodique est un vaste réseau où l'air atmosphérique et les humeurs alimentaires se mélangent sans distinction de temps et de lieu; il n'en est pourtant pas tout à fait ainsi : nous avons dit en effet qu'on voyait assez souvent (88) une sorte de membrane faire suite aux fibres de l'œsophage, s'étendre à droite et à gauche en décrivant une courbe

à convexité antérieure; membrane qui semblait contenir des liquides, les isoler des grands centres de la circulation placés plus en avant et plus inférieurement, et donner l'idée d'une cavité plus spécialement destinée à contenir les liquides nutritifs avant qu'ils fussent dispersés dans la circulation générale. Il serait peut-être permis de soupçonner dans la disposition de cette membrane une sorte de cavité intestinale, mais tout cela est si fugitif qu'il serait téméraire de trancher cette question d'une manière précise.

105. L'*acarus* semble avoir des heures déterminées pendant lesquelles il se nourrit de préférence; ainsi, au dire des malades, c'est de dix heures à minuit qu'il les tourmente d'une manière plus précise. Nous savons à l'aide de quels organes il aspire nos humeurs, et par quel mécanisme il peut irriter les papilles nerveuses qui surmontent le derme. Ce n'est que quand il est gorgé qu'il reste immobile et qu'il digère, et généralement il est tellement repu, qu'il peut facilement rester vingt-quatre heures sans que la faim l'excite à prolonger son sillon et à tourmenter sa proie. Si l'*acarus* assouvit sa faim de préférence pendant les premières heures de notre sommeil, ce n'est pas qu'il y soit excité par une nécessité de ses besoins physiologiques : les habitudes du malade règlent seules à cet égard celles de l'insecte. Aussi certains ouvriers, les vidangeurs et les chiffonniers, par exemple, qui sont obligés, par la nature de leurs travaux, à prendre du repos et du sommeil pendant le jour, n'éprouvent-ils aucune démangeaison tant qu'ils sont en activité; mais dès qu'ils se couchent, serait-ce à midi, ils ressentent les mêmes tourments que les autres malades à minuit. Il est facile de se rendre compte de ces changements d'habitude auxquels l'*acarus* se prête avec facilité. Pour qu'il se nourrisse, qu'il laboure nos tissus, il faut qu'une douce température donne à ses membres toute leur agilité, et que les parties où il siége de préférence soient en repos. Où trouvera-t-il toutes ces conditions réunies, si ce n'est quand le corps, chaudement étendu, se livre à un sommeil qui engourdit sa sensibilité? Nous ne nous

étendrons pas davantage sur ce sujet : nous aurons à y revenir quand nous traiterons de la pathologie.

106. Nous avons vu comment l'*acarus* se nourrit, comment il digère. Mais toute fonction d'absorption entraîne de toute nécessité une fonction de sécrétion; et si l'insecte absorbe des aliments, ce qu'ils contiennent d'inassimilable doit être rejeté au dehors : c'est en effet ce qui a lieu. Cette fonction excrémentitielle aurait pu être traitée dans le même article que la digestion, attendu qu'elle en dépend : nous préférons l'isoler, dès que nous sommes forcé d'admettre une fonction de sécrétion pour les métamorphoses.

ARTICLE III.

FONCTION DES SÉCRÉTIONS.

107. Nous avons noté, dans la première partie (88), que la région postérieure du corps de l'*acarus* présentait parfois une accumulation de granules noirâtres irrégulièrement disséminés dans le tissu sarcodique : ces granules ne sont autre chose que des parties alimentaires inassimilables, et peut-être des produits nouveaux de sécrétion destinés à être expulsés au dehors. Mais avant d'être rejetés, ces granules se réunissent de manière à former un corpuscule noirâtre, ovale ou sphérique, qu'on aperçoit souvent distinctement vers la région anale, dans des positions qui n'ont rien de fixe. Souvent aussi, ces sortes de bols excrémentitiels sont surpris au milieu d'un conduit particulier qui tient lieu d'un véritable rectum, ou bien encore ils sont réunis au nombre de trois ou de quatre au pourtour de l'ouverture anale elle-même, où ils adhèrent à des poils qui bordent cette ouverture. Ce conduit particulier est manifestement membraneux, et constitué par des fibres musculaires susceptibles de se contracter sur le bol fécal et de l'expulser. La planche 6, fig. 35, montre ce conduit d'une manière évidente. L'extrémité de ce rudiment de canal intestinal est quelquefois si dilatée et tellement béante, qu'on croirait qu'elle a livré passage à des corps bien plus volumineux que ceux formés par les

fèces, à des œufs, par exemple; mais cette hypothèse n'a jamais pu se traduire en fait, attendu qu'il nous a toujours été impossible de constater *de visu* par quelle voie les œufs sont pondus.

108. Occupons-nous maintenant de la fonction de sécrétion la plus importante pour l'*acarus*, de celle qui a pour but la reproduction d'une enveloppe nouvelle. Il est soumis, comme beaucoup d'insectes d'un ordre supérieur, à un dépouillement périodique, à une véritable mue quand s'opèrent les métamorphoses, sans que nous puissions dire pourtant quelle est la fréquence et l'époque précise de ces métamorphoses. Les premiers indices qui indiquent d'une manière certaine un dépouillement prochain, sont une irrégularité dans les contours des pièces solides intérieures, tels que la pièce sternale, les épimères, les articles des pattes, les palpes, etc. etc. un plus grand épaississement des contours de ces organes, une plus grande difficulté pour fixer le foyer optique sur un point déterminé de structure intérieure, enfin l'existence de pénombres inhérentes aux parties elles-mêmes, et qu'on attribuerait à l'imperfection des lentilles, si l'on ne savait expliquer cet effet. Il y a dans l'aspect général un empâtement qui s'oppose à une observation nette, tous les organes intérieurs sont comme recouverts d'une couche plastique; on voit bien qu'ils tendent à s'emboîter dans des organes sécrétés sur eux comme sur un moule. Lorsque la sécrétion a acquis plus de densité, toutes les parties solides prennent la teinte rougeâtre qui doit leur appartenir, et bientôt on a deux *acarus* emboîtés l'un dans l'autre. A cet état, l'insecte est soumis à un jeûne prolongé, il reste plusieurs jours immobile, à l'extrémité de son terrier; il maigrit, et souvent on le croirait desséché et privé de vie : il n'en est rien; ce sommeil léthargique ne sera pas de longue durée. Peu à peu, à l'aide des mouvements intérieurs, et sans doute aussi par l'effet de la sécheresse qui existe à la paroi interne de l'ancienne enveloppe, celle-ci se sépare du tégument de nouvelle formation, et bientôt, comme il est facile de le constater sur les contours du corps, il y a un espace libre entre les deux enveloppes. Quand les choses

en sont à ce point, le dépouillement est facile à opérer; pour cela, le test, qui est devenu une enveloppe inutile, se fend verticalement au milieu de la face ventrale, vers l'extrémité des épimères; et l'*acarus*, à l'aide de mouvements énergiques, tire ses pattes des étuis qui les renferment. Celles-ci lui servent ensuite pour dépouiller sa tête, qu'il retire comme d'un capuchon. Le même effet se produit pour les pattes postérieures, et quand le reste du corps s'est débarrassé des lambeaux qui le recouvrent encore, l'*acarus* apparaît petit, chétif, amaigri, mais très-agile. Que fait-il alors, quand il se dépouille, non sous notre microscope, mais dans son sillon? c'est ce qu'il serait difficile de dire; peut-être perce-t-il l'épiderme qui le retient prisonnier, et va-t-il s'enfouir dans un autre lieu : ce qui le ferait supposer, c'est que nous avons quelquefois trouvé, à l'extrémité des sillons abandonnés, des débris tégumentaires. Un jour, au début de nos recherches, nous observions un *acarus* qui nous semblait contenir dans son intérieur un *acarus* plus petit, formé à son image; et comme nous ignorions encore que l'*acarus* fût sujet à des métamorphoses, ce phénomène piqua vivement notre curiosité. Nous cherchions à nous rendre compte d'une disposition si nouvelle pour nous, en faisant varier le degré de compression, lorsque nous vîmes l'enveloppe extérieure se déchirer entre les deux pattes situées à gauche de la tête, et livrer passage à tout l'*acarus* qui était contenu intérieurement. La figure 37 de la planche 6 représente ce dépouillement artificiel avec une grande vérité. Voici comment il s'opéra. Sous un premier effort de compression, la tête se retira de son fourreau (*b*), vint se présenter à la déchirure faite entre les deux pattes, traversa ce détroit, s'effila, puis elle reprit le volume qu'elle a en *c* (fig. 37 *bis*). Après la tête, vint la première patte gauche, puis la patte droite, enfin deux autres pattes antérieures dans le même ordre que les précédentes. Ces quatre extrémités se prêtèrent avec facilité à l'étroit passage qu'avait suivi la tête, et comme celle-ci elles s'effilèrent et prirent la forme qu'elles ont en *d*, *d*, *d*, dès qu'elles furent libres. Parvenue à ce point,

cette métamorphose s'arrêta; il fallut une compression plus forte pour provoquer l'expulsion du corps, qui, une fois devenu libre, vint s'épanouir dans la position qu'il offre planche 6, fig. 37 *bis*. Nous avons observé plus de mille *acarus* sous le microscope, et cependant ce phénomène ne s'est produit qu'une seule fois : nous le regrettons, parce qu'il nous aurait certainement fait assiter à la régénération de tous les organes intérieurs qui se forment ainsi lentement dans le but de remplacer ceux qui seront bientôt mis hors d'usage; nous regrettons au même titre d'avoir observé ce fait dès le début de nos recherches, car alors nous ignorions complétement l'intéressante organisation de l'*acarus*, et nous ne pouvions tirer aucun profit de cette observation. Remarquons toutefois, autant que ce dessin, fait à un si faible grossissement, peut nous permettre d'en juger, que tous les organes importants de la vie de relation se voient dans l'une et dans l'autre figure, et même jusqu'aux mandibules, de telle sorte que le tissu sarcodique manque seul à l'organisation complète du test vide de la figure 37. La métamorphose qu'éprouvait cet insecte n'était pas la première, puisque déjà il avait ses huit pattes.

Nous ne chercherons pas à faire comprendre comment des pièces aussi compliquées, et si profondément placées, peuvent être extraites à l'extérieur, et se suppléer par une sorte de création nouvelle; une étude faite sur des insectes d'un plus grand volume, chez les crustacés, par exemple, en donnerait une facile explication. D'ailleurs, faire l'application de ce qui se passe chez d'autres insectes à l'*acarus*, nous entraînerait trop loin de notre but; nous laisserons d'autant plus volontiers cette lacune à combler, qu'il nous semble à peu près impossible, aujourd'hui, avec nos grossissements de 8 à 900 fois, de découvrir les détails infinis des métamorphoses : celles-ci doivent être fréquentes, à en juger par le nombre d'insectes qu'on rencontre en voie de dépouillement. Ce qui paraît certain, c'est que la première métamorphose donne à la jeune larve huit pattes au lieu de six, et fait du mâle un insecte parfait, avec tous les organes qu'il conservera sa vie

durant; du moins les *acarus* mâle du mouton et du cheval permettent de le croire. La femelle, au contraire, subit plusieurs dépouillements qui paraissent modifier légèrement son organisation, et qui sont subordonnés à ses fonctions, suivant la période de sa vie. Ainsi, après la première métamorphose, elle est propre à l'accouplement; après la seconde ou la troisième, à la ponte. Après la période de l'accouplement, c'est-à-dire après la première métamorphose, un petit organe situé en *a* (fig. 12, pl. 3) manque et n'apparaît qu'après la seconde. Le volume de la femelle augmente à chaque métamorphose.

ARTICLE IV.

FONCTION DE LA REPRODUCTION OU DE LA GÉNÉRATION.

109. S'il est une question physiologique qu'il importe au médecin de discuter avec soin quand il traite des fonctions de l'*acarus*, c'est incontestablement celle qui concerne sa reproduction, car aucune n'est plus intimement liée à la pathologie proprement dite. Il nous suffira d'énoncer les propositions suivantes pour justifier cette assertion.

C'est en se multipliant que l'*acarus* donne à la gale toute sa gravité.

C'est en arrêtant la reproduction de l'*acarus* qu'on guérit la maladie.

Pour être atteint de la gale, il faut de toute nécessité qu'un ou plusieurs *acarus* se transmettent d'un galeux à un individu qui ne l'est pas.

Si l'*acarus* transmis est seul de son espèce, et c'est presque toujours par un seul, dans les conditions ordinaires, que s'opère la contagion, il pourra être mâle ou femelle. Si c'est un mâle, la propagation des acares étant impossible, un seul insecte fera donc naître les accidents connus de la psore. Si, au contraire, c'est une femelle, il faudra supposer, ou que cette femelle restera seule comme le mâle, sans accouplement possible, et sera comme lui cause

unique de la maladie, ou qu'elle aura été fécondée avant d'avoir été transmise. Dans les deux premières suppositions de la transmission d'un seul *acarus* mâle, ou d'une femelle non fécondée, la gale serait due à la présence d'un seul insecte; dans la troisième supposition de la transmission d'une seule femelle fécondée par anticipation, tout s'expliquerait : des générations successives propageraient la maladie. Mais ces trois hypothèses ne sont pas les seules qu'il soit permis de former; il pourrait encore arriver que plusieurs *acarus* transmis fussent tous mâles, ou femelles non fécondées, et dans ce cas, ces insectes en petit nombre développeraient les accidents psoriques avec plus d'intensité que s'ils eussent été seuls, mais avec moins de facilité que si une seule femelle fécondée eût été transmise. Ce n'est pas gratuitement que nous imaginons toutes ces hypothèses; elles peuvent se traduire en fait, et bien des erreurs de diagnostic ont été commises, faute de les avoir prévues.

Il est nécessaire de faire une autre observation, afin d'apprécier le rôle de l'insecte dans l'étiologie de la gale : c'est que jamais nous n'avons rencontré d'*acarus* mâle dans les sillons, et cependant le mâle doit exister. Mes observations d'entomologie comparée sur les acares du cheval ou du mouton en particulier, me les ont montrés doués d'aptitudes génésiques si développées; ils présentent parmi eux les mâles en si grand nombre, ils sont sous tant de rapports identiques à l'*acarus* de l'homme, qu'on peut conclure *à priori* du connu à l'inconnu, et avancer que le sarcopte mâle humain est, comme celui des animaux, prodigue de ses faveurs.

Nous apprécierons, à l'article diagnostic, les conséquences que peut avoir sur la marche de la maladie la transmission d'un plus ou moins grand nombre d'insectes. C'est de la génération qu'il s'agit en ce moment; à ce titre, la présence ou l'absence du mâle doit surtout nous occuper[1].

[1] Nous avons dit que nous n'avions jamais rencontré de mâle; cela tient sans doute à ce que nous ignorions alors les nombreuses métamorphoses que subissent

Nous avons tenté plusieurs expériences dans le but de constater s'il n'y avoit réellement pas de mâles parmi les *acarus* qui offraient tous la même organisation. Pour cela, nous avons placé une quinzaine d'*acarus* bien vivants dans deux petites lames à godets, où ils pouvaient circuler à leur aise, et nous les avons observés au

les *acarus*, la nécessité plus absolue pour la femelle que pour le mâle de vivre dans un sillon, et la faculté dont jouissent les femelles de pondre un grand nombre d'œufs *éclosables*, après un seul accouplement et plusieurs métamorphoses. — L'étude entomologique et physiologique de l'*acarus* du mouton nous a en effet donné l'explication de plusieurs phénomènes applicables à l'*acarus* de l'homme, entre autres de la fécondation, dont les femelles sont douées par le fait d'un seul accouplement. — Voici, en effet, à quels changements sont soumis les *acarus* du cheval et du mouton. — Quand la larve, pourvue seulement de ses six pattes, éprouve la première métamorphose qui la fait insecte parfait, elle devient mâle ou femelle, et avec des caractères tellement tranchés, que la moindre observation suffit pour distinguer les deux sexes. Le mâle suit les phases de son existence sans éprouver de métamorphose : il croît en volume, est propre à plusieurs accouplements, mais sans subir de transformation. La femelle, au contraire, a pour caractères distinctifs, à l'état d'insecte parfait, de porter de longs poils aux deux paires de pattes postérieures, d'être pourvue, à la région postérieure de la face dorsale, de deux appendices sous forme de tubercules saillants, destinés à être recouverts pendant l'accouplement par deux ventouses que le mâle porte à la région postérieure de la face abdominale; enfin, elle manque d'un organe particulier, probablement propre à la ponte, qui ne se développe qu'à la troisième phase de ses transformations. — A la deuxième métamorphose, la femelle perd les insignes de son sexe, les appendices saillants qu'elle porte à la région postérieure de la face dorsale disparaissent, et la deuxième paire de pattes postérieures est armée, non plus d'un long poil, mais comme les quatre pattes antérieures, d'un ambulacre à ventouse. Enfin, à la troisième métamorphose, elle conserve la ventouse de la deuxième paire de pattes, porte souvent des œufs ou des rudiments d'œufs dans la cavité abdominale, et se trouve pourvue d'un organe particulier, à la fois solide et membraneux, qui semble destiné à donner passage à l'œuf lors de la ponte. — Un simple coup d'œil suffit pour distinguer si la femelle est à la période, soit de l'accouplement, soit à l'état transitoire pendant lequel elle n'est propre ni à la fécondation, ni à la ponte, soit enfin à la période de la ponte. — Si l'on nous a bien compris, il est entendu que la fécondation n'est possible qu'à la première métamorphose, qui fait de la femelle un insecte parfait, qu'un seul accouplement féconde des pontes successives, malgré les deux métamorphoses qui le suivent, et que la ponte elle-même n'est possible qu'à la troisième génération. — Tels sont les faits importants que nous a révélés l'étude des *acarus* du cheval et du mouton, et dont l'application à la physiologie de l'*acarus* de l'homme devait expliquer certains phénomènes, qui, à bon droit, nous causaient

microscope pendant la nuit, aux heures où ils veillent habituellement et à une douce température, en les mettant enfin dans les conditions les plus propres à éveiller leurs instincts génésiques : ils étaient tous très-vivants et d'une agilité extrême; on les voyait se heurter, passer l'un au-dessus de l'autre; mais jamais nous n'avons

quelque surprise. — En effet, ce n'était pas sans étonnement que nous trouvions, dans les sillons, des *acarus* toujours semblables quant à leur organisation, fréquemment suivis dans le *cuniculus* d'une traînée d'œufs, à tous les degrés d'incubation; en un mot, ayant tous les caractères du sexe femelle : de telle sorte que, ne rencontrant jamais de mâles dans les sillons où l'*acarus* en général nous paraissait condamné à vivre, nous en arrivions à conclure que la présence du mâle n'était que secondaire dans la fécondation. Ce fait, tant de fois constaté, d'*acarus* suivant leur sillon pendant une ou plusieurs semaines sans en sortir, et pondant derrière eux, au fur et à mesure que j'enlevais leurs œufs, c'est-à-dire sans accouplement nouveau une fois le sillon commencé, permettait de supposer, à bon droit, que l'approche fréquente du mâle n'était pas nécessaire à la fécondation de la femelle. — L'étude des fonctions génitales de l'*acarus* du mouton a justifié cette dernière observation et nous en a donné l'explication, en nous montrant que la liqueur séminale, une fois reçue, conserve sa propriété fécondante, même après plusieurs métamorphoses. — Comparant donc entre eux les *acarus* de l'homme et du mouton, nous en avons conclu que le premier subissait, comme le second, des métamorphoses successives : la planche 6, fig. 37, le prouve, attendu que ce n'est pas une larve, mais bien un insecte complet qui se transforme. — Nous avons compris, enfin, comment l'*acarus* femelle de l'homme, fécondé une fois pour toutes par un simple accouplement, pouvait pondre dans le même sillon sans en sortir, puisqu'il devait être, comme celui du mouton, impropre à l'accouplement à la période de la ponte. — Nous supposons de plus, et l'avenir le démontrera, que le mâle, loin de vivre, comme la femelle, dans un sillon qu'il poursuit pendant plusieurs semaines, doit se contenter de fouir l'épiderme momentanément, pour obéir à l'instinct de sa conservation : il est probable qu'il se cache sous l'épiderme afin d'y absorber des sucs nourriciers et se mettre à l'abri des agents extérieurs qui, pendant le jour, pourraient causer sa mort, et l'enlever de l'épiderme. — Si la fixité est une condition absolue pour la femelle à la période de la ponte, la mobilité, au contraire, est une nécessité pour le mâle. Tout porte à croire qu'il pénètre sous l'épiderme, et en sort pendant la nuit, à l'heure de notre premier sommeil, et qu'il en est de même pour les femelles avant qu'elles aient subi les deux métamorphoses qui les rendent impropres à l'accouplement. Il est d'ailleurs difficile de dire si c'est sous l'épiderme, dans des sillons spéciaux, ou à sa superficie, que cet accouplement s'opère. — D'autres observateurs, guidés par ces indications, trouveront sans nul doute le mâle, que nous avons en vain cherché dans les sillons, surtout s'ils font usage du microscope mobile.

pu entrevoir la moindre velléité de rapprochement. Un autre jour, nous en avons mis dix dans les mêmes conditions, une troisième fois seulement quatre; et, dans ces expériences, ils sont toujours restés des heures entières sans laisser apercevoir qu'ils sentissent le besoin de l'accouplement. Comme on le pense bien, pendant cette observation, nous comparions avec soin les formes extérieures de ces insectes, dans l'espérance de saisir quelques caractères distinctifs des sexes, mais nous ne vîmes jamais entre eux la moindre différence.

110. L'expérience que nous tentions nous paraissait peu concluante, car des *acarus* ainsi dépaysés, devaient bien plutôt obéir à l'instinct de leur conservation particulière qu'à celui de leur reproduction; et, pour faire la part des influences extérieures dans l'indifférence de nos *acarus*, il nous vint à l'idée de mettre dans les mêmes conditions plusieurs *acarus* de fromage (sarcopte de M. Dugès): et quel ne fut pas notre étonnement de voir des insectes si voisins montrer des aptitudes génésiques si différentes. Du premier coup d'œil, en effet, il nous fut facile de distinguer, parmi ces mites de fromage, des individus de sexes différents : les uns volumineux, allongés, aux pattes sveltes, bien proportionnées, presque gracieuses, et animés de mouvements lents et compassés; les autres plus petits, trapus, à pattes antérieures presque difformes, et jouissant d'une agilité sans pareille[1]. Les premiers, toujours occupés à se défendre, les seconds attaquant avec audace, luttant avec énergie. Ce tableau si animé et rendu encore plus expressif à la faveur d'une amplification qui traduisait des instincts, et peut-être des sentiments de haine, de jalousie et d'amour, captiva longtemps notre curiosité : pour mieux la satisfaire, deux sacoptes, l'un mâle, l'autre femelle, furent séquestrés et soumis ensemble à une pareille observation. Ainsi

[1] Les caractères qui distinguent l'*acarus* mâle du mouton ou du cheval sont encore plus tranchés. On le rencontre très-fréquemment accouplé. — Nous publierons sous peu un travail complet sur la gale de ces animaux, fait à Alfort en compagnie de M. Delafond.

isolés des autres, ces deux acares se livrèrent à tout leur instinct, et nous rendirent témoins de ces ébats dont les animaux en rut donnent souvent le spectacle. On croiroit à peine aux ruses, aux expédients employés par le mâle, à l'indifférence, au flegme de la femelle; on nous accuserait de faire injure à la nature, si nous montrions qu'elle a prodigué les mêmes faveurs à la mite du fromage qu'à des animaux supérieurs. Qu'il nous suffise de dire qu'à ses premières avances, le mâle fit succéder des provocations plus expressives; que la femelle, sortant enfin de son indifférence, répondit à la violence par la violence, et que, dans cette lutte acharnée, la victoire, longtemps douteuse, resta enfin à l'infatigable agresseur. Le physiologiste, l'entomologiste surtout, n'auroient pu voir ce tableau sans un vif intérêt; car ils eussent constaté avec quelle perfection les organes sexuels sont développés chez les sarcoptes : vingt fois ils auraient pu mesurer de l'œil le volume, la longueur, la forme de l'organe sexuel mâle, quand le sarcopte, croyant l'accouplement possible, s'épuisait en efforts superflus pour atteindre le but de ses désirs; enfin, ils auraient vu l'accouplement s'effectuer, et le calme succéder à une lutte si prolongée. Mais revenons à notre sujet, et laissons à d'autres observateurs le soin de faire l'anatomie et la physiologie du sarcopte : cela leur sera facile si nous en jugeons par ce simple aperçu.

111. Ainsi donc notre *acarus scabiei*, mis dans les mêmes conditions que le sarcopte, est loin de se comporter comme lui, et quoi que nous ayons pu faire jusqu'à présent, nous n'avons pu découvrir chez lui le moindre caractère distinctif des sexes. On se gardera de prendre pour des parties sexuelles un petit organe en forme de pointe de lance (pl. 3, fig. 12, *a*), de la couleur et de la consistance des parties solides. Sa position, sa structure et sa forme ont attiré notre attention; mais nous avons constaté que tous les *acarus* sans exception, même ceux qui portent des œufs dans l'abdomen, sont doués de ce petit organe, dont nous ne pouvons préciser l'usage.

Nous mentionnerons aussi un petit poil d'une finesse extrême, qu'on aperçoit très-difficilement sur la ligne médiane, vers la face

ventrale, et qu'on pourroit prendre pour un cordon diversement plié, appartenant aux organes génitaux. Quelques insectes ayant l'organe sexuel mâle ainsi conformé, on serait porté, *à priori*, à voir là une analogie de forme et de fonction; mais il n'en est rien. Si nous parlons de ce filament, c'est plutôt pour montrer que rien ne nous a échappé, que pour combler une lacune insignifiante (voir pl. 9, fig. 56, *o*).

112. Puisqu'il ne nous a été donné de rencontrer que des *acarus* tous femelles, avons-nous, du moins, pu découvrir, dans l'abdomen de ces insectes, des ovaires, des tubes qui en tiendraient lieu, et surtout un oviducte? Nous avons fait de nombreuses recherches à ce sujet, et nous sommes obligé de le confesser, nous avons été impuissant à découvrir le moindre vestige de ces organes : ils existent très-probablement, car les œufs naissent d'un germe particulier ou de plusieurs ovaires, à l'existence desquels nous devons croire, bien qu'on ne puisse les découvrir. Nous avons souvent cru apercevoir dans le tissu abdominal des vésicules que nous prenions pour des ovaires, mais qui, vérification faite sur une plus grande échelle, n'étaient autre chose que des œufs à leur premier degré de développement. Les œufs, en effet, se développent chez l'*acarus* avec une fécondité extraordinaire. Quand un œuf est arrivé à un développement complet, et qu'il est sur le point d'être pondu, un second œuf rudimentaire s'aperçoit ordinairement dans un point quelconque de l'abdomen; car, chose singulière! les œufs occupent toutes les régions imaginables du corps de l'insecte. Ainsi la planche 6, fig. 38, *a, a,* nous présente l'œuf dans sa position la plus ordinaire, au milieu de l'abdomen, entre les pattes postérieures. Dans la planche 7, fig. 39, *b,* l'œuf, au contraire, occupe le point central du corps, il empiète sur la pièce sternale et sur un des épimères, et, phénomène bien digne de remarque, le jeune insecte contenu dans l'œuf se développe à l'intérieur de l'*acarus* qui le contient, comme s'il avait été pondu. On aperçoit, en effet, dans l'œuf des formes qui se dessinent; on dirait qu'il a subi comme trois jours d'incubation, et l'*acarus*

est plein de vie. Tous ces faits ont vivement excité notre curiosité, car ils paraissent s'éloigner beaucoup des idées généralement reçues. Mais si nous avions quelque raison d'être surpris, de voir ainsi des œufs naître irrégulièrement dans toutes les parties de l'abdomen, quel n'a pas dû être notre étonnement, lorsqu'un jour nous avons rencontré sous le microscope un *acarus* d'un volume énorme et qui contenait dans son corps quatre œufs déjà en partie développés (pl. 7, fig. 40, *c, d, e, f*), à tel point qu'ils montraient, pour la plupart, l'embryon déjà parfaitement organisé. Ainsi les œufs *c, f* laisseraient déjà voir les ambulacres des pattes antérieures, s'il était permis de les observer isolément.

113. Moins heureux que les observateurs qui nous ont précédé, nous n'avons jamais vu d'*acarus* pondre sous nos yeux; nous ne pouvons donc dire : l'œuf suit telle ou telle voie, franchit telle ou telle ouverture. Nous en sommes réduit à former des hypothèses à cet égard. Deux ouvertures pourraient livrer passage aux œufs : une première presque commune avec l'anus; une seconde, en forme de fente, transversalement placée sur la face ventrale, un peu en arrière de la pièce sternale et des épimères. Voici sur quelles raisons nous nous fondons pour motiver notre réserve : très-fréquemment nous avons vu le cloaque de la région anale fortement distendu et largement ouvert, bien au delà de ce que nécessiterait le passage du bol fécal, et de plus, cette déhiscence ne portait pas également sur toute l'étendue du tube qui conduit les fèces; maintes fois il nous a été facile de constater que l'ouverture en question offrait plusieurs parois ou plusieurs lèvres, les unes superficielles et plus déjetées en dehors, les autres plus profondes, et appartenant spécialement au tube intestinal rudimentaire. La planche 6, fig. 35, *c* donne assez bien l'idée de cette disposition : de telle sorte que, sans pousser trop loin l'induction, on pourrait croire à l'existence d'un conduit particulier destiné à la ponte des œufs, et qui serait placé au-dessus du canal intestinal. Ces données, bien qu'incertaines, pourraient nous faire voir là un oviducte.

Les raisons qui donnent quelque vraisemblance à la deuxième hypothèse sont les suivantes :

Il existe, et c'est M. Milne Edwards qui, un jour, en a fait la remarque en examinant un *acarus* à notre microscope, il existe, dis-je, vers le tiers antérieur du tronc, du côté de la face ventrale, une ligne sinueuse terminée par une courbe à concavité antérieure (pl. 3, fig. 12, *bb*), ligne ineffaçable chez certains acares, quel que soit le degré de compression qu'on exerce sur elle, et qui montre parfois les caractères d'une fente quand on fait jouer sur elle le système optique. Pourquoi une apparente ouverture d'une telle étendue à l'enveloppe extérieure et dans une telle région, si ce n'est pour donner passage aux œufs, comme cela a lieu chez tant d'autres insectes[1]? Telle est la question qu'on se pose naturellement, et qu'on a quelque tendance à résoudre dans le sens que nous venons d'indiquer, quand on voit les œufs approcher d'autant plus de cette ouverture, qu'ils sont plus près de leur développement complet, et surtout quand on remarque quelle juste proportion semble exister entre le volume de l'œuf et cette fente.

Toutes ces raisons ne nous permettent pourtant pas de dire si la ponte s'opère par cette fente transversale de la face ventrale, ou par l'ouverture qui nous a paru exister vers la région anale.

114. Il y avait sans doute une expérience à faire pour rencontrer plus sûrement des *acarus* mâles; c'était de prendre plusieurs larves au moment de l'éclosion, de les déposer sur la peau à l'état de liberté, ou renfermées sous des verres de montre, et de suivre le développement des jeunes insectes dans les diverses phases de leur existence. Nous avons tenté ces essais sans résultats importants. Ces mêmes expériences ont été répétées sur plusieurs personnes, en déposant des œufs sous une pellicule de leur épiderme,

[1] L'aspect de cette fente, représentée également à la figure 4, pl. 1, en *m*, a été exagérée par le graveur; elle a la teinte des plis qui sillonnent l'enveloppe de l'insecte.

et cela sans plus de succès. Nous n'en sommes qu'à demi surpris : bien des causes imprévues devaient troubler l'évolution de l'œuf.

CHAPITRE III.

DE L'OVOLOGIE OU DE L'EMBRYOGÉNIE DE *L'ACARUS*.

115. Fidèle au plan que nous avons tracé, nous abordons l'étude de l'*acarus scabiei* à l'état d'œuf et à l'état de larve. Nous allons suivre l'insecte dans ses développements successifs, depuis le moment où le contenu de l'œuf entre en travail pour s'animer, jusqu'à celui où le jeune *acarus*, déjà pourvu de tous ses organes, peut devenir une cause d'irritation pour le sujet qui le porte. L'*acarus* femelle, dans la vie d'isolement qu'il mène à la période de la ponte, semble exclusivement satisfaire à deux besoins, ceux de se nourrir et de procréer : il poursuit sa route vers des lieux nouveaux, sans jamais faire un retour vers la famille qu'il laisse derrière lui. Chaque ponte est ordinairement de quatre œufs, et demande trois à quatre jours pour être complète. Pendant ce temps l'*acarus* déroge à ses habitudes, il reste à la même place, et ce n'est que quand les quatre œufs sont pondus qu'il s'éloigne d'un millimètre toutes les vingt quatre heures. Il prolonge ainsi son sillon pendant quatre à cinq jours, puis il fait une ponte nouvelle encore de quatre œufs, et ainsi de suite. Notre attention a été fixée pendant plus d'un mois sur plusieurs insectes dont nous enlevions les œufs à mesure qu'ils étaient pondus, et nous avons pu en extraire ainsi jusqu'à seize pour chacun d'eux. Le plus souvent les œufs sont déposés par couvées de quatre, et dans ce cas, ils sont rangés par paire, suivant la largeur du sillon. Quelquefois cependant les œufs se touchent par leurs extrémités et sur une seule ligne, de sorte qu'on les trouve cachés sous l'épiderme sur une longue traînée parfaitement régulière; dans ce cas, la ponte est généralement plus nombreuse, par séries de quatre à huit œufs, par

exemple. Quoique l'insecte ne montre aucun intérêt pour la génération qu'il laisse ainsi derrière lui, il faut pourtant dire qu'il évite avec un soin particulier de les maculer de ses fèces: celles-ci, en effet, sont accumulées en avant des œufs, et ne les recouvrent jamais. Quand l'œuf est pondu, il s'imprègne d'un suc qui lui permet de prendre de fortes adhérences sur la paroi inférieure du sillon, et souvent l'adhésion est telle qu'il faut user de grands ménagements pour ne pas crever sa légère pellicule d'enveloppe, quand on cherche à l'enlever. Le côté de l'œuf qui est en rapport immédiat avec le tégument présente comme de petites matrices extérieures dans les points où l'adhérence a lieu, ce qui laisserait à penser que l'exhalation cutanée porte directement à l'œuf des produits nutritifs. L'air ambiant, grâce aux petites ouvertures que l'insecte fait à l'épiderme à chacune de ses stations, peut aussi parvenir facilement jusqu'aux œufs, et leur fournir les éléments d'une respiration en quelque sorte latente.

L'étude de l'œuf nous a longtemps préoccupé; nous voulions suivre et représenter heure par heure toute son évolution, depuis le moment de sa ponte jusqu'à celui où le jeune *acarus* brise la coque qui le retient prisonnier. Nous avons dans ce but soumis les œufs à une incubation artificielle en les exposant à la douce chaleur d'une petite étuve qui remplaçait la chaleur naturelle du corps. Ces expériences nous ont conduit à des résultats pleins d'intérêt, et pourtant les difficultés de pareilles études sont tellement insurmontables, qu'il nous a été impossible de réaliser tout ce que nos espérances se plaisaient à entrevoir. L'œuf, en effet, est un corps d'une conformation et d'une structure bien défavorables à l'observation microscopique; quel que soit le plan de son épaisseur où l'on porte le foyer optique, toujours la lumière réfractée forme des ombres qui enlèvent à l'observation toute sa netteté et sa précision. Veut-on diminuer ces obstacles inhérents à la forme de l'objet en le comprimant sur une de ses faces? il se crève et inonde le champ de l'instrument. Voici cependant les moyens qui nous ont le mieux réussi dans cet examen. Pour juger

du temps de l'incubation nécessaire au développement complet de l'embryon, des œufs ont été déposés sur une lame de verre, et portés au foyer du grand microscope : nous en notions avec soin l'aspect intérieur, et nous déposions la petite lame, sans toucher à l'œuf, dans une petite boîte destinée à être placée à l'étuve. Quelques heures après nous portions la lame sur le compresseur pour observer de nouveau au grand microscope. Toutes les lames subissaient la même opération, et pour toutes nous notions avec exactitude le progrès de l'incubation. *A priori*, nous espérions beaucoup de ces observations; il nous semblait qu'elles devaient nous conduire à des résultats importants ; il n'en fut pourtant rien. Sans doute qu'il était rationnel de placer l'œuf dans toutes ces conditions, pour bien saisir le travail de l'organisation intérieure ; car en le laissant dans une position invariable, on l'observait avec suite, sans courir le risque de déposer ce corps ovoïde tantôt sur une face et tantôt sur une autre ; mais un œuf soumis à l'examen microscopique sans le secours d'aucun réactif propre à augmenter sa transparence, est un corps toujours couvert d'un voile presque impénétrable; de telle sorte que toutes ces expériences faites sur des œufs dont nous ne troublions pas le travail organisateur ne nous amenaient qu'à des résultats grossiers; elles nous donnaient vaguement le temps de l'incubation, et rien de plus. Il nous fallut donc en venir à un autre mode d'examen; à sacrifier tous les œufs soumis à l'étude, en les infiltrant de réactifs, et attendre ainsi d'une longue observation, un peu livrée au hasard, l'explication que ne pouvait nous donner une incubation méthodique. Des œufs nouvellement extraits de leur sillon, ou provisoirement déposés à l'étuve, nous servirent donc alors à découvrir ce qu'il nous importait de connaître. Les plus puissants objectifs, la lumière la plus pénétrante, le compresseur, vinrent en aide à ce difficile examen, et c'est en observant des centaines d'œufs que nous sommes parvenu à comprendre quelle modification éprouve leur contenu avant de produire un *acarus*.

116. L'œuf est un corps ovoïde parfaitement régulier, de 0,2

en longueur et de 0,1 en largeur, ayant une des extrémités un peu plus volumineuse que l'autre. Il varie quelquefois de forme et de volume; mais c'est par de rares exceptions. Il est blanc à l'œil nu et de l'apparence d'une petite vésicule remplie de liquide. Son aspect au microscope est différent suivant que le foyer optique porte à sa superficie ou sur son point central. Quand on cherche à examiner ses contours avec netteté, le centre se marque d'une ombre impénétrable; lorsque le foyer porte au contraire sur son centre, mais superficiellement, on aperçoit des granules infiniment petits et sphériques. Quand le foyer porte vers le point tout à fait central, les bords de l'œuf décrivent comme un double cercle, dont le jeu des rayons réfractés par un corps ovoïde rend parfaitement compte.

117. Pour bien comprendre la structure de l'œuf et son évolution embryonnaire, nous diviserons par vingt-quatre heures les points d'arrêt, ou mieux les phases diverses par lesquelles il passe successivement.

Nous aurions bien désiré trouver dans les auteurs des notions applicable à l'étude de l'œuf de l'*acarus scabiei*, car elles nous eussent facilité l'intelligence des phénomènes que nous avions à interpréter; mais la science entomologique est assez pauvre à ce sujet, et sauf le traité d'ovologie d'Hérold sur les araignées[1] (*De generatione aranearum in ovo*), on ne trouve aucun écrit *ex professo* sur la matière. Le livre d'Hérold, d'autres l'ont dit avant nous, pèche d'ailleurs sous le rapport de la clarté. On ne sait trop ce qu'il entend par le jaune de l'œuf, par le vitellius, et l'analogie qu'il a voulu établir entre les parties constituantes de l'œuf des araignées et celles de l'œuf des oiseaux, paraît être la principale cause de l'ambiguïté qu'on lui reproche. Dans tous les cas, ce qu'il dit de l'œuf des araignées n'est que très-indirectement applicable à celui de l'*acarus scabiei*. Ici encore nous nous contenterons donc d'exposer ce que l'observation nous a révélé, laissant au temps le soin d'établir si les œufs des acariens en gé-

[1] *Exercitationes de animalium vertebris carentium ovi formatione.* Marburgi, 1824.

néral suivent dans leur développement une marche réglée, invariable, qu'on pourrait convertir en loi.

L'œuf, au moment où il vient d'être pondu, présente une enveloppe extérieure transparente, lisse, et d'une consistance assez marquée. Cette membrane est formée par une trame partout régulière, sans apparence de fibres, et d'une épaisseur égale dans toute son étendue. Sa paroi interne, également lisse, est en rapport avec un liquide incolore, un peu visqueux, qui tient en suspension des granules noirâtres, qu'on voit quelquefois agités d'un mouvement de trémulation, du mouvement Brownien. C'est en vain qu'on cherche à découvrir une membrane secondaire intérieure qui serait séparée par un liquide particulier de l'enveloppe extérieure. Pendant plusieurs jours, il y a un rapport immédiat entre le liquide séreux intérieur, les granules qu'il tient en suspension et la paroi interne de la membrane. Celle-ci renferme, en un mot, un liquide incolore, plus dense que l'eau, d'apparence albumineuse, qui tient en suspension des myriades de granules. C'est en vain qu'on cherche à y découvrir une cicatricule ou une petite vésicule intérieure qui servirait de germe ou de noyau au travail organisateur; il n'y a nulle apparence d'organe spécial, où le commencement de l'évolution se trahirait tout d'abord. L'œuf de l'*acarus* est donc bien différent de celui des araignées, puisqu'il ne montre aucune apparence de *cicatricule; on ne voit que le vitellus au moment de la ponte;* de telle sorte qu'il est partout d'une même structure; son organisation est aussi simple que possible; enfin, un liquide séreux, contenant en suspension des granules, et renfermé dans une membrane d'enveloppe : tels sont les éléments constitutifs d'où sortira la larve de l'insecte.

Les premiers effets de l'incubation ne se trahissent par aucune modification appréciable au microscope; peut-être les granules changent-ils de forme et de volume; mais ces corpuscules sont si petits, qu'il serait difficile de préciser qu'elles transformations ils subissent. Cependant, au bout de quarante-huit heures, on aperçoit dans l'ensemble de l'œuf quelque chose d'insolite, de

petites vésicules apparaissent : elles sont répandues partout; on dirait qu'elles naissent des granules eux-mêmes. Bien que la plupart semblent se produire spontanément au milieu du menstrue qui tient les granules en suspension, il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, de préciser au juste quelle part les granules ou le liquide séreux ont à la production de ces vésicules. Souvent les granules nous ont semblé se dissoudre, et les vésicules naissaient alors du sérum lui-même; d'autres fois les granules se trouvaient eux-mêmes emprisonnés dans des vésicules à parois très-distinctes. Toutefois il est incontestable, 1° que la plupart des granules se dissolvent; 2° que des vésicules naissent de toutes pièces au milieu du menstrue; 3° enfin, que des granules eux-mêmes se trouvent englobés au milieu d'une enveloppe particulière. Nous nous servons du mot vésicules, c'est à tort; le mot cellules rendrait mieux compte du fait lui-même et de la manière dont nous le concevons. Nous allons d'ailleurs exposer les trois modes d'action qui réagissent sur le contenu de l'œuf, et qui donnent lieu à ces phénomènes.

Quand une douce chaleur fait sentir son influence sur un œuf, quelques cellules apparaissent au milieu du menstrue; ces cellules n'ont pas, dans le principe, de parois distinctes; on dirait plutôt une goutte de matière grasse, et peut-être la place qu'elles occupent, voire même les éléments qui leur donnent naissance, leur sont-ils fournis par les granules qui, pendant ce premier travail, sont déjà notablement moins nombreux. Ces changements sont très-distincts pendant le troisième jour. Mais à mesure que les granules diminuent, les cellules augmentent en nombre et en volume. Les plus anciennes, et par conséquent les plus volumineuses, se dessinent d'une manière plus tranchée sur la masse où elles sont plongées : leurs parois prennent du corps; ce ne sont plus seulement des gouttelettes d'une densité partout égale; ce sont réellement des cellules. La plupart sont diaphanes, et comme tout l'œuf en est rempli, elles sont irrégulièrement disséminées au milieu des granules qui sont encore intacts. Les

cellules sont sphériques; or des corps sphériques, quelle que soit leur nature, ne peuvent s'accumuler sans laisser entre eux des espaces vides entre les points tangents qui les unissent, aussi les granules sont-ils répandus entre les cellules, sur leurs parois, et surtout dans les espaces libres qu'elles laissent entre elles. L'œuf, à ce moment de l'incubation, est un composé de granules entremêlés à des cellules diaphanes, disséminées dans un liquide assez dense, le tout vu à travers une membrane intérieure d'une certaine épaisseur. Ou mieux encore des granules dissous, des cellules de nouvelle formation, irrégulièrement répandues dans l'intérieur de l'œuf, et des granules disséminés autour des cellules, mais surtout entre elles : tel est l'aspect de l'œuf au troisième jour de l'incubation. La planche 7, fig. 41, nous montre un œuf vu à cette période de l'évolution. Cette figure semble représenter un grand nombre de cellules granuleuses : c'est qu'en effet les cellules recouvertes de granules ont tout à fait cet aspect. Mais qu'on vienne à comprimer l'œuf outre mesure, au point de le rompre, comme cela est arrivé pour celui représenté par la figure 43, et l'on verra les granules, libres de se disperser sur une large surface, laisser voir les cellules à nu, et celles-ci alors auront l'aspect de gouttelettes huileuses [1], n'offrant plus de granules renfermés tout à l'heure en apparence dans leur intérieur. Il ne faudrait pourtant pas croire que ces gouttelettes ou ces cellules fussent réellement composées de matière grasse; elles en ont presque l'apparence, attendu qu'elles ne sont pas miscibles au sérum où elles nagent : c'est faute d'en connaître précisément la nature que nous nous servons de ce terme un peu vague de gouttelettes huileuses.

118. Du troisième au quatrième jour, les cellules éprouvent un notable changement. Pour s'en rendre compte, il faut les isoler par la pensée en petits groupes de quatre à cinq, et considérer chaque groupe comme le centre ou le foyer d'un travail

[1] Cette observation au sujet des gouttelettes huileuses est applicable aux vésicules que nous avons décrites dans le tissu sarcodique, au paragraphe 88.

particulier. Si ce travail a pour but de confondre les points par lesquels les cellules se touchent, et d'absorber ou de dissoudre la paroi au point même de contact, on conçoit facilement que l'intérieur de ces quatre ou cinq cellules se confondra bientôt, et ce changement s'opérera encore bien plus sûrement si les parois extérieures des cellules s'unissent latéralement entre elles, de manière à n'en faire qu'une seule. Mais les parois des cellules, en s'unissant ainsi, emprisonneront à leur intérieur les granules qui se trouveront intercalés entre elles, et comme ces granules sont un élément de développement, sous l'influence de leur présence, les parois qui les contiennent se distendront et formeront ainsi une cellule unique très-régulière. Tel est le curieux phénomène que présente l'organisation à son principe de vitalité : il est général, toutes les parties de l'œuf y participent.

On comprend maintenant comment des cellules d'un certain ordre peuvent réellement contenir des granules à leur intérieur. Qu'on généralise par la pensée ce changement successif, ou plutôt cette fusion des cellules, et l'on concevra sans peine les progrès du travail organisateur.

A la fin du quatrième jour, toutes les cellules, ainsi formées aux dépens de cellules plus petites, éprouvent une modification analogue, mais sur une plus vaste échelle : ce qui se passe à la superficie de l'œuf est bien propre à en donner une idée. Jusqu'à ce moment nous n'avons donné à l'œuf qu'une seule membrane d'enveloppe; mais, à la fin du quatrième jour, une seconde membrane apparaît. A peine en voit-on un vestige qu'aussitôt elle se sépare de celle qui est tout à fait extérieure, de telle sorte qu'un espace libre et rempli d'air les isole complétement. Ces deux membranes n'ont donc aucun rapport : la plus extérieure protége l'œuf, la seconde est en rapport direct avec l'embryon; elle est destinée à en faire partie intégrante. La membrane intérieure se forme aux dépens de toutes les cellules qui occupent la superficie de l'œuf. Pour cela, toutes ces cellules s'unissent latéralement, en s'épanouissant en dehors et de manière à former, par cette union, une

membrane partout continue. D'un autre côté, comme tout le contenu de ces vésicules, liquide et granules, se répand dans une membrane plus vaste que celle représentée tout à l'heure par la capacité des cellules, il en résulte que cette membrane de nouvelle formation peut revenir sur elle-même et avoir moins de capacité que l'enveloppe tout à fait extérieure. De là aussi l'espace libre qui sépare ces deux membranes. La figure 42 montre d'une manière très-distincte la membrane intérieure qui vient de se développer. Les points *a*, *a*, *a*, *a* désignent la coque de l'œuf, et les points *b*, *b*, la membrane interne.

119. *Cinquième jour.* Le changement qui vient de s'opérer à la superficie de l'œuf pour former la membrane intérieure s'étend aussi aux cellules qui occupent le centre. Celles de seconde formation s'unissent entre elles et donnent lieu à des cellules plus considérables que les premières en emprisonnant toujours les granules qu'elles contenaient, ainsi que celles qui se trouvaient à l'état de liberté vers leurs points de contact. Parmi ces cellules ainsi agrandies et ainsi pourvues de granules, quelques-unes se soudent ensemble à leur point de contact, qui se montre alors sous forme de ligne ou plutôt de linéament solide, avec teinte opaline assez distincte; les parties, en un mot, tendent à acquérir de la solidité et à présenter une forme; l'organisation va sortir du chaos : c'est ce que la planche 7, figure 44, montre assez clairement. En effet, déjà à la superficie de la membrane intérieure et vers l'une de ses extrémités se montrent deux appendices (*a*, *a*), qui sont les premiers vestiges de la première paire de pattes antérieures; nous pouvons même certifier que les cellules volumineuses aperçues aux points *k*, *k* sont destinées à former la deuxième paires de pattes antérieures.

120. *Sixième jour.* L'évolution arrivée à cette période marche d'ordinaire avec une grande rapidité; ainsi les appendices, qu'on ne faisait que soupçonner vingt-quatre heures auparavant, se montrent durant le sixième jour de la manière la plus manifeste (pl. 7, fig. 45). La première paire de pattes se voit en *d*, *d*, la seconde en *e*, *e*, et la première paire de pattes postérieures en *f*, *f*. Si ces

derniers appendices paraissent dirigés en avant, c'est qu'une légère compression les a portés en ce sens. Ces appendices sont toujours obtus et irréguliers : ils naissent de la membrane intérieure, ou plutôt la force qui tend à les produire les pousse de dedans en dehors, de telle sorte qu'ils entraînent cette membrane à mesure que leur saillie est plus considérable. On dirait des espèces de bourgeons qui pousseraient sur un tubercule, si ce n'est que leur enveloppe serait la même que celle du corps qui leur donnerait naissance. Ces appendices résultent constamment de trois groupes de cellules, ou mieux de trois cellules principales qu'une force d'expansion intérieure pousse à venir faire saillie dans un lieu donné. En examinant avec soin les appendices de la figure 45, marqués *d*, *d*, *e*, *e*, on entrevoit des lignes transverses qui indiquent les points d'union de ces cellules soudées l'une au bout de l'autre. Les traces de ces divisions sont mieux marquées sur la figure 46, pl. 8 en *a*, *a* et *b*, *b*, pour les pattes antérieures; et aux points *c*, *c*, pour la première paire de pattes postérieures. Ces trois groupes, comme nous aurons à le dire plus loin, sont destinés à former celui qui est le plus à l'extrémité, les tubercules, les poils, le tube et la ventouse qui terminent la patte antérieure; les tubercules coniques et le long poil de la patte postérieure. L'observateur ne manquera pas de remarquer qu'on n'aperçoit aucun vestige de la deuxième paire de pattes postérieures sur cette figure 46, où la première paire est pourtant déjà si développée : il ne faut pas s'en étonner, la deuxième paire de pattes postérieures ne se montre que plus tardivement. Son apparition marque non pas la dernière phase de l'évolution de l'œuf, mais le dernier perfectionnement du jeune insecte lui-même. Ses deux dernières pattes postérieures ne se montrent en effet que huit ou dix jours après son éclosion, alors qu'il passe de l'état de larve à celui d'insecte parfait. Au moment où les appendices des pattes apparaissent, une voussure se montre à l'une des extrémités, du côté des appendices des pattes antérieures. Cette voussure est la première saillie de la tête. On la distingue sur un plan plus pro-

fond, pl. 8, fig. 46, au point *f*, et mieux encore sur la figure 47, même planche, laquelle représente le même œuf, vu par la face dorsale de l'insecte, tandis que la figure 46 le représente vu par la face ventrale. Ainsi, à la fin du sixième jour, on découvre facilement les appendices de toutes les pattes et celui de la tête. L'embryon alors est très-reconnaissable ; on peut toujours apercevoir ses extrémités antérieures et postérieures ; disons plus, déjà l'abdomen se dessine d'une manière manifeste, par rapport aux parties qu'on pourrait appeler thoraciques ; ainsi, sur la figure 47, pl. 8, on voit très-bien en *i*, *i*, une ligne transversale sinueuse, qui marque les limites d'un groupe considérable de cellules, spécialement destinées à former le tissu sarcodique abdominal. Ces deux figures 46 et 47 sont aussi très-propres à faire comprendre deux remarques que nous avons à faire une fois pour toutes, attendu qu'elles sont applicables à presque toutes les figures qui concernent l'œuf. Quand on examine la figure 46, par exemple, il semble qu'il y ait deux membranes d'enveloppe : une première, qui serait la coque de l'œuf, et une seconde, qui serait la membrane interne dont nous avons parlé, laquelle contiendrait l'embryon. La membrane externe existe, il est inutile de le dire ; mais la membrane interne, qu'un trait semble figurer en *o*, *o*, n'existe pas. Cette sorte de poche intérieure, dans laquelle le jeune *acarus* paraît enveloppé, n'est autre chose qu'une atmosphère de liquide comme albumineux, qui, sous l'effet du compresseur, s'étend régulièrement autour de l'embryon, de manière à simuler une membrane d'enveloppe. Cette apparence ne résulte pas d'une illusion d'optique, car le liquide est bien réel, mais c'est l'aspect qui donne le change, et qui pourrait induire en erreur au premier abord. Cette observation suffira pour que personne ne s'y laisse prendre. La membrane interne devient elle-même partie composante de l'insecte ; elle en formera le tégument : ce qui prouve que les choses sont bien ainsi faites, c'est que cette apparence de membrane n'existe jamais dans un œuf qui est près d'éclore, alors que l'embryon n'est plus entouré de ce nuage albumineux.

L'autre remarque que nous avons à faire est relative à des corpuscules granuleux, sphériques, que l'on aperçoit en dehors de l'embryon, entre lui et la coque extérieure. Ces corpuscules, avec leur membrane d'enveloppe et leurs granules intérieurs, seraient en tout comparables aux globules du mucus et du pus, s'ils contenaient en outre, comme ces derniers, un ou plusieurs noyaux. Ils résultent d'un groupe de cellules qui, en se fusionnant, se sont trouvées en dehors de la sphère d'activité qui réunit les parties en un seul et même tout : on dirait une superfétation; aussi sont-ils isolés et irrégulièrement répandus dans l'espace libre que la coque et l'embryon laissent entre eux. On les voit distinctement sur les deux figures 46 et 47, et notamment sur la figure 46, aux points *p*, *p*, *p*.

121. *Septième jour.* Les appendices des pattes s'effilent vers leurs extrémités, en augmentant graduellement de longueur, et cela sous l'influence d'une force d'expansion intérieure qui sollicite la membrane interne et son contenu à s'étendre en ce sens. Cette sorte de pousse linéamenteuse a pour but de donner naissance au tube et à la ventouse de l'ambulacre. La planche 8, fig. 49, montre en *a*, *a*, *a*, cette première apparition des organes essentiels de la progression. La première paire de pattes postérieures participe comme les antérieures au développement plus manifeste : elles montrent déjà leur long poil terminal, sous l'aspect d'une petite ligne qui part de l'extrémité de la patte. La croissance de ce poil est très-active : nous avons calculé qu'elle pouvait être de $0^{m},001$ par heure.

122. *Huitième jour.* Les mêmes organes prennent un caractère plus distinct. L'extrémité des appendices acquiert une forme plus tranchée. Des points anguleux se montrent en saillie sur les contours tout à l'heure réguliers de la membrane intérieure : les uns indiquent le siége précis des différents articles, les autres sont les premiers vestiges des poils qui bordent les pattes. La figure 50 met en relief tous ces progrès évidents dans le développement de l'embryon. Déjà même on devine la destination des trois groupes

de cellules mentionnés plus haut comme faisant constamment partie intégrante de la patte. Le plus extérieur, qui termine l'appendice, sert à former l'ambulacre; le groupe du milieu, les deuxième, trosième et quatrième articles, et le groupe qui est en rapport avec le tronc, les deux pièces triangulaires. On aperçoit aussi à cette époque l'anneau, qui commence à poindre; mais tout cela est encore si peu développé, si peu consistant, qu'une compression tant soit peu exagérée fait rentrer dans le néant ce premier simulacre de l'organisation. Pendant le huitième jour de l'incubation, apparaissent encore, pour la première fois, la pièce sternale et les épimères. La planche 8, figure 50, en donne un exemple. La pièce sternale se voit entre la première paire de pattes en *r*, un des épimères antérieurs en *s*, et l'épimère postérieur du même côté en *t*. Cette figure laisse même apercevoir, en *y*, un appendice armé d'un poil. On le prendrait volontiers pour une patte qui tend à se produire, mais c'est tout simplement un poil avec son follicule. Il se portera plus tard transversalement en dehors, quand la larve pourra s'étendre à son aise, après l'éclosion.

123. *Neuvième jour.* Tous ces organes se dessinent plus franchement. L'ambulacre est complétement formé; les articles des pattes s'aperçoivent plus distinctement; la pièce sternale avec ses deux branches antérieures, les épimères, enfin les longs poils des pattes postérieures, sont complétement développés. Pendant que ces modifications s'opèrent aux pattes, la tête se développe dans une même proportion, et déjà il est facile de constater la forme bien définie des palpes et des mandibules. Il est vrai qu'il faut, pour apprécier le degré de perfection de ces organes, user d'une compression qui les désagrége et les déforme, de telle façon qu'il est impossible de les représenter aussi nettement qu'on les a vus. C'est pourquoi la figure 51 ne reproduit que très-infidèlement la forme des pattes et des mandibules. Ce même œuf de la figure 51, observé par la face dorsale, laissait déjà voir les petits appendices ou tubercules cornés de la face dorsale, ainsi que plusieurs des plis qui sillonnent l'enveloppe extérieure.

124. *Dixième jour.* L'incubation a conduit l'organisation jusqu'à ses dernières limites. Le jeune insecte est complétement développé. Un jour encore, et tous les organes dont il a besoin pour vivre seront entièrement consolidés; il pourra briser son enveloppe. La figure 52, planche 9, nous présente un œuf dessiné à ce degré de développement. Les pattes s'y voient avec toutes leurs parties solides, ainsi que la pièce sternale et les épimères. La pièce sternale et les épimères offrent, à leur extrémité postérieure, une division qui n'est autre chose qu'une soudure encore incomplète de deux parties qui, isolées dans le principe, finissent par se réunir en une seule branche. On aperçoit encore très-bien sur cette figure, en *a, a,* les appendices armés de poils, qu'on pourrait prendre pour le rudiment d'une patte, si on ne les voyait se fondre sur l'enveloppe abdominale et porter les poils auxquels ils donnent naissance dans une position perpendiculaire aux contours de l'insecte. Cette remarque est en tout point applicable aux poils qu'on voit en *b, b,* même figure. Ce même œuf, vu par la face dorsale (fig. 53), nous montre les tubercules cornés des trois espèces parfaitement organisés. On sait qu'ils servent de point d'appui à l'insecte quand il veut prolonger son sillon. Cette figure permet, de plus, d'apercevoir le tube œsophagien *d,* qui va se perdre dans le tissu sarcodique abdominal. Quant à ce tissu sarcodique lui-même, il se forme aux dépens des cellules, et, suivant toute apparence, les granules, que celles-ci laissent en liberté quand leurs parois s'absorbent, sont destinés, les uns à former ces gouttelettes huileuses qui circulent au milieu du parenchyme intérieur; les autres, de tout temps reconnaissables, car leur forme et leur structure ne paraissent pas s'altérer, sont répandus au milieu du tissu sarcodique, surtout vers les grands centres de la circulation. C'est ainsi qu'on reconnaît ces granules sur la figure 53 de la planche 9, dans la direction de l'œsophage, et, sur les côtés, aux endroits où la région thoracique proémine sur les pattes.

Nous fixons le terme de l'incubation à dix jours en moyenne;

mais on conçoit facilement qu'elle peut varier d'un à deux jours, suivant les conditions plus ou moins favorables dans lesquelles le malade se trouve. Ainsi, un ouvrier qui, par la nature de ses travaux, aurait les mains longtemps exposées à une basse température, retarderait certainement les progrès de l'organisation de l'œuf. Nous sommes en droit de le croire, car notre étuve, dans ses variations de température, retardait ou avançait le temps de l'éclosion d'une manière assez régulière. L'embryon, arrivé à cette perfection, c'est-à-dire pourvu des organes essentiels de la nutrition et de la progression, est en état de vivre comme individu. Aussi, vers le onzième jour, on verra l'œuf céder sous les efforts du jeune insecte, se fendre transversalement ou longitudinalement dans toute son étendue et lui livrer passage. Nous avons eu maintes fois l'occasion d'assister de l'œil à l'éclosion de l'insecte, soit d'œufs soumis à l'incubation artificielle, soit d'autres œufs nouvellement extraits de leur sillon. Il n'est pas sans intérêt de voir la jeune larve essayer ses membres, et mouvoir pour la première fois les palpes et les mandibules; mais comme il n'y a, dans la structure des appareils et leurs fonctions, rien qui ne soit connu, nous ne nous y arrêterons pas davantage. Notons seulement que la larve, quoiqu'elle n'ait que six pattes, jouit d'une agilité extraordinaire et bien supérieure à celle d'un *acarus* pourvu de ses huit pattes. Cette différence dans l'agilité de l'*acarus*, suivant son âge, est tellement tranchée, qu'il suffit souvent d'apercevoir une larve en mouvement pour certifier que ce n'est pas un *acarus* arrivé à sa perfection. La larve de l'*acarus* présente une structure si peu différente de celle qu'elle aura huit ou dix jours après l'éclosion, qu'il est inutile d'en faire un dessin minutieux. Aussi l'avons-nous tout simplement esquissé à la figure 54, planche 9. Nous avons vu éclore cette larve; elle n'a bien que six pattes et ce sont manifestement celles de la dernière paire qui manquent. Si l'on en doutait, il suffirait, pour se convaincre qu'il en est ainsi, de jeter les yeux sur la figure 55, où cette dernière paire de pattes vient de se produire, ce que l'on reconnaît facilement à la différence

de volume des pattes postérieures entre elles. Le jeune *acarus* de la figure 55 a été trouvé sur nous le vingt-huitième jour de l'apparition de la maladie; il est, pour ainsi dire, complétement développé. Si la dernière paire de pattes avait acquis le volume qu'elle aurait eu quelques jours plus tard, on pourrait considérer l'insecte comme parvenu à son dernier degré de perfection. Le développement complet de la dernière paire de pattes postérieures n'est pourtant pas le seul changement que doive éprouver l'*acarus* pour passer de l'état de larve à celui d'insecte parfait; il est un phénomène plus général qui le métamorphose en quelque sorte : nous voulons parler de la première mue. C'est là, en effet, la dernière phase que la larve subira pour revêtir enfin tous les caractères de l'insecte parfait. Il se passe généralement huit à dix jours entre l'éclosion de l'œuf et la première mue de la larve à laquelle il a donné naissance. Nous avons pu nous en assurer sur un jeune *acarus* qui était depuis dix jours dans son premier sillon, et que nous avons surpris se dépouillant des derniers lambeaux de son enveloppe. Il est en partie représenté planche 56, où l'on voit les débris de son test, embarrassé dans les longs poils de deux de ses pattes postérieures, en *r, r, r.*

Ici se termine l'étude de l'insecte de la gale. Nous en avons fait l'anatomie, la physiologie et l'ovologie : comme ces trois questions capitales ont un rapport direct avec la pathologie, nous en ferons de fréquentes applications dans la troisième partie, qui traitera de la gale proprement dite[1].

[1] Comme c'est en raison de mes recherches d'entomologie que l'Académie a voté l'impression de mon travail dans les Mémoires des Savants étrangers, la partie médicale en a été distraite; j'ai cru devoir la faire paraître à titre de supplément dans un tirage à part.

ADDITION

AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Les dernières feuilles de cet écrit étaient sous presse, quand un hasard a fait découvrir à M. Lanquetin, élève externe à l'hôpital Saint-Louis, qui cherchait des *acarus* pour M. Bourgogne, préparateur, le sarcopte mâle de la gale de l'homme. On se rappelle que nous n'avions jamais pu rencontrer d'*acarus* mâle : aussi est-ce avec empressement que nous nous sommes remis à sa recherche, après avoir toutefois constaté l'exactitude de la découverte imprévue de M. Lanquetin. L'*acarus* mâle, disons-le par anticipation, ne fait pas de sillon, et comme nous l'avons toujours cherché dans le *cuniculus* que trace l'insecte, on comprend facilement pourquoi nous n'avons jamais pu le trouver.

Si nous nous étions livré à l'étude des *acarus* en général, et plus spécialement de celui du mouton et du cheval, avant d'entreprendre nos recherches sur l'*acarus* de l'homme, tout porte à croire que la présence de cet arachnide mâle ne nous aurait pas échappé. Instruit alors, comme nous le sommes aujourd'hui, des conditions dans lesquelles la fécondation s'opère, des métamorphoses que l'insecte subit, nous aurions su que la femelle, une fois fécondée, ne réclame plus l'approche du mâle; qu'un seul accouplement suffit à la fécondation d'un grand nombre d'œufs, alors même que la période de la ponte ne succède pas directement à celle de l'accouplement : nous aurions facilement compris pourquoi les *acarus* fécondés ne sortaient plus de leur sillon; pourquoi enfin nous ne trouvions pas de mâle dans les sillons proprement

dits, attendu que la fécondation ne peut s'y faire. La loi de la fixité, à la période de la ponte, pour les femelles fécondées; et celle de la mobilité, pour les femelles non fécondées, et surtout pour les mâles, nous aurait frappé. De ces études d'entomologie comparée, en un mot, nous aurions infailliblement conclu, comme nous l'avons fait depuis, et avant la découverte réelle du mâle, que l'*acarus* femelle, à la période de la ponte, faisait seule de longs sillons, et que la femelle, à la période de l'accouplement, et surtout le mâle, pendant toute sa vie, se contentaient de fouir l'épiderme pour y trouver un abri, y vivre et s'y accoupler.

Partant de ces données générales, j'ai transporté de nouveau à l'hôpital Saint-Louis mon microscope mobile, et avec l'agrément de M. Hardy, qui a succédé à M. Bazin dans le service spécial aux galeux, je me suis mis à la recherche du mâle. Cinq malades, atteints de la psore depuis plusieurs mois, couverts d'éruptions, et qui portaient aux mains de nombreux sillons, avaient fatigué mes minutieuses investigations pendant plusieurs heures; je désespérais de mon exploration, quand j'aperçus, sur un sixième malade, un petit insecte enfoui sous l'épiderme : c'était un mâle. — Je l'ai dessiné immédiatement au microscope, et en ai adressé le dessin à l'Académie des sciences, dans sa séance du 20 octobre 1851, ainsi qu'une courte description des caractères distinctifs de l'insecte. J'offris de plus à l'Académie de faire graver le dessin et d'en joindre un *fac-simile*, à titre de supplément, à tous les exemplaires du tome XII des *Savants étrangers*. Une commission, par l'organe de son rapporteur, M. Duméril, proposa, dans la séance du 27 octobre, d'accepter l'addition proposée, et l'Académie ratifia par son vote les conclusions du rapporteur.

Comme nous aimons à rendre justice à qui de droit, nous citerons un passage qui prouve qu'Eichstedt a, sinon découvert, du moins soupçonné l'existence de l'*acarus* mâle.

Nous lisons dans l'Anatomie pathologique de G. Simon, de Berlin, 1846, une notice de Froriep, où il est dit; « Qu'Eichstedt voulant examiner si, par hasard, il existait aussi librement des

acarus sur les mains et dans les plis de la peau, entreprit, à l'aide d'une forte loupe, des recherches sérieuses sur les mains des galeux. Jamais il ne trouvait d'insecte libre sur les mains; mais il en voyait souvent qui étaient enfouis dans la peau, sans former de sillons, de manière à n'être recouverts que par une couche très-mince d'épiderme. Ces insectes apparaissaient comme de petits points blancs à peine visibles, sans former de soulèvement, bien moins encore de vésicules. Eichstedt prend les *acarus* ainsi logés pour des mâles. Ils se distinguent de ceux qui sont trouvés dans les sillons, principalement parce qu'ils sont un peu plus petits, que les segments du corps se dessinent plus nettement, que les soies paraissent plus longues. » On voit, par cette citation, que nous avons fait à Eichstedt la part qui doit lui revenir, en reconnaissant qu'il a entrevu l'*acarus* mâle. Dire que le mâle se distingue de ceux qui sont logés dans les sillons, principalement parce qu'il est plus petit, parce que les segments de son corps se dessinent plus nettement, que ses soies paraissent plus longues, n'est pas signaler, tant s'en faut, un caractère de valeur propre à distinguer un mâle d'une femelle. Sans vouloir contester à Eichstedt la valeur de ses recherches sur la gale, à propos du mâle, on peut dire qu'il laissait après lui, au point de vue entomologique et pathologique, un grand vide à remplir.

Quoi qu'il en soit, nous allons donner la description de l'*acarus* mâle; dire quelques mots de sa physiologie, surtout au point de vue des fonctions de la reproduction, et déduire, de ces deux ordres de faits, quelques applications à la pathologie.

L'*acarus* mâle de la gale chez l'homme est, comme la femelle, testudiniforme; son volume, qui dépasse à peine celui d'une jeune larve, est de 1/5 de millimètre en longueur, de la tête à la région anale, et de 1/6 de millimètre en largeur. Nous l'avons dessiné et gravé, planche 10, fig. 58; et, pour rapprocher les points de comparaison à établir entre lui et la femelle, celle-ci est également représentée, figure 57. Le mâle est figuré à un grossissement de 300 diamètres; la femelle, à une amplification de 180 dia-

mètres seulement; et, bien qu'il y ait 120 diamètres d'amplification en faveur du mâle, la femelle, comme il est facile de le voir à l'œil nu, l'emporte encore d'un quart sur lui. On aurait une idée assez exacte de la différence réelle qui existe entre le volume du mâle et celui de la femelle, en comparant entre elles les figures 8, planche 2, et 58, planche 10. Mais le volume, les formes extérieures, ne peuvent offrir que des caractères distinctifs secondaires ; les organes génitaux seuls ont une importance réelle, décisive : fixons donc sur eux notre attention.

L'*acarus* mâle porte ses organes sexuels, comme la plupart des *acarus*, du côté de la face abdominale, entre les épimères des pattes postérieures (fig. 58, pl. 10, *f, f'*). La femelle, placée au-dessous (fig. 57), ne présente, au contraire, rien de semblable dans la même région. L'appareil génital se distingue parfaitement, quand on place l'insecte entre les deux lames de verre du compresseur, et de façon à diriger la face abdominale en dessus, du côté de l'observateur, comme dans la figure 58 Il est composé de trois parties principales : une première, qui prend naissance entre les épimères de la dernière paire de pattes postérieures, et se divise en deux branches *f', f'*; une seconde, *p, p,* comprise dans les divisions de la première; enfin, une troisième, *r, r,* également enclavée dans les deux divisions de la seconde.

La première partie, large à son extrémité antérieure, se rétrécit en *f,* s'élargit de nouveau, puis bientôt se divise en deux branches, qui se dirigent en arrière (*f', f'*), superficiellement par rapport au second organe, dont les divisions se portent directement en dessous et en dehors. La seconde partie, *p, p,* se trouve circonscrite, en avant, par les deux branches de la première à leur naissance; elle présente au point médian, d'où partent ses propres divisions, un corpuscule en forme de glande en *s*. La troisième partie est circonscrite en avant par la seconde; elle porte également un corpuscule glanduleux *t,* qui prend naissance sur la ligne médiane, vers son bord externe, et se dirige en avant vers

la glandule *s* de la seconde partie. Des filaments, qui se déchirent sous l'effort du compresseur, se rendent de l'un à l'autre des corpuscules glanduleux. Enfin, les branches du troisième organe vont se perdre en arrière et en dehors *r, r.*

Telle est la disposition des organes composant l'appareil génital, examinés sur le premier *acarus* mâle que nous ayons trouvé. Nous ajouterons qu'il était peu favorable à l'observation : l'une des pattes, celle placée en dedans et à droite, avait été blessée par l'aiguille, aussi ne s'est-elle pas étendue comme les autres. On ne sera donc pas surpris d'apprendre que nous n'avons pu découvrir, et par conséquent dessiner un organe qui se remarque sur les *acarus* mâles des autres espèces animales, nous voulons parler de l'organe essentiellement propre à la copulation, qui naît d'ordinaire dans l'abdomen, au niveau et au-dessous de l'appareil décrit plus haut, sous l'apparence d'un filament, et qui va s'effilant à mesure qu'il se dirige en arrière. Ce filament, qui n'est autre chose qu'un pénis rudimentaire, sort de sa gaîne pendant l'accouplement, à quelque distance de l'ouverture anale, sans avoir rien de commun avec cette dernière, et pénètre ainsi dans le cloaque de la femelle. On voit facilement ce pénis rudimentaire sortir des organes sexuels de la femelle, chez les *acarus* du cheval ou du mouton, quand on les observe au microscope pendant l'accouplement. Le compresseur permet même d'éloigner le mâle et la femelle accouplés, à ce point seulement, de mettre entre eux un espace libre, au milieu duquel apparaît le pénis du mâle. Lorsque la compression diminue, les deux insectes se rapprochent, et l'organe rentre dans le cloaque de la femelle. Si la compression est poussée trop loin, la séparation complète s'opère, et le pénis du mâle rentre complétement dans sa gaîne intérieure : en un mot, tout porte à croire, par analogie, que l'*acarus* de l'homme a son spermatophore, bien que nous n'ayons pu le constater. Il nous aurait été possible, il est vrai, de pousser plus loin notre examen, en sacrifiant les autres mâles que nous avons trouvés; mais ils devaient servir à d'autres sujets d'études.

L'appareil génital de l'*acarus* de l'homme plonge au milieu du tissu sarcodique, qui l'isole même de la face interne de l'enveloppe abdominale. Il n'a aucun rapport avec les épimères des pattes postérieures *g*, *g*, qui naissent à son niveau dans le tissu sarcodique. Il va sans dire que les pattes postérieures *l*, *l* — *m*, *m*, que la compression a fortement aplaties sur la face abdominale, sont tout à fait libres en dehors, depuis leur naissance à l'épimère, bien qu'elles paraissent, par le défaut de perspective dans les divers plans, occuper le même point du foyer optique que les organes génitaux. L'intestin rudimentaire qui conduit les fèces à l'ouverture anale passe au-dessus de l'appareil génital, si l'on considère l'insecte reposant sur l'abdomen; il passe, au contraire, au-dessous, dans la position que nous avons donnée à l'insecte (fig. 58).

Les organes génitaux de l'*acarus* mâle de l'homme ont un développement considérable eu égard au volume de l'insecte : il s'en faut que ceux de l'*acarus* mâle du cheval ou du mouton soient aussi apparents. Il sera donc facile, sans y apporter une grande attention, de distinguer le mâle de la femelle. Si par hasard, l'insecte mâle se trouvait recouvert, comme cela arrive quelquefois, de pellicules ou de corps étrangers qui empêchassent d'apercevoir les organes sexuels, l'observateur pourrait encore reconnaître le mâle de la femelle à l'inspection des pattes postérieures. Le mâle, en effet, porte constamment un ambulacre armé d'une ventouse à la dernière paire des pattes postérieures (fig. 58, *m*, *m*), tandis que la femelle est pourvue d'un long poil aux mêmes pattes (fig. 57, *e*, *e*). Il suffit donc de découvrir l'extrémité de la dernière paire des pattes postérieures pour dire, avec certitude, si c'est un mâle ou une femelle qu'on a sous les yeux. Mais les organes génitaux, l'ambulacre armé d'une ventouse, ne sont pas les seules différences d'organisation qu'on remarque entre le mâle et la femelle : la conformation des épimères des pattes postérieures offre un caractère distinctif aussi constant, comme il est facile de le voir en comparant les épimères des pattes posté-

rieures du mâle (fig. 58, *g*, *g*), qui sont réunis en une seule pièce, avec ceux de la femelle (fig. 57, *x*, *x*).

L'inspection de la face dorsale permettrait encore, jusqu'à un certain point, de reconnaître les sexes. Nous avons dit (§ 67) que la femelle porte sur la face dorsale, qui est convexe et sinueuse, des appendices cornés de trois espèces, différents en volume et en grandeur, et d'autant plus petits qu'ils sont plus rapprochés du sommet de la convexité. (Voyez pl. I^re^, fig. 1, les organes marqués *i*, *i*, *i*, — *d*, *d*, *d*, et *c*, *c*, *c*.) On se rappelle qu'ils rendent possible la marche de l'insecte dans les sillons; eh bien! ces appendices cornés, si nécessaires à la femelle, manquent en grande partie chez le mâle, sa face dorsale est plus plate, et l'on n'y compte guère que quelques appendices du volume de ceux marqués *d*, *d*, et *c*, *c*.

L'*acarus* mâle diffère encore de la femelle par son aspect général; il n'est jamais blanchâtre, brillant, replet, globuleux, mais, au contraire, noirâtre, aplati, irrégulier dans ses contours. Un angle rentrant se remarque principalement sur ses bords, au niveau des pattes postérieures. Son agilité est extrême. Déposé sur la peau en même temps qu'une femelle, celle-ci agite à peine ses pattes, que déjà il fuit avec rapidité.

Les différences d'organisation que nous avons mentionnées entre le mâle et la femelle doivent nécessairement entraîner quelques modifications dans leurs fonctions vitales, et fournir des notions nouvelles applicables à la pathologie. Arrêtons donc notre attention sur ces divers points.

L'*acarus* mâle passe, comme la femelle, par l'état de larve, avec six pattes seulement, avant d'arriver à l'état d'insecte parfait, et rien pendant cette phase de son existence ne fait soupçonner quel sera son sexe. Mais bientôt la première métamorphose se prépare; l'insecte jette sa première enveloppe et apparaît pourvu de ses huit pattes et des organes propres à son sexe : tel il sort de cette première transformation, tel il restera toute sa vie. Il existe pour vivre et s'accoupler; suivons-le dans l'accomplissement de ses fonctions.

Qu'il se trouve sur la peau, par l'effet d'un développement régulier qui d'embryon l'a fait insecte parfait, ou qu'il y soit transporté par l'effet d'une transmission directe, d'un galeux à un homme sain, son premier soin est de trouver un gîte. Il met à cette recherche une activité extraordinaire; il explore la peau en tous sens, et s'arrête à toutes les aspérités de l'épiderme. On dirait qu'il a conscience du danger qu'il court et qu'il a hâte de rencontrer un abri : au bout de quelques minutes, il fait enfin choix d'un lieu propice et attaque l'épiderme avec non moins d'ardeur et d'activité, si bien, qu'au bout de dix minutes ou d'un quart d'heure, il est complétement caché sous l'épiderme. Le malade, comme nous l'avons déjà dit pour la femelle, n'a d'ailleurs aucunement conscience de ce travail de l'insecte; il ne ressent aucune démangeaison.

L'organisation de l'*acarus* mâle rend compte de son agilité et de sa force, relativement plus considérables que celles de la femelle. Il n'a pas à traîner, comme celle-ci, un lourd abdomen à peine soulevé par les pattes postérieures ou les longs poils qui les terminent. Son corps est trapu, de diamètres sensiblement égaux, et toujours en parfait équilibre sur le plan où il repose. Les pattes, pendant la marche, supportent l'arrière-train et le tiennent toujours de niveau avec la tête. Mais ce n'est pas tant à la conformation essentiellement plus avantageuse de son corps, que le mâle doit la liberté de ses mouvements, qu'à la ventouse ambulatoire qui arme sa dernière paire des pattes postérieures. Cette puissance, en effet, double l'activité de sa marche, indépendamment de la supériorité qu'elle lui assure dans les luttes qu'il doit soutenir avec les femelles.

Une fois caché sous l'épiderme, l'insecte mâle y pompe, comme la femelle, les sucs nourriciers que réclament ses besoins, et la nuit suivante, il quitte son gîte pour aller à la recherche des femelles. J'en ai observé plusieurs sur un malade soumis à l'expérimentation, et toutes les vingt-quatre heures, ils abandonnaient le lieu où ils avaient séjourné la veille. Le mâle, d'ailleurs, ne

se trompe pas dans le choix des femelles qui sont propres à l'accouplement ; guidé par son instinct, il sait éviter les sillons où vivent les insectes parvenus à la période de la ponte, et découvrir le gîte des femelles non fécondées. Celles-ci ne font pas de sillons proprement dits, mais elles n'abandonnent pourtant pas, aussi fréquemment que les mâles, la place qu'elles ont occupée; elles y restent quelquefois plusieurs jours, et ne font d'ailleurs à l'épiderme ces petites ouvertures qu'on remarque sur les longs sillons qui renferment des œufs, que quand elles ont tracé un *cuniculus* d'un centimètre, par exemple. Ainsi cachées, les femelles attendent l'arrivée des mâles, qui, grâce à leur agilité, peuvent, d'ailleurs, en peu d'heures, explorer en quelque sorte tout le corps du malade. Lorsqu'un mâle a rencontré le gîte d'une femelle vierge de tout accouplement, il y pénètre par l'ouverture encore béante, détache l'épiderme, élargit l'enceinte, s'il la trouve trop étroite, et attaque la femelle. Nous avons trouvé, sur les onze heures du soir, deux mâles et une femelle sous la même pellicule épidermique et se livrant une lutte acharnée : troublés par le contact de notre aiguille, qui avait détaché la voûte cutanée qui les recouvrait, et peut-être aussi par l'impression de l'air extérieur, les mâles abandonnèrent les femelles et résistèrent à toutes les excitations que nous pûmes provoquer en les ramenant vingt fois sur les femelles.

Nous cherchons, en ce moment, à l'hôpital Saint-Louis, à surprendre les insectes mâle et femelle accouplés; nous avions, dans cette intention, réuni sur un même malade, cinq mâles trouvés avec les plus grandes peines sur une cinquantaine de galeux, et parmi deux ou trois cents insectes. De jeunes femelles rencontrées, comme les mâles, sous l'épiderme, mais non dans des sillons proprement dits, avaient également été déposées dans le voisinage des cinq mâles que nous observions avec soin, et qui abandonnaient quotidiennement leur gîte. Nous attendions beaucoup de ces expériences préparées avec tant de soin, quand le malade, manquant à l'engagement qu'il avait pris de rester à l'hôpital, se

prêta à un erreur involontaire de la part du surveillant qui conduit les galeux à la *frotte*, se frictionna avec les autres malades, et tua, par une seule friction, tous les mâles que nous avions accumulés sur lui. Depuis lors, deux autres malades nous ont joué le même tour, malgré les apparences du plus entier dévouement. On ne saurait imaginer quelles difficultés entourent de pareilles études. L'individu le plus indifférent ou le plus résolu, ne voit pas longtemps de sang-froid les insectes s'accumuler sur lui ; son imagination grandit les impressions qu'il ressent et les périls impossibles qu'il court. Nous allons encore continuer ces observations, dont le résultat définitif sera publié dans le journal de médecine *l'Union médicale;* mais nous doutons qu'elles nous conduisent au but désiré.

Nous n'avons, jusqu'à ce jour, rencontré que sept mâles ; et dans les rapports suivants : deux fois, deux mâles réunis avec une seule femelle, soit quatre mâles pour deux femelles seulement ; deux autres fois, un mâle seul avec une femelle; enfin, une troisième fois, un mâle seul sans femelle. Les mâles que nous avons trouvés au nombre de deux avec une seule femelle étaient à l'état de veille, aux prises l'un avec l'autre, derrière la femelle, qui cachait sa tête sous l'épiderme, et d'une sécheresse et d'une maigreur extrêmes : à première vue, ils ressemblaient bien plus à de petits morceaux d'épiderme racornis qu'à des insectes vivants ; mais, à leurs mouvements, aux déplacements qu'ils éprouvaient en se renversant à droite ou à gauche, on les distinguait facilement. Ces mâles, réunis fortuitement dans le gîte de la même femelle, se disputaient très-probablement sa conquête, et la victoire incertaine laissait les lutteurs épuisés de fatigue et de besoin. Les quatre mâles, trouvés ainsi deux à la fois avec une seule femelle, ont présenté cet état de maigreur et de dépérissement. Il faut pourtant ajouter que, placés sur la peau et à l'entrée d'un petit soulèvement de l'épiderme, ils n'ont pas tardé à s'y blottir et à s'y cacher. Les mâles rencontrés avec une femelle pour chacun d'eux, étaient manifestement en rut; car, à peine dé-

posés sur la peau, ils ont pris la fuite en toute hâte, ce que ne fit pas le mâle trouvé seul et surpris dans le sommeil.

D'autres considérations font encore facilement comprendre pourquoi l'accouplement ne s'effectue pas sur la peau. L'*acarus* de l'homme est un insecte essentiellement fouisseur; l'organisation de ses palpes et de ses mandibules le prouve : d'autre part, la fonction si importante de la reproduction ne pouvait s'opérer dans un lieu où rien n'aurait protégé les insectes contre les causes extérieures de destruction. Le moindre souffle, le moindre frottement les aurait emportés: le froid les aurait saisis. D'ailleurs, jamais aucun observateur n'a trouvé, même accidentellement, des insectes sur la peau. Il pourra nous arriver de rencontrer des mâles pendant la nuit, à la recherche des femelles, ou de jeunes larves abandonnant le sillon où elles viennent d'éclore ; nous pourrons même ainsi gagner la gale; mais hors de ces circonstances, l'insecte ne se trouvera jamais sur les téguments.

Nous croyons pouvoir conclure, en nous fondant sur toutes ces raisons, que l'accouplement a lieu sous l'épiderme.

Il va sans dire que nous avons essayé de mille façons à provoquer l'accouplement sous nos yeux, soit en portant un mâle tenu en charte privé dans le terrier d'une jeune femelle, soit en mettant plusieurs mâles parmi un grand nombre de femelles emprisonnées dans des lames de verre à godets, etc. etc. Tous nos efforts ont été vains.

Il ne nous serait pas impossible de dire dans quelle situation réciproque doivent se trouver le mâle et la femelle pendant l'accouplement, en prenant pour base de nos déductions la disposition des organes sexuels, la conformation des insectes eux-mêmes et le mode suivant lequel l'union des sexes a lieu chez les autres *acarus*. Mais comme, après tout, nous formerions des suppositions purement gratuites, nous préférons nous abstenir de toute hypothèse.

Le nombre des mâles est loin d'atteindre celui des femelles; il n'y a certainement pas un mâle pour dix femelles. Suivant que

la contagion de la gale est due à une ou plusieurs larves du sexe femelle, ou à une ou plusieurs femelles fécondées, un galeux peut présenter plusieurs sillons, plusieurs *acarus*, sans qu'aucun mâle se trouve parmi ces derniers.

Nous traiterons cette question avec le soin qu'elle mérite, dans les applications que nous allons faire de toutes ces données à la pathologie, et qui se trouveront dans les cent exemplaires tirés en supplément.

Un mot en terminant, à propos de la description synthétique qu'on pourrait donner de l'*acarus*, au point de vue de la classification.

Nous avons dit (§ 64) que nous ne nous hasarderions pas à définir l'*acarus* en quelques mots, encore moins à le classer; attendu que, définir un être, supposait la connaissance exacte des individus mâle et femelle qui, scientifiquement, le constituent; et que le classer, supposait également la connaissance des différents genres qui composent la famille à laquelle il appartient. Or, comme ni l'être en particulier, ni les genres de sa famille n'étaient connus, nous avons cru devoir nous abstenir de toute définition et de toute classification.

L'étude des *acariens*, nous ne saurions trop le répéter, est à refaire, malgré les travaux de MM. Latreille, Dugès, Gervais, Heyden, Hering, Dujardin, etc. etc. Mais comme aujourd'hui le mâle et la femelle de l'*acarus* de l'homme nous sont parfaitement connus, nous pouvons en donner une description synthétique et jeter ainsi le premier jalon de la classification des *acariens*.

Caractères généraux: — Insecte testudiniforme; tête à deux palpes adhérents, latéraux, onguiculés, et faux palpes, à quatre mandibules, superposées par paire, didactyles, les deux supérieures armées d'onglet; — quatre pattes antérieures articulées, pourvues d'un ambulacre caronculé ou à ventouse; — respiration par l'ouverture buccale, et non à l'aide de stigmates ou de trachées.

Femelles: — quatre pattes postérieures articulées, terminées par un long poil; — épimères des pattes postérieures séparées;

— nombreux appendices cornés sur la face dorsale ; — métamorphoses ; — 1/3 de millimètre en volume.

Mâles : — Organes sexuels très-distincts ; — ambulacre caronculé ou à ventouse à la dernière paire des pattes postérieures ; — épimères des pattes postérieures réunis ; — appendices cornés dorsaux en petit nombre ; — 1/5 de millimètre en volume.

Larves : — Hexapodes, sans organes sexuels distincts

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE PREMIÈRE.

Fig.

1. *Acarus* vu par la face dorsale à un grossissement de 275 fois. Cette face dorsale est naturellement convexe; dans cette figure, le compresseur l'a rendue plane.

   a. Tête de l'*acarus* entrevue au delà du foyer optique, qui porte exclusivement sur le dos.

   b. Ouverture anale.

   cccc. Appendices coniques et cornés; les plus développés, à canal intérieur.

   dddd. Appendices cornés, plus petits que les précédents.

   eee. Follicules pileux et petits poils, qui marquent le point précis où le tégument s'étend du corps sur la tête.

   ff. Follicules et poils.

   ii Appendices cornés du dernier ordre : les plus petits en volume.

   kkk. Contours extérieurs du corps de l'insecte, qui s'étendent sur les pattes de manière à les abriter.

2. Appendice conique de la face dorsale, avec son follicule et son canal. Au grossissement de 550 fois.

Fig.

3. Représente, à 260 fois d'amplification, les sinuosités qui apparaissent quand l'insecte se tourne à droite ou à gauche.

   a. Convexité antérieure du corps, qui empiète sur la tête.

   b. Convexité latérale, qui déborde sur la première paire de pattes.

   c. Scissure de séparation entre les parties du tronc qui empiètent sur les deux paires de pattes.

   dd'. Scissure produite par l'inclinaison du corps à droite en *d*, et effacée en *d'*.

   ee'. Scissure prononcée à droite en *e*, et effacée par la tension du corps à gauche en *e'*.

   ff. Tubercules cornés, de forme conique, qui sont plus ou moins en relief, suivant l'inclinaison du corps à droite ou à gauche.

   k. Follicule d'un appendice corné, vu debout, et qu'on pourrait prendre pour un stygmate.

4. Elle montre, à 260 diamètres d'am-

Fig.

plification, les divers plis ou sillons de la face abdominale.

m. Sillon profond, ou fente qui persiste à tous les degrés de compression. (Le graveur a exagéré sa teinte et sa profondeur.)

nn. Point précis où la patte postérieure devient libre sur la face abdominale.

5. A 260 fois de grossissement.

aa. Pièce claviculaire, vue par la face dorsale.

bb. Point où la branche verticale qui vient de la pièce sternale, s'unit à la lame claviculaire.

6. A un grossissement de 500 diamètres.

m. Pièce sternale.

nn. Épimères.

l. Partie cornée qui fait relief sur la pièce sternale, du côté de la face abdominale.

kk. Divisions internes de l'épimère.

rr. Divisions externes des branches sternales, qui donnent naissance à l'anneau de la première paire de pattes.

Fig.

ss. Divisions externes des épimères, qui donnent naissance à l'anneau de la deuxième paire de pattes.

tt. Branche externe de l'épimère, qui fait suite à celle qui donne naissance à l'anneau.

[1] *v.* Branche interne de la pièce sternale, qui s'articule avec les extrémités internes des deux pièces *trochanter* et *trochantin*, à la première patte antérieure gauche.

oooo. Appendices cornés dépendants de la branche externe de l'épimère ou de la pièce sternale, et donnant naissance à un follicule pourvu d'un poil.

i. Bordure cornée qui fait relief sur la pièce sternale.

7. A un grossissement de 250 fois.

cc. Pièce claviculaire, portée en avant par l'effet de la compression, et de manière à laisser voir, la branche verticale qui l'unit à la pièce sternale.

d. Branche verticale d'union entre les pièces sternale et claviculaire.

f. Pièce sternale.

i. Pièce claviculaire.

PLANCHE 2.

8. *Acarus* vu du côté de la face abdominale; soumis à une forte compression. A 300 fois d'amplification.

a. Tête entrevue au delà du foyer optique.

bb. Pattes antérieures.

cc. Ambulacres des pattes.

dd. Longs poils qui terminent les pattes postérieures.

ee. Pattes postérieures.

ff. Épimères.

g. Pièce sternale.

[1] Voyez la première patte antérieure gauche.

Fig

ii. Tubercules coniques et cornés.
kkk. Poils et leurs follicules.
lll. Épimères des pattes postérieures.
mm. Point précis où la patte devient libre.
nn. Appendices cornés, qui terminent l'épimère des pattes postérieures.
oo. Tubercules coniques, qui terminent le dernier article des pattes postérieures.
r. Ouverture anale.

Fig.

9. A un grossissement de 320 fois.

dd. Demi-portion de l'anneau, vue par la face abdominale.

10. A un grossissement de 200 fois.

a. Appendice corné, armé d'un poil, qui prend naissance sur la continuation de la branche externe de l'épimère.

PLANCHE 3.

11. Montre, à un grossissement de 180 fois, l'anneau étalé horizontalement sur ses bords, et la pièce claviculaire obliquement étendue en avant, de manière à laisser voir la branche verticale qui l'unit à la pièce sternale.

oo. Extrémité interne de la branche claviculaire, réunie à la branche verticale.
ppp. Anneau de communication entre le corps et les pattes.
tt. Articulations de l'anneau à la branche sternale et aux épimères.

12. Montre, à un grossissement de 340 fois, les fibres musculaires qui naissent des épimères et des pattes postérieures.

a. Apparence d'organe sexuel.
b. Pli tégumentaire qui simule une fente, et que la compression ne peut effacer.
xx. Fibres musculaires des pattes postérieures.
ββ. Fibres musculaires qui naissent des épimères.
μμ. Fibres musculaires ou nerveuses.
v. Ganglion central, probablement de nature nerveuse.

13. Insecte représentant, à un grossissement de 350 fois, les deux demi-portions de l'anneau, vues en même temps par la face dorsale.

aaa. Demi-portion superficielle.
bb. Demi-portion profonde.

14. Différents articles des pattes, vus du côté de la face d'extension, à un grossissement de 650 fois.

α. Point où les deux branches de la pièce superficielle se réunissent en une seule.
β. Branches transverses de cette pièce.
δ. Branche oblique.
φ. Ligament qui réunit les deux branches en dehors.
τ. Demi-portion de l'anneau vue sur le premier plan.

Fig.

π. Seconde pièce du premier article, vue profondément.
ω. Ligament du second article.
o. Pièce solide du second article.
μ. Ligament du troisième article.
ν. Pièce solide du troisième article.
$\alpha\beta'$. Quatrième article.
5. Cinquième article.
6. Tube de l'ambulacre.
γ. Canal intérieur du tube de l'ambulacre.
π'. Long poil.

15. Articles des pattes antérieures, vus par la face de flexion, à un grossissement de 850 fois.

α. Extrémité allongée de la deuxième pièce triangulaire.

Fig

β. Branche antérieure.
γ. Branche postérieure.
ω. Ligament qui réunit les deux branches.
ν. Branche solide du deuxième article.
μ. Branche double du troisième article.
ρ. Quatrième article.
5. Cinquième article.
6. Tube terminal.

16. Tube terminal des pattes antérieures, à un grossissement de 850 fois.

e. Naissance du tube au cinquième article.
a. Tube de l'ambulacre et son canal intérieur.
b. Ventouse terminale.
d Col qui unit le tube et la ventouse.

PLANCHE 4.

17. Première paire des pattes antérieures dans une flexion exagérée, et laissant voir la ligne courbe que décrivent les articles, à un grossissement de 350 diamètres.

rrr. Pièces solides des deuxième et troisième articles, vues du côté de la face de flexion, et montrant le demi-anneau qu'elles décrivent.

18.

ee. Fibres musculaires qui passent par l'axe, ou le centre de la patte; à un grossissement de 450 fois.

19. Pattes postérieures à 375 fois de grossissement.

a. Pièce qui se trouve sur le premier plan de la patte postérieure, vue par la face de flexion.
bb. Pièce qui se voit sur un second plan, ou qui est intermédiaire dans l'ordre de superposition.
d. Tubercule corné qui termine l'épimère.
c. Branche transverse du premier article.
h. Second article.
i. Branche en arc de cercle du premier article.

Fig.
20. Patte postérieure à 375 fois de grossissement.

b b. Pièce qui occupe le second plan.
c c. Extrémité de la pièce précédente et points où elle s'articule avec le premier article.
e. Branche transverse du premier article.
h. Deuxième article.
i. Arc de cercle du premier article.
k. Troisième article.
m. Naissance du poil terminal.
g. Poil terminal.

21. Patte postérieure à 375 fois de grossissement.

b. Pièce intermédiaire.
c c. Extrémités de la pièce précédente qui s'articulent avec le premier article.
e. Premier article.

Fig.
h. Deuxième article.
k. Troisième article.

22. Patte postérieure à 375 fois de grossissement.

b. Pièce intermédiaire.
c c. Extrémités de la pièce précédente.
e. Branche transverse du premier article.
h. Deuxième article.
i. Arc de cercle du premier article, vu dans une forte extension de la patte.

23. Pattes postérieures à 390 fois d'amplification.

f f. Pièce annulaire vue du côté de la face d'extension, et la plus superficielle de ce côté.
e. Arc de cercle du premier article, vu au-dessous de la pièce annulaire précédente.

PLANCHE 5.

24. Tête de l'*acarus* représentée du côté de la face dorsale, à un grossissement de 580 fois.

a a. Branches externes de la pièce à arceaux, ou superficielles.
b b. Arceaux de la pièce superficielle.
c c. Branches internes de la pièce à arceaux.
d. Lamelle qui unit les branches de la pièce à arceaux et qui la limite vers la base de la tête.
f. Réunion des deux arceaux.
k. Point où le palpe s'efface sous la pièce superficielle.
l. Union des arceaux à la pièce superficielle.
m m. Palpes.
n n. Mandibules.
θ. Petite pièce cornée qui tourne sur un axe vertical.
π π. Prolongement de l'enveloppe extérieure, placé entre la tête et la première paire de pattes.
ω ω. Fibres musculaires des mandibules.

Fig.

25. Tête de l'*acarus* vue par la face abdominale, à un grossissement de 400 diamètres.

oo. Pièce en fer à cheval la plus superficielle.
p. Valvule placée au-dessous de la pièce en fer à cheval.
rr. Extrémités antérieures de la pièce en fer à cheval, et point où se perd la branche interne des palpes.
ss. Faux palpes.
tt. Palpes principaux.
vv. Réunion des palpes à la pièce en fer à cheval.
zz. Appendices transverses qui concourent à former la lèvre inférieure.
γγ. Branches externes des palpes, et point précis où le faux palpe s'insère.
ωω. Appendices transverses.

26. Plancher inférieur de la tête, ou mieux pièces solides qui forment la lèvre.

ββ. Appendices transverses qui naissent en dedans des palpes.
γγ. Appendices qui naissent des tubercules de la pièce en fer à cheval.
ρρ. Autres appendices transverses de la lèvre.

27. A 450 fois d'amplification.

aa. Mandibules.
bb. Barre transverse qui fait relief sur les mandibules.
dd. Bordure cornée qui limite la mandibule en dedans et en arrière.

Fig.

ee. Tubercule corné qui termine la mandibule en arrière et en dehors.
f. Organe solide qui tourne sur lui-même dans les mouvements des mandibules.
ii. Onglets des mandibules.
p. Fibres musculaires des mandibules.

28.

k. Onglet des mandibules dans l'extension.

29.

ll. Mandibules secondaires.

30. A 430 diamètres d'amplification.

m. Conduit alimentaire placé au-dessous et entre les mandibules.
n. Valvule mobile.
o. Fibres musculaires de la valvule.
r. Ligament antérieur sur lequel se rendent les fibres musculaires antérieures de la valvule.

31.

m. Tube alimentaire buccal qui conduit les aliments vers la valvule.

32. A 420 fois de grossissement.

εε. Scissure qui sépare les articles des palpes.
δδ. *Idem.*
ss. Follicule armé d'un poil.
tt. Pièce à arceaux vue profondément.
yy. Poil qu'on aperçoit sur un plan plus profond.

Fig.
33. Naissance de l'œsophage et fibres musculaires des pattes antérieures, à 460 diamètres de grossissement.

a. OEsophage.
b. Naissance des fibres musculaires de l'œsophage de chaque côté de la valvule.
ccc. OEsophage débordant la pièce sternale.

Fig.
ii. Valvule.
kk. Fibres musculaires qui se rendent vers la patte.

34. A 380 fois de grossissement.

d. OEsophage vu du côté de la face dorsale; il contient des globules.
e. Globules qui se répandent dans le tissu sarcodique.

PLANCHE 6.

35. Train postérieur de l'*acarus*, à 275 fois de grossissement.

c. Ouverture anale.
d. Canal intestinal rudimentaire.
b. Bol excrémentitiel.
iii. Ligne qui semble limiter une sorte de cavité stomacale.

36. Centres circulatoires, à 275 diamètres de grossissement.

aa. Vésicules occupant un centre de circulation.
bb. Vésicules occupant un centre de circulation.
a'. Sorte de poche où les fèces sembleraient s'accumuler.
d. Canal intestinal rudimentaire.
c. Ouverture anale.

37. *Acarus* qui s'est dépouillé spontanément de son enveloppe sous l'influence de la compression, à une période de métamorphose.

a. Ouverture artificielle à travers laquelle le corps de l'*acarus* a passé.
b. Tête qui semblerait encore pourvue de ses organes intérieurs.
c. Tête de l'*acarus* dépouillé de son tégument.
ddd. Pattes antérieures de l'*acarus*.

38. Insecte qui contient un œuf dans son abdomen, à 375 diamètres d'amplification.

aa. OEuf contenant des granules.

PLANCHE 7.

39. Représente en *b*, un œuf déjà en partie développé, et situé plus antérieurement que cela n'a lieu habituellement.

40. *Acarus* dont l'abdomen renferme quatre œufs, à des degrés différents de développement.

c. Œuf ayant subi approximativement cinq ou six jours d'incubation.

Fig.

d. OEufs déjà développés.

e. *Idem.*

f. *Idem.*

41. OEuf au troisième jour de l'incubation, à un grossissement de 375 diamètres.

42. OEuf au quatrième jour d'incubation, à un grossissement de 450 diamètres.

43. OEuf qui s'est crevé sous le compresseur, au quatrième jour d'incubation; son contenu, qui s'est répandu au dehors, est composé de granules et de cellules comme huileuses.

44. OEuf au cinquième jour d'incubation, à un grossissement de 375 diamètres.

aa. Appendices de la première paire de pattes antérieures.

Fig.

bb. Groupes de cellules qui formeront la deuxième paire de pattes antérieures.

c. Groupe de cellules destiné à la première paire de pattes postérieures.

kk. Groupes de cellules destinées à former l'extrémité moyenne et terminale de la deuxième paire de pattes antérieures.

45. OEuf au sixième jour d'incubation, à un grossissement de 375 fois.

dd. Appendices de la première paire des pattes antérieures.

ee. Appendices de la deuxième paire des pattes antérieures.

ff. Appendices de la première paire des pattes postérieures.

ii. Appendices des follicules pileux latéraux.

gg. Cellules isolées, remplies de granules.

PLANCHE 8.

46. OEuf au sixième jour de l'incubation, à un grossissement de 450 diamètres.

aa. Première paire des pattes antérieures, portant la trace des trois groupes de cellules qui l'ont formée.

bb. Deuxième paire des pattes antérieures, portant la trace des trois groupes de cellules qui l'ont formée.

cc. Première paire des pattes postérieures, portant la trace des trois groupes de cellules qui l'ont formée.

f. Appendice formant la tête de l'*acarus*, vu sur un plan profond.

oo. Couche de liquide albumineux, simulant une seconde membrane d'enveloppe.

pp. Cellules granuleuses, non comprises dans le travail d'organisation, et répandues au milieu de l'espace libre compris entre la coque extérieure de l'œuf et la membrane qui re couvre l'embryon

Fig.
47. OEuf déjà représenté fig. 46, et vu du côté de la face dorsale de l'insecte.

ii. Ligne sinueuse formée par un groupe de cellules plus spécialement destinées au tissu sarcodique abdominal.

48. OEuf au sixième jour de l'incubation : l'embryon qu'il contient est vu sur le côté, et laisse voir très-distinctement les trois groupes de cellules qui forment chaque patte.

kk. Cellules qui terminent la patte.

ggg. Cellules qui occupent la partie moyenne de la patte.

lll. Cellules qui se perdent dans le corps de l'insecte.

m. Rudiment de l'anneau.

49. OEuf au septième jour d'incubation, en partie recouvert d'une pellicule épidermique; à une amplification de 450 fois.

Fig.
aa. Lignes qui naissent de l'appendice terminal des pattes pour former le tube de l'ambulacre.

e. Pellicule épidermique qui recouvre l'œuf.

50. OEuf au huitième jour de l'incubation, laissant voir les épimères; à un grossissement de 300 fois.

r. Pièce sternale.

s. Épimères.

t. Épimères de la première paire des pattes postérieures.

y. Appendice d'un follicule, pourvu de son poil, qu'on pourrait prendre pour une patte rudimentaire.

51. OEuf au neuvième jour d'incubation, à 450 fois de diamètre.

PLANCHE 9.

52. OEuf au dixième jour d'incubation, présentant l'embryon complétement développé; à un grossissement de 450 fois.

aa. Appendices qui supportent un poil et son pellicule.

bb. Appendice qui supporte un poil et son follicule.

53. Même œuf que celui présenté figure 52, mais vu par la face dorsale.

d. Tube œsophagien recouvert de granules.

54. Jeune *acarus* à l'état de larve, qui est éclos sous nos yeux. Le grossissement est de 375 fois.

55. Jeune *acarus* enlevé sur nous, huit jours après son éclosion. La deuxième paire de pattes vient de se développer à l'occasion de la première métamarphose, aussi est-elle visiblement moins volumineuse que la première paire.

56. Arrière-train d'un *acarus* surpris au milieu d'une métamorphose.

o. Poil filamenteux qu'on serait tenté de prendre pour un organe sexuel.

Fig.

rr. Lambeau d'épiderme dont l'*acarus* se dépouille. On reconnaît parfaitement, aux tubercules cornés que ce lambeau porte avec lui, qu'il faisait partie du tégument de la face dorsale.

PLANCHE 10.

57. *Acarus* femelle, vu par la face abdominale, à un grossissement de 180 diamètres, et montrant l'absence des organes génitaux entre les pattes postérieures.

a. Tête.
bbbb. Pattes antérieures.
cccc. Ambulacres à ventouse.
dddd. Pattes postérieures.
ee. Poil qui termine la dernière paire des pattes postérieures.
xx. Épimères des pattes postérieures, séparés, tandis qu'ils sont réunis chez le mâle.

58. *Acarus* mâle, représenté par la face abdominale, à un grossissement de 300 diamètres.

h. Tête.
kkkk. Pattes antérieures.
iiii. Ambulacres à ventouse.
gg. Épimères des pattes postérieures réunis et non séparés, comme sur la femelle.
f. Organe faisant partie de l'appareil génital.
f'f'. Branches dépendantes de l'organe précédent.
pp. Organe faisant partie de l'appareil génital.
s. Glandule dépendant de l'organe précédent.
rr. Organe faisant partie de l'appareil génital.
t. Glandule dépendant de l'organe précédent.
llll. Pattes postérieures.
mm. Ambulacre à ventouse qui termine la dernière paire des pattes postérieures.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 4

Fig. 3

Fig. 6.

Fig. 7

Fig. 5.

Gravé par Borromee

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 8

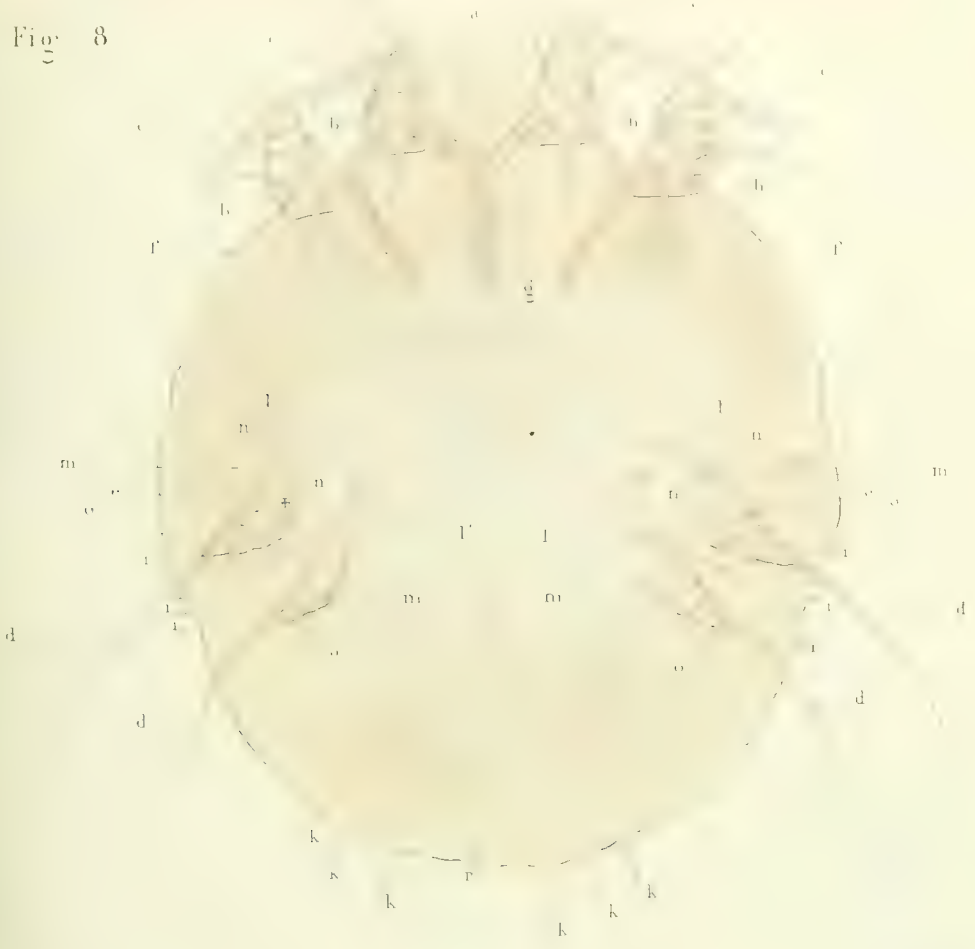
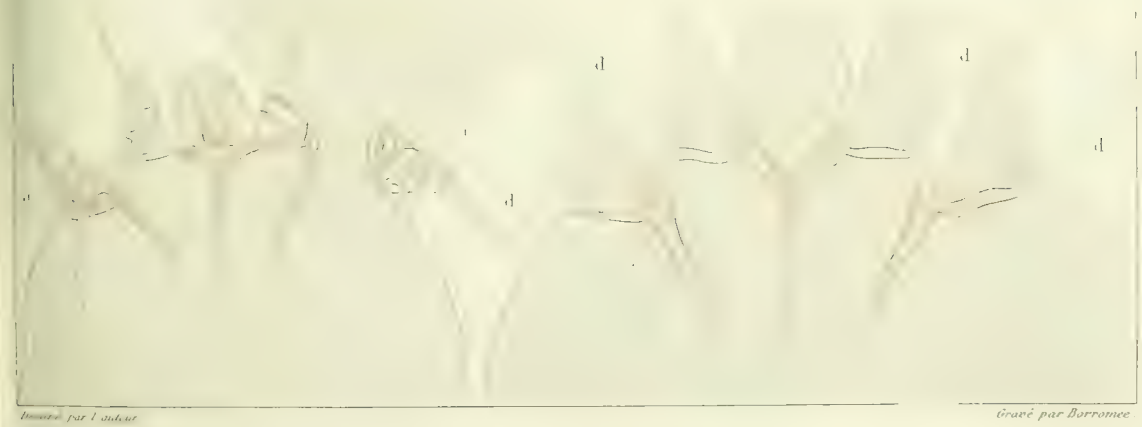


Fig. 10.

Fig. 9



Dessiné par l'auteur

Gravé par Borromée

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 12.

Fig. 11.

Fig. 15

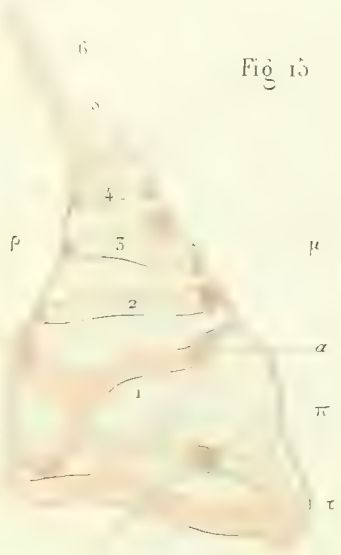


Fig. 16

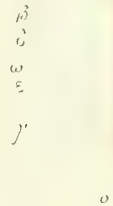


Fig. 14

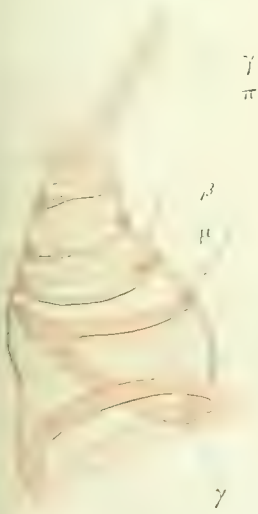


Fig. 13

Dessiné par l'auteur

Gravé par Barromee

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME

Fig. 17

Fig. 18.

Fig. 20

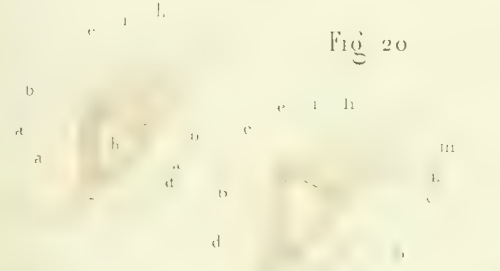


Fig. 23.

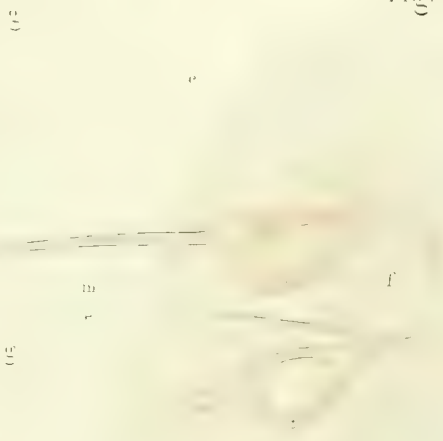


Fig. 19.

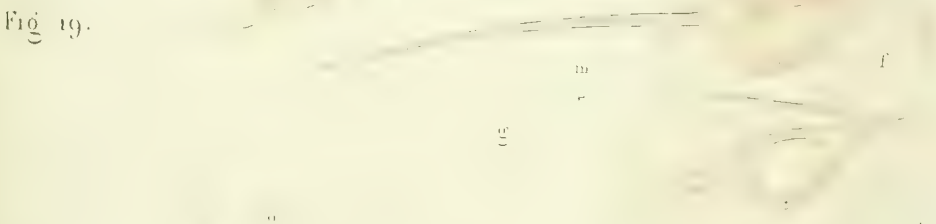


Fig. 21.

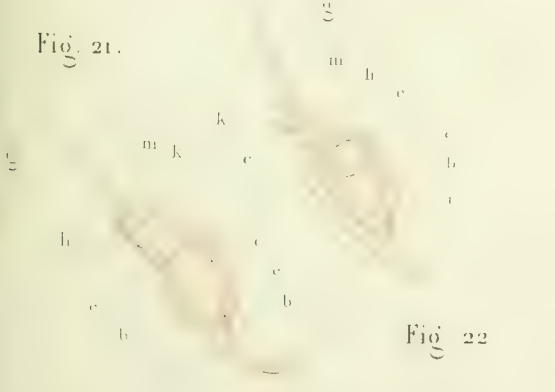


Fig. 22

Peint par Lestaleur

Gravé par Barrauède.

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 24.

Fig. 25

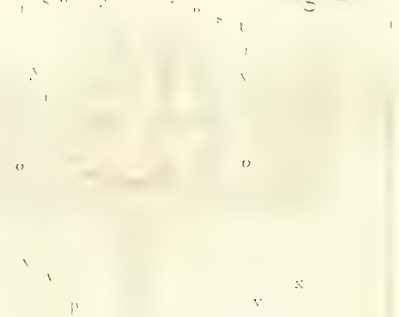


Fig. 30

Fig. 26

Fig. 32.

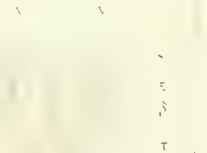


Fig. 27

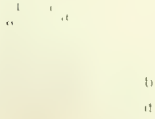


Fig. 31

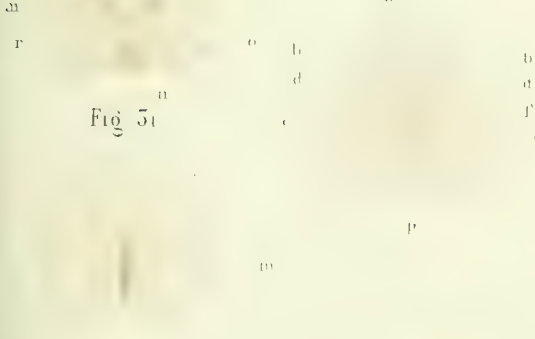


Fig. 29.

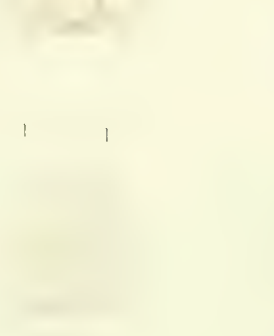


Fig. 28.

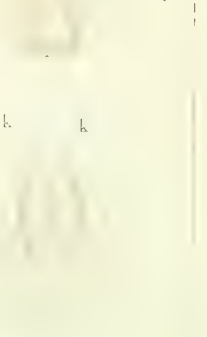
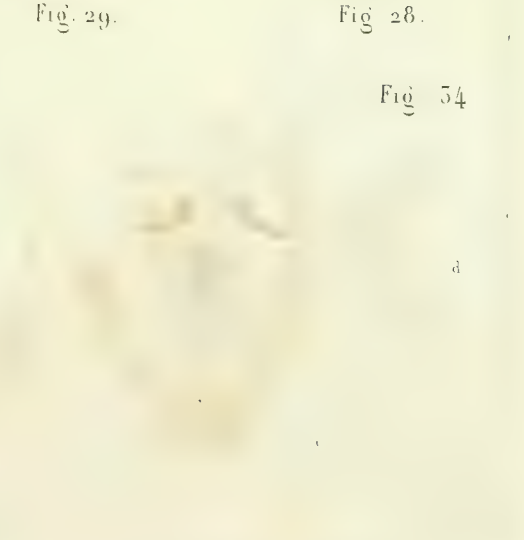


Fig. 33.

Fig. 34



Dessiné par Lemaire

Gravé par Berronier

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 38.

Fig 37

Fig. 36.

Fig 35

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 39

Fig. 40

Fig. 42

Fig. 45

Fig. 43.

Fig. 44

Fig. 41

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 51.

Fig. 46.

Fig. 49

Fig. 47.

Fig. 48

Fig. 50

Dessiné par Lauvac

Gravé par Sorrieu

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 54.

Fig. 55

Fig. 53.

Fig. 52

Fig. 56.

Dessiné par l'auteur

Gravé par Bertinet

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

Fig. 58.

Fig. 57.

Gravé par Barrevmée

ACARUS DE LA GALE CHEZ L'HOMME.

SUR L'ACCROISSEMENT

EN DIAMÈTRE

DES PLANTES DICOTYLÉES,

PAR MM. DURAND ET MANOURY.

Il n'est personne peut-être à qui il ne soit arrivé, en regardant un grand arbre et en reportant ses souvenirs sur sa graine, de se demander comment ce géant de la végétation a pu sortir d'un si petit œuf.

C'est, se répond-on, par des acquisitions successives, par des combinaisons nouvelles de la matière venant du dehors, que ce végétal s'est accru, la graine, une fois germée, étant une matrice organisée qui combine en d'autres matrices douées de la même faculté, si elles se trouvent placées dans les mêmes circonstances, les matériaux de l'air et de la terre.

Mais par quel mécanisme le développement en hauteur et en diamètre de ce végétal a-t-il lieu?

C'est une question qui a fixé l'attention des physiologistes de tous les temps. Le phénomène d'accroissement en diamètre, celui dont on s'est le plus occupé, n'a cependant commencé à être expliqué d'une manière convenable que par deux hommes célèbres, Grew et Malpighi, qui étudiaient à peu près à la même époque.

Ces deux savants attribuèrent l'accroissement en diamètre des tiges dicotylédones à un fluide organisateur qui coulait entre le bois et l'écorce, et que Grew nomma *cambium*.

Suivant Grew[1], le cambium formait directement le bois et l'écorce; d'après Malpighi[2], il donnait seulement naissance au liber, dont les couches se transformaient successivement en aubier.

Hales, qui vint après eux, pense que les émanations du corps ligneux[3] forment la nouvelle couche de bois au moyen de la séve montante, et que les émanations du liber forment en même temps une nouvelle couche libérienne au moyen de la séve descendante.

Le célèbre Duhamel-Dumonceau a fait un grand nombre d'expériences, la plupart fort ingénieuses, pour éclaircir ce sujet important. Il tire de ses expériences la conséquence que le liber se convertit, chaque année, en bois. « Lorsqu'au printemps, dit-il[4], le bois se sépare de l'écorce, il se forme dans le vide une substance particulière (le cambium) qui sert de moyen d'union entre la couche de bois et la couche de liber, lequel doit former la nouvelle couche ligneuse. »

Knight, dans ses recherches sur la formation de l'écorce[5], décrit des expériences d'où il conclut que jamais le liber ne se change en aubier.

M. de Mirbel, dont les opinions ont varié sur le développement en diamètre des tiges, émet d'abord celle[6] que le cambium est la source de l'accroissement du végétal; que cette substance régénératrice, qui n'est renfermée dans aucun vaisseau, transsude à travers les membranes et se porte partout où de nouveaux développements s'opèrent; que c'est le cambium qui développe et nourrit le liber; que ce dernier (le liber) étant composé de tissu cellulaire et de bois, il se fait une séparation entre ces deux parties constituantes : le tissu cellulaire, en se portant vers l'extérieur, entraîne avec lui les couches les plus externes du liber, tandis que

[1] *Anatomy of plants.*
[2] *Plantarum anatome.*
[3] *Traité de la végétation.*
[4] *Physique des arbres.*
[5] *Philosophical transactions of the royal Society of London;* 1808.
[6] *Traité d'anatomie et de physiologie végétales; éléments de physiologie végétale et de botanique.*

les couches les plus intérieures du même liber se réunissent au bois.

M. Kieser soutient[1] que la séve monte des racines par le bois dans les feuilles; qu'après avoir subi, dans les parties vertes de la plante, l'action de l'air et de la lumière, elle redescend, à l'état de suc nourricier ou de cambium, entre l'écorce et le bois, se dépose entre ces deux organes en formant une nouvelle couche d'aubier et une nouvelle couche de liber.

En 1816, M. de Mirbel revint sur l'opinion qu'il avait émise dans ses précédents ouvrages. Il reconnut qu'il s'était trompé, et déclara que le liber ne devient jamais bois. « Il s'écoule (nous transcrivons)[2] entre le liber et le bois une couche qui est la continuation du bois; cette couche régénératrice est le cambium. Le cambium n'est point une liqueur qui vient d'un endroit ou d'un autre; c'est un tissu très-jeune qui continue le tissu plus ancien : il est nourri et développé par une séve très-élaborée. Le cambium se développe à deux époques de l'année entre le bois et l'écorce, au printemps et à l'automne. Son organisation paraît identique dans tous les points; cependant, la partie qui touche l'aubier se change insensiblement en bois, et celle qui touche le liber se change insensiblement en liber. Cette transformation est perceptible à l'œil de l'observateur. »

M. Dutrochet a émis, sur l'accroissement en diamètre une opinion que nous devons faire connaître. Suivant ce célèbre physiologiste[3], les couches ligneuses de nouvelle formation qui se développent, chaque année, sont séparées des anciennes par une couche mince de médulle ou tissu utriculaire. C'est cette couche de médulle qui, d'après M. Dutrochet, donne naissance aux couches ligneuses. Au printemps, l'accroissement en épaisseur com-

[1] *Mémoire sur l'organisation végétale*, qui a remporté le prix proposé par la Société theylerienne; 1812.

[2] Note insérée au *Bulletin des sciences de la Société philomathique;* 1816.

[3] *Mémoires pour servir à l'histoire anatomique et physiologique des animaux et des végétaux*, t. I.

mence par la formation de cette couche mince de médulle; bientôt, par la propriété de donner naissance à des fibres longitudinales, cette couche de moelle produit les vaisseaux qui l'environnent et constituent ainsi une sorte de canal médullaire destiné à devenir plus tard la nouvelle couche ligneuse.

M. Achille Richard, qui admet la théorie du cambium professée par M. de Mirbel, ne donne pas à ce mot la même signification que le célèbre professeur du Jardin des Plantes. Pour M. Richard, en effet, le cambium[1] n'est point le tissu qui se transforme en liber et en aubier; il fournit seulement aux tissus déjà formés les matériaux qui leur sont nécessaires pour donner naissance à un nouveau liber et à de nouvelles couches ligneuses. Ces nouveaux tissus se montrent d'abord sous la forme d'utricules avant de devenir fibres ou vaisseaux : ainsi la couche celluleuse qui unit le bois à l'écorce se transforme en aubier et en liber, et cette couche celluleuse s'augmente et se reproduit incessamment par l'afflux de sucs nutritifs, c'est-à-dire du cambium, comme les tissus animaux s'augmentent ou se reproduisent incessamment au moyen du sang.

Enfin, dans un travail récent[2] fait conjointement avec M. Payen, M. de Mirbel semble revenir à l'opinion le plus généralement admise sur la nature du cambium. En effet, il atteste que le cambium ou la matière globulo-cellulaire (comme il l'appelle aussi) précède toujours l'apparition des cellules.

Ces diverses théories proposées pour expliquer le phénomène d'accroissement en diamètre des tiges dicotylées, quoiqu'elles diffèrent pour la plupart les unes des autres, se ressemblent néanmoins par deux points importants : 1° elles font intervenir un fluide nourricier sur la nature duquel elles ne sont pas d'accord, et qu'elles désignent le plus généralement sous le nom de *cambium;* 2° elles admettent une similitude complète entre les tissus utriculaires primitifs et les tissus fibro-vasculaires.

A toutes ces théories, que nous désignerons par un nom com-

[1] *Nouveaux éléments de botanique et de physiologie végétale.*

[2] *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Juin 1843.

mun : *théories du cambium*, il y a déjà longtemps qu'on en a opposé une autre, dont les premiers éléments descriptifs sont dus à de Lahire, à A. G. Agricola, et ensuite à Aubert Dupetit-Thouars.

De Lahire émit[1] l'idée que les bourgeons sont les agents essentiels du développement des tiges en diamètre, et que c'est de leurs bases que partent et descendent les fibres qui augmentent la grosseur des végétaux. Cette nouvelle théorie, décrite en peu de lignes et sans preuves à l'appui, ne fut pas remarquée des physiologistes.

Vinrent les travaux d'Agricola, dans lesquels on trouve, entre autres choses relatives à la question que nous examinons, le passage suivant : « On peut donc dire[2] avec vérité que les branches, jets et feuilles, ont aussi des racines par le haut, etc. Oui, il est certain que si quelqu'un seulement veut ouvrir les yeux et faire attention, il découvrira véritablement qu'on voit quantité de milliers de petites racines avec leurs fibres, aux branches et jets, en tout temps. »

Mais personne ne voulut ouvrir les yeux : on ne fit pas plus d'attention aux idées d'Agricola qu'on n'en avait fait à celles de de Lahire.

Vers le commencement de ce siècle[3], un célèbre botaniste voyageur, Aubert Dupetit-Thouars, reproduisit la théorie d'abord proposée par de Lahire; mais il l'appuya sur tant d'expériences nouvelles, que les phytotomistes furent obligés de l'examiner. Malheureusement, ce fut pour la combattre : une seule voix s'éleva pour la défendre, celle de Turpin; mais bientôt cette voix lui fit défaut : Turpin annonça qu'il s'était trompé.

Il était réservé à un autre botaniste voyageur non moins célèbre, M. Charles Gaudichaud, d'être le continuateur de ces idées, de les étendre et de les compléter par des travaux innombrables.

Dans cette théorie, telle que M. Gaudichaud la soutient, on admet bien, ainsi que dans les théories du cambium, que les

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1719.
[2] *Agriculture parfaite*, I^er^ vol. p. 202.
[3] *Essais sur la végétation considérée sur le développement des bourgeons.*

tissus végétaux passent par divers degrés de fluidité avant de se constituer et de se solidifier; mais on refuse de comprendre le cambium comme on l'avait généralement compris et on en repousse jusqu'au mot lui-même; on n'admet aucune similitude entre les tissus cellulaires primitifs ou parenchymateux et les tissus vasculaires fibreux. Ces tissus fibro-vasculaires sont regardés comme ne se formant que dans les feuilles, les bourgeons et les embryons, et l'accroissement en diamètre des tiges dicotylées se fait par la descension de ces tissus fibro-vasculaires et par le développement des tissus parenchymateux qui rayonnent du centre à la circonférence.

Tel est l'état de la question sur l'accroissement en diamètre des tiges dicotylédones.

Comme on le voit, on est loin d'être d'accord sur ce point de la science, malgré le talent des hommes qui s'en sont occupés, et malgré la conviction qui en anime quelques-uns. Et cependant il serait fort important (aujourd'hui surtout que la question forestière préoccupe vivement les esprits) de savoir positivement à quoi s'en tenir à cet égard; car, puisque les principes anatomiques de l'une ou de l'autre de ces théories ne peuvent être également vrais, nécessairement il en est de même des principes physiologiques qu'on en déduit.

C'est dans cet état que nous avons trouvé la science, lorsque nous avons été nous-mêmes amenés, nous allons dire comment, à nous en occuper.

Chacun sait que la betterave, dans la première année de sa végétation, forme de six à dix petites couches ligneuses, séparées les unes des autres par de larges bandes de tissu cellulaire. C'est à M. Dutrochet, dont la mort récente laisse un vide dans la physiologie expérimentale, que nous devons d'abord cette observation[1]. Cet ingénieux expérimentateur avait en outre annoncé que ces couches ligneuses se formaient à l'extérieur, comme d'ailleurs on

[1] Mémoires déjà cités de l'auteur, I^er^ vol. p. 158. — Voyez aussi Gaudichaud, *Organographie*, pl. XII, fig. 1, 2, 3, 4.

l'a admis pour toutes les autres plantes; mais, par suite d'idées qui lui étaient propres sur l'accroissement en diamètre, il craignit plus tard de s'être trompé. En conséquence, il nous chargea de vérifier ce fait d'accroissement; ce que nous nous empressâmes de faire.

Nous reconnûmes alors que les couches ligneuses dans la betterave se formaient à l'extérieur, et que, par conséquent, M. Dutrochet ne s'était point trompé; mais, en même temps, nous pensâmes que cette plante, par la nature de son organisation, était la plus propre à éclairer la question de l'accroissement en diamètre, si on la prenait pour objet de ses expériences.

Voici le raisonnement que nous fîmes :

Pour connaître le développement d'un organe, il faut remonter aussi loin que possible dans l'histoire de sa vie; c'est par la connaissance de ce qu'il fut qu'on parvient à expliquer ce qu'il est; mais pour cela il faut pouvoir embrasser son organisation d'un seul coup d'œil. Or avec nos grands arbres, avec la plupart de nos plantes, qui ne forment qu'une couche ligneuse chaque année, et chez lesquelles les tissus cellulaires ne restent jamais bien isolés des tissus fibro-vasculaires, comment suivre pas à pas le développement des tissus ligneux, et surtout proclamer, d'une manière irréfragable, la complète indépendance des tissus parenchymateux et de ces tissus ligneux? On en voit tout de suite l'impossibilité en n'instituant des expériences que sur de pareils objets.

C'est là, sans doute, la principale cause du débat qui existe entre les physiologistes depuis Duhamel et de Lahire.

Avec les betteraves, nous crûmes que nous ne rencontrerions pas ces inconvénients, que nous pourrions assister, pour ainsi dire, au développement progressif des tissus ligneux, et surtout voir l'indépendance, si indépendance il y avait, des tissus parenchymateux ou cellulaires et des tissus fibreux.

Nos prévisions se sont justifiées.

Les expériences que nous avons faites sur ces plantes constituent bien la partie essentielle de notre travail; cependant, nous y

avons joint une série de recherches sur les greffes de différentes natures, c'est-à-dire en fente, par approche, dans la moelle, etc. et sur des décortications circulaires pratiquées sur des *pereskia* et des *citrus*.

Les expériences que notre travail renferme se divisent donc naturellement en trois séries : 1° celles qui ont été faites sur les betteraves; 2° celles qui se rapportent aux différents genres de greffes; 3° enfin, celles qui sont relatives aux décortications circulaires.

Nous allons décrire la manière dont chacune de ces expériences a été exécutée, et indiquer les résultats qu'elle a produits.

Nous nous sommes contentés d'étudier les faits; quant aux causes, nous les avons négligées. En conséquence, nous n'avons fait intervenir ni la séve descendante, ni le cambium, ni le suc nutritif, ni le tissu générateur, ni le fluide globulo-cellulaire, ni même les corps animés; parce que nous avons pensé qu'avant de nous occuper des causes physiologiques des développements divers, nous devions étudier ces développements eux-mêmes dans leurs effets les plus matériels.

Cela dit, nous soumettons immédiatement au jugement de nos maîtres et nos procédés et nos résultats.

§ I^er^. BETTERAVES.

A. Expériences faites sur les betteraves pendant la première année de leur végétation.

I. Le 4 août 1846, il fut enlevé à une betterave, à 8 centimètres au-dessous du sommet et dans toute sa circonférence, quatre couches et tout ce qui leur correspondait à la partie supérieure, de telle sorte que la partie conservée n'était plus qu'un cylindre surmonté par l'axe du bourgeon. Ce cylindre avait en tout 8 centimètres de hauteur sur 48 millimètres de circonférence, et il ne se composait plus que d'une seule couche concentrique entourant l'étui médullaire.

Toutes les parties mutilées furent laissées à l'air libre; on ne chercha nullement à les protéger contre l'atteinte des agents extérieurs. Bientôt les parties mises à l'air se cicatrisèrent et formèrent une nouvelle écorce; le bourgeon terminal se développa et produisit de nouvelles feuilles; le cylindre prit de l'accroissement. On remarqua, en même temps, que la betterave se fendait au-dessous du point où les couches avaient été enlevées.

Le 1er octobre suivant, cette betterave a été arrachée; le cylindre avait alors grandi de 7 centimètres; quant à son accroissement en diamètre, il n'était pas le même dans toute son étendue : il était plus considérable dans la partie la plus rapprochée des feuilles, et les endroits qui s'étaient le plus développés avaient 14 centimètres de circonférence.

Cette betterave, coupée longitudinalement par le centre, offrit les caractères suivants : la couche qu'on avait respectée lors de l'opération avait considérablement augmenté de diamètre, mais uniquement en tissus cellulaires. Cinq nouvelles couches s'étaient formées à l'extérieur : c'est vers les parties les plus épaisses que le plus grand nombre de couches existait, et ces parties étaient les plus rapprochées des feuilles; elles étaient, d'ailleurs, recouvertes d'une écorce parfaitement constituée et facile à détacher.

La partie inférieure de la betterave, c'est-à-dire celle à laquelle on n'avait rien enlevé, avait pris beaucoup d'accroissement; mais cet accroissement n'avait eu lieu que dans la couche la plus rapprochée du centre, celle qui correspondait directement à la partie conservée du cylindre. Les autres couches qui, par suite de l'opération, ne communiquaient pas avec les feuilles, étaient restées dans leur état primitif : c'était évidemment par suite de ce phénomène que la betterave s'était fendue.

Afin de reconnaître le nombre de nouvelles couches formées, ainsi que leur origine, nous avons fait bouillir cette betterave dans l'eau pendant le temps nécessaire pour désagréger ces couches les unes des autres; et par la dissection, nous avons pu isoler les cinq nouvelles couches formées au sommet du cylindre, et cons-

tater que leurs filets ligneux émanaient directement des feuilles qui s'étaient successivement développées. A l'aide de cette dissection, nous avons pu voir encore que la couche la plus extérieure correspondait avec les feuilles dont le développement était le plus récent. De toutes ces couches, c'était celle-ci qui descendait le moins; la couche la plus intérieure était, au contraire, celle qui descendait le plus et qui était, en même temps, la plus forte et la plus ligneuse. Les couches intermédiaires, quant à leur longueur et à leur développement, étaient en rapport avec leur âge.

Ainsi, les feuilles qui se sont d'abord développées après l'expérience sont celles qui ont donné naissance à la couche la plus intérieure, c'est-à-dire celle qui est la plus longue et la plus forte. Les feuilles, au contraire, qui se sont développées les dernières sont celles qui ont produit la couche la plus extérieure, laquelle est la moins longue et la moins épaisse. Les figures 1 et 2 montrent bien la formation successive de toutes ces couches, d'après la formation également successive des feuilles dont nous avons suivi, dans leur marche descendante, les faisceaux fibro-vasculaires.

Ces faits concordent de tous points avec la règle générale des agencements, exposée par M. Ch. Gaudichaud[1] pour les dicotylés, et par M. Hugo Mohl[2] pour les monocotylés.

II. Le 21 juillet, on a enlevé à une betterave, sur une longueur de 10 centimètres, plus de la moitié de sa partie supérieure, en laissant le bourgeon entier à la partie restante. La partie tronquée a cessé de s'accroître, tandis que l'autre s'est augmentée considérablement; les deux côtés voisins de la partie mutilée ont pris un tel accroissement, qu'ils ont formé de chaque côté deux colonnes (AA', fig. 3) d'une épaisseur d'environ 4 centimètres chacune.

Au moment de l'opération, il y avait six couches partout; lors

[1] Voyez Gaudichaud, *Organographie*, pl. VII, fig. 41, 42, 43, etc.

[2] Voyez Martius, *Anatomie des palmiers*, pl. II, fig. 5.

de la dissection, on en retrouvait exactement le même nombre sur le côté mutilé, et qui n'avaient même pas pris d'accroissement sensible, tandis que sur le côté où le bourgeon et les feuilles ont toujours continué d'exister, les couches ont beaucoup gagné en épaisseur. Ces couches, qui primitivement formaient un cercle continu avec les couches parallèles du côté opposé, ayant été écartées par suite de leur augmentation en épaisseur, les cercles s'étaient brisés aux points où le végétal avait cessé de s'accroître. Ce phénomène était surtout dû au développement du tissu cellulaire, qui avait eu lieu du centre à la circonférence.

De plus, il est à remarquer que les deux côtés formant colonnes s'étaient chargés de nouvelles couches : trois sur un côté *A*, cinq sur l'autre *A'* (fig. 4). Le côté qui a donné cinq couches nouvelles est celui qui a pris le plus d'accroissement : ce côté était le plus garni de feuilles, et la couche du centre était beaucoup plus développée que celle qui la suivait; celle-ci, à son tour, l'était beaucoup plus que la suivante, qui elle-même l'était plus que la couche extérieure, c'est-à-dire la dernière formée.

La plaie s'est cicatrisée et a reproduit une nouvelle écorce sous laquelle de nouvelles couches se sont formées; ces couches sont surtout plus apparentes vers la partie la plus voisine des feuilles. Par leur position, elles coupent à angle droit les couches concentriques d'ancienne formation, mais elles se trouvent être la continuation de celles qui se sont formées à l'extérieur en même temps qu'elles.

III. Le même jour (21 juillet), un anneau fut enlevé (fig. 5) sur une betterave dans une hauteur de 3 centimètres. La partie laissée avait 12 centimètres de circonférence : une couche avait été enlevée. Au bout de peu de jours, la plaie s'était cicatrisée et une espèce d'épiderme s'était reformée; une augmentation sensible en grosseur avait eu lieu à la circonférence. Au mois d'octobre, la circonférence est de 18 centimètres 5 millimètres. Une nouvelle écorce s'y est reproduite, ayant tous les caractères de l'écorce des parties non dépouillées.

Sous cette écorce de nouvelle formation ainsi qu'au-dessus, c'est-à-dire dans la partie située immédiatement sous les feuilles, se sont formées des couches nouvelles (fig. 6) qui se perdent et disparaissent vers la partie inférieure de la cicatrice; on les voit distinctement descendre des feuilles dans la région supérieure, de là dans la partie moyenne ou décortiquée, et de celle-ci dans l'inférieure, toujours en suivant les contours superficiels. Là, comme ailleurs, les couches du centre, qui sont de formation plus ancienne, sont les plus fortes, les plus longues, etc.

IV. Une betterave a été fendue par le milieu, et l'étui médullaire n'a pas été également partagé. La plaie s'est desséchée de manière à représenter un épiderme sous lequel une certaine quantité de matière verte s'est développée, mais il ne s'y est formé ni écorce ni couche ligneuse; des racines sont sorties de la plaie, surtout du côté où l'étui médullaire était resté, tandis que le côté opposé, quoique placé dans les mêmes circonstances, n'a pas jeté de racines.

V. On a fendu longitudinalement une betterave, en laissant un côté plus fort que l'autre. La plaie, comme ailleurs, a formé une nouvelle écorce et des couches dont les plus apparentes étaient rapprochées de la circonférence, lesquelles, par leur position en dehors, se trouvaient sous les feuilles.

VI. Le 21 juillet, on a, dans une hauteur de 9 centimètres, dolé une betterave tout autour, de manière à enlever l'écorce, et même, sur plusieurs points, une portion de la couche la plus extérieure. Cette betterave, ainsi décortiquée, avait 10 centimètres de circonférence.

Le 1er octobre, cette même partie avait 35 centimètres sur 16 de hauteur. En la coupant en travers, on a pu s'assurer qu'à sa partie inférieure il ne s'était formé ni écorce ni couche nouvelle: à cette partie, on voyait les endroits où la couche extérieure avait été enlevée lors de l'opération, et on pouvait encore suivre les portions de cette couche que l'instrument avait respectées.

C'est donc par l'allongement des filets vasculaires préexistants

du centre, et par le développement du tissu cellulaire, que se sont produits les accroissements en hauteur et en largeur.

Cependant, avant d'enlever l'écorce et les parties de la couche que l'instrument devait emporter, on avait fait une coupe annulaire (*BB'*, fig. 7) qui avait partagé deux des couches concentriques. Il est à remarquer que la partie supérieure a pris plus d'accroissement et a formé une espèce de bourrelet muni d'une écorce sous laquelle on a trouvé de nouvelles couches descendant même au-dessous de ce bourrelet, et finissant bientôt par se perdre.

Cette expérience, comme beaucoup d'autres d'ailleurs, nous a démontré qu'il n'y avait d'écorce complète qu'où les fibres descendantes étaient déjà arrivées, ou, en d'autres termes, que la présence des fibres est nécessaire à la régénération de l'écorce.

VII. Après avoir fendu une betterave, dans une partie de sa longueur, presque par la moitié, un des côtés a été enlevé par une coupe transversale (fig. 8). La partie enlevée présentait six couches entièrement formées, et la partie laissée était munie de son bourgeon. La plaie, dans toute sa longueur, s'est vite cicatrisée; elle s'est recouverte d'une écorce, et dans certains endroits des espèces de mamelons ou protubérances (*D*, fig. 9) se sont développés. Dans ces mamelons, on a trouvé jusqu'à quatre couches distinctes, qui se terminaient vers la partie amputée.

VIII. Après avoir enlevé à une betterave (fig. 10) le bourgeon terminal, on a fait un trou d'une certaine profondeur dans l'étui médullaire avec une mèche de vilebrequin. Par suite de cette opération, un grand nombre de bourgeons se sont bientôt formés tout autour de ce trou, qui s'est considérablement élargi par les effets de cette nouvelle végétation, et le corps de la betterave a pris un grand développement.

A la dissection, on a trouvé que les filets ligneux des bourgeons extérieurs avaient suivi la marche ordinaire, c'est-à-dire qu'ils étaient descendus sous l'écorce; mais les bourgeons du centre, ceux qui étaient placés près de l'orifice de l'ouverture, ont pré-

senté un phénomène tout à fait nouveau, et, selon nous, du plus haut intérêt pour la question qui nous occupe.

Dans la partie supérieure seulement de la cavité, il s'était formé une écorce sous laquelle on voyait aisément descendre les fibres ligneuses des bourgeons les plus rapprochés de l'orifice de la cavité. Ces fibres, arrivées au point où cette écorce n'était plus consistante (*P*, fig. 11), changeaient de direction; elles se portaient de haut en bas, à travers toutes les couches concentriques extérieures de la betterave, pour aller tôt ou tard, suivant les greffes et les décurrences qu'elles formaient, tout en parcourant leur route, sur les tissus ligneux des zones intermédiaires, rejoindre la périphérie (*E E*, fig. 11), et là se mêler aux fibres des bourgeons extérieurs.

Dans une expérience de même nature, nous avons obtenu les mêmes résultats; seulement l'excavation, plus large et moins profonde, était couverte d'une écorce dans toute son étendue. Aussi les filets radiculaires des bourgeons descendaient-ils vers la base de la cavité avant de se diriger vers la périphérie.

Voilà les expériences que nous avons faites sur la betterave pendant la première année de sa végétation.

Ce n'est pas à nous de dire, sans doute, de quelle importance ces expériences sont pour l'anatomie, la physiologie et la question de l'accroissement en diamètre des tiges des dicotylés; nous demanderons seulement la permission d'en tirer la conséquence, que les deux marches principales des tissus ligneux qu'on a observés dans les monocotylés se sont présentées dans les betteraves.

Presque tous les palmiers s'accroissent par des faisceaux fibro-vasculaires qui descendent des feuilles dans toute l'épaisseur des tiges; après avoir cheminé vers le centre, dans une longueur plus ou moins grande, ces faisceaux changent de direction; ils se dirigent en dehors, se rapprochent par conséquent de plus en plus de la circonférence, arrivent sous l'écorce, là se divisent en ramifications capillaires, et s'anastomosent avec les faisceaux voisins et s'y confondent, quand ils n'atteignent pas les racines pour y pénétrer.

Dans les *dracœna*, les *cordyline*, etc. les faisceaux fibro-vasculaires naissent également des feuilles, mais ils se dirigent promptement vers la périphérie du corps ligneux, d'où ils continuent leur mouvement de descension jusqu'aux extrémités inférieures de la plante.

Ces observations sont dues à M. Hugo Mohl, et surtout à M. Gaudichaud[1], qui a fait non-seulement une étude suivie des palmiers, mais des *dracœna*, des *cordyline*, etc.

Or, dans la première année de la végétation de la betterave, les feuilles sont réunies au sommet de la plante, et les dernières venues sont situées au centre. Ces jeunes feuilles, quoique réellement supérieures, sont cependant au-dessous de celles qui les ont précédées dans l'ordre des développements. Ce phénomène est dû à deux causes : l'une, à ce que le bourgeon primaire s'est peu allongé, et l'autre à ce que la partie tigellaire des feuilles les premières formées a pris plus de développement que celle des autres. Hé bien! les filets ligneux des feuilles ne tardent pas à se diriger vers la périphérie de la plante; mais on comprend que ces filets ligneux sont tous obligés, dans cette route (moins ceux qui émanent des feuilles cotylédonaires), de croiser les fibres ligneuses des feuilles qui se sont développées auparavant.

N'est-ce pas ainsi que les choses se passent dans les *cordyline* et les *dracœna?* Nous l'avons constaté nous-mêmes dans ces dernières plantes, avant que nous eussions connaissance des belles observations de M. Gaudichaud.

Maintenant, toutes les fois que nous avons creusé le centre d'une betterave et qu'il est né des bourgeons vers l'orifice de l'excavation, les filets ligneux de ces bourgeons sont toujours descendus le long des parois internes de cette excavation; arrivés au fond, ils se sont dirigés de haut en bas dans le centre de la plante, en rejoignant tôt ou tard la périphérie.

[1] Voyez Gaudichaud, *Recherches sur l'anatomie et la physiologie des végétaux monocotylés.* (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, séances du 30 août et du 27 septembre 1847.)

N'est-ce pas ce qui a lieu dans la plupart des palmiers? Ces analogies frappantes que nous trouvons entre les *dracæna*, les *cordyline* et les betteraves, et entre celles-ci et les palmiers, montrent une fois de plus qu'il n'y a rien de tranché dans la nature, qu'il n'y a partout que des nuances et non des lignes de démarcation, des transitions harmonieuses et non des saccades.

B. Expériences faites sur les betteraves la seconde année de leur végétation.

Les résultats que la betterave nous avait fournis étaient assez importants pour nous engager à l'étudier la seconde année de sa végétation.

Aussi nous avons, au mois d'avril, fait planter des betteraves qui avaient été arrachées à l'automne de l'année précédente. Ces betteraves avaient, au moment de leur plantation, cinq à huit couches ligneuses.

Nous enlevâmes aux unes le bourgeon terminal, que nous laissâmes aux autres.

Nous pensions que la betterave sur laquelle cette suppression avait été faite ne fleurirait pas, mais qu'en revanche elle produirait des bourgeons en nombre plus ou moins considérable.

Nos prévisions ne tardèrent pas à se confirmer. Sur les betteraves dépourvues de bourgeon terminal, plusieurs bourgeons secondaires se développèrent; sur celles où le bourgeon terminal avait été conservé, on n'apercevait pas de nouveaux bourgeons, au moins sur le corps de la plante.

Les premières ne fleurirent pas; les dernières donnèrent des graines. Les unes et les autres, à l'époque où on les a arrachées, présentaient presque toutes, de haut en bas (à partir seulement du corps de la plante), des côtes plus ou moins sensibles.

Chez les betteraves auxquelles on n'avait fait aucune suppression, le bourgeon terminal s'est allongé; il s'est couvert de feuilles; et à l'aisselle de quelques-unes il s'est développé un bourgeon.

Ces plantes ont fleuri et fructifié, mais elles n'ont formé que de minces couches ligneuses qui disparaissent souvent dans les parties inférieures du corps de la betterave. Ces couches n'ont pas la même épaisseur dans toute la périphérie de la plante : elles sont plus épaisses du côté où les feuilles sont situées. C'est surtout à cette inégalité d'épaisseur des couches que sont dues les petites cannelures qu'on remarque sur ces betteraves.

Dans les betteraves où le bourgeon terminal avait été supprimé, les côtes étaient très-considérables. Chaque betterave ressemblait à une série de petites betteraves soudées à une autre plus grosse qui aurait été placée au milieu d'elles. Mais si, de prime abord, on pouvait se les figurer ainsi, il suffisait de les couper en travers pour dissiper cette illusion : on s'apercevait, en effet, que les côtes n'avaient qu'un même centre, celui de la betterave sur laquelle elles s'étaient développées.

Chaque côte est placée au-dessous d'un bourgeon.

Dans les betteraves qui présentent ces côtes extraordinaires, la végétation néanmoins n'a été arrêtée sur aucun point.

Le fait le plus remarquable de ces développements si inégaux, c'est que là où sont les mamelons ou côtes, il y a dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept et même dix-huit couches ligneuses, tandis que des côtés où il ne s'est pas formé de mamelons, on ne trouve que le nombre de couches ligneuses qui existait lors de la plantation de la betterave.

Chez notre ami M. Liazard, de Sannerville, qui avait fait planter un champ de betteraves pour en récolter la graine, nous avons remarqué que celles où le bourgeon central ne s'est pas développé ont végété absolument comme les nôtres et présentent par conséquent les mêmes phénomènes.

Ainsi, dans toutes les betteraves où le bourgeon terminal n'a pas végété, et où d'autres bourgeons se sont développés à la partie supérieure du corps de la plante, il s'est toujours formé au-dessous de ces bourgeons, et seulement au-dessous, des couches ligneuses, quoique les parties voisines aient végété comme à l'ordinaire. Ces

effets se sont produits tout naturellement; la nature n'avait pas été contrariée dans sa marche, comme cela aurait pu être si l'on eût fait des coupes transversales, longitudinales, etc. Ces faits sont donc naturels, et, par cela même, ils sont beaucoup plus importants pour les conséquences qu'on en peut tirer.

Pourquoi s'est-il produit dans les mamelons en question sept à huit nouvelles couches, tandis qu'à côté il ne s'en est formé aucune?

Nous avons examiné les endroits où de nouvelles couches ne s'étaient pas formées, afin de nous assurer si les tissus de ces parties étaient les mêmes que ceux pris dans les mamelons. Or l'examen le plus attentif des uns et des autres ne nous a rien appris, sinon que tout était semblable dans ces tissus.

Quant aux nouvelles couches ligneuses, on en suivait les fibres jusque dans les bourgeons placés au-dessus, comme d'ailleurs nous l'avons observé dans les expériences précédentes.

Ce sont donc les fibres des feuilles appartenant aux bourgeons développés secondairement sur la betterave qui ont formé les nouvelles couches ligneuses. Mais quand un de ces bourgeons était un peu éloigné des autres, les fibres de ses feuilles sont descendues sans se réunir à celles des feuilles des bourgeons voisins. De là un espace sans couches ligneuses nouvelles, tandis qu'à côté, sous un bourgeon, plusieurs couches bien formées ont produit des mamelons.

Lorsqu'on ne fait à la betterave, la première année de son existence, aucune suppression de bourgeon central, elle ne présente pas de cannelures, et elle a le même nombre de couches ligneuses dans toute sa circonférence. Ceci n'est pas difficile à concevoir. De bonne heure, la betterave se couronne d'un bouquet de feuilles au centre duquel est un bourgeon qui ne s'allonge guère la première année. Les feuilles sont tellement rapprochées, qu'elles paraissent être disposées en verticilles de cinq. Par suite de cet arrangement, les filets ligneux semblent émaner en même temps de toutes les feuilles composant chaque verticille; ils descendent,

sans former de couches bien distinctes, tant qu'ils sont dans la portion formée par le *collet*[1]; mais arrivés au-dessous du point où les premières feuilles ont émergé de la tige, ils se rangent en couche et en forment une d'une égale épaisseur à peu près dans toute la tige radiciforme. Chaque verticille de feuilles donne lieu aux mêmes résultats.

Vers la fin de la seconde année de sa végétation, la betterave présente quelques cannelures. Pendant cette seconde année, le bourgeon central s'est considérablement allongé, les entre-nœuds sont par conséquent très-espacés; les organes appendiculaires qui naissent alors n'entourent pas la tige, comme lorsque le bourgeon était caché au milieu des feuilles. Aussi de petites cannelures, dans la direction de ces organes, se remarquent sur la partie de la betterave qu'on appelle vulgairement racine.

En terminant pour le moment les expériences que nous nous étions proposé de faire avec la betterave, nous appelons l'attention de l'Académie sur un fait qui n'est peut-être pas sans intérêt pour l'importante industrie de la fabrication du sucre de betterave.

Les méthodes employées pour conserver les betteraves ne les mettent pas à l'abri d'altérations dont la conséquence principale est une diminution notable de la matière sucrée.

Ces méthodes consistent : l'une, à mettre ces tiges radiciformes en tas, à l'air libre; l'autre, à les placer dans des fosses ou *silos;* la troisième, dans des magasins couverts. Avec les deux derniers moyens, on évite généralement les effets de la gelée, mais non ceux de la fermentation. Celle-ci est d'autant plus active que l'air qui enveloppe les betteraves est moins souvent, moins largement renouvelé.

[1] Si nous appelons cette partie le collet, c'est pour nous conformer à l'idée commune, qui considère les cotylédons comme la limite de la tige et de la racine; car le collet, qui n'est qu'une surface sans épaisseur, est souvent placé beaucoup plus bas que les feuilles cotylédonaires, comme, par exemple, dans la betterave : par conséquent, les cotylédons sont bien, dans ce cas, au-dessus du point qui sépare le système ascendant du système descendant de l'embryon.

Aussi est-ce en établissant des courants d'air que l'on diminue cette fermentation, quand on ne l'arrête pas tout à fait.

Mais alors survient un inconvénient. Les betteraves poussent des feuilles et des bourgeons, et une partie du sucre de la plante est employée à la production de ces organes.

Ces phénomènes de végétation se produisent presque aussi vite dans l'obscurité qu'à la lumière : seulement, dans le premier cas, les nouvelles pousses sont blanches et très-sucrées; dans le second, elles sont vertes et renferment à peine du sucre. Néanmoins, dans l'une et l'autre de ces circonstances, la substance sucrée a considérablement diminué dans la betterave.

Après un procédé qui permettrait de dessécher à peu de frais la betterave, en en conservant toute la matière sucrée, le meilleur serait celui qui empêcherait ces plantes de fermenter et de végéter après leur arrachage.

Or nous avons observé que les betteraves coupées au-dessous du point qu'on appelle collet[1] ne poussent ni feuilles ni bourgeons, alors même qu'elles sont en terre. Elles augmentent, dans cette circonstance, lorsqu'elles sont ainsi privées de leur collet avant la fin de leur première année de végétation; elles augmentent, disons-nous, en tissu cellulaire et en matière sucrée, et, ce que nous ne pouvons trop répéter, sans avoir ni feuilles ni bourgeons, et sans jamais ajouter de nouveaux filets ligneux à ceux qu'elles contenaient auparavant.

Si, après avoir arraché les betteraves, on les coupait au-dessous du collet, elles ne végéteraient plus. On pourrait alors les placer d'autant plus à l'air et à la lumière, pour empêcher leur fermentation, qu'on n'aurait plus à craindre le développement des feuilles et des bourgeons.

Mais la plaie qu'on fait ainsi sur les betteraves, en leur ôtant la tête, ne devient-elle point une cause d'altération qui amène, par suite, la pourriture de la betterave? C'est une question que

[1] Si nous continuons à nommer cette partie de la plante collet, c'est pour ne pas créer un autre nom, et surtout pour nous faire comprendre de tout le monde.

nous nous sommes faite d'abord, et à laquelle nous pouvons répondre aujourd'hui.

Après l'arrachage, si on étête les betteraves au-dessous du collet, et que l'amputation ait été faite dans une partie saine, les betteraves ainsi coupées, exposées à une température de 12 à 15 degrés, dans un air sec, se cicatrisent en très-peu de temps, et on peut les conserver sans qu'elles pourrissent.

Nous avons voulu nous rendre compte des effets pratiques du moyen que nous proposons pour la conservation des betteraves.

Au mois de novembre, des betteraves, dont le jus pesait 7 degrés à l'aréomètre, ont été divisées en deux lots. Aux betteraves de l'un, on a coupé la tête au-dessous du collet, tandis que les autres sont restées dans l'état où on les emmagasine ordinairement. Ces deux lots ont été placés dans un endroit sec, à l'abri de la gelée, et où l'air se renouvelle aisément, et y sont restées du mois de novembre à la fin de février.

Alors on a extrait le jus de ces betteraves. Celles qui avaient conservé leur collet avaient presque toutes donné des signes de végétation, tandis que les autres n'avaient donné ni feuilles, ni bourgeons.

Les betteraves qui avaient donné de longues pousses ont fourni un jus marquant 2 à 3 degrés; celles qu'on avait coupées au-dessous du collet, au contraire, ont fourni un jus qui marquait de 6 à 7 degrés.

Les collets de betteraves peuvent être employés à l'extraction du sucre ou à la nourriture du bétail.

Nous ne savons, au juste, quel parti on pourra tirer de l'observation que nous faisons ici, relativement à la conservation des betteraves; mais nous croyons qu'elle peut devenir utile, et ce motif seul nous a déterminés à la faire connaître.

§ II. DIFFÉRENTES ESPÈCES DE GREFFES[1].

I. *Greffe de jasmin officinal faite dans la moelle.* — Cette greffe a été exécutée au mois de mai 1846.

La greffe (fig. 12) avait été taillée en pointe arrondie et enfoncée dans l'étui médullaire. On ne fit aucune ligature.

Peu de jours ont suffi pour qu'elle se développât. Sa première végétation fut arrêtée par des pincements rapprochés; cependant elle repartit avec vigueur et donna quatre rameaux assez vigoureux. Ces rameaux acquirent au moins 30 centimètres de longueur chacun.

L'étui médullaire ne pouvant suffire à l'accroissement en diamètre, le sujet se fendit par la moitié. Alors la fente se remplit d'un gros bourrelet qui semblait être d'une organisation toute cellulaire; mais lorsqu'au mois de décembre suivant on fit la dissection de cette greffe, on reconnut qu'il n'en était pas ainsi (fig. 13).

En effet, des parties de la greffe, on voit des fibres sortir, s'élancer d'abord à travers le tissu cellulaire et la moelle, puis ressortir à l'extérieur, s'épanouir sur le sujet, se marier avec lui, et enfin s'appliquer de manière à former une couche bien distincte (fig. 13).

Il est à remarquer qu'à la partie du sujet qui est au-dessus du point où les fibres de la greffe arrivent, il n'y a pas eu d'organisation sensible.

II. *Greffe de rosier faite en 1846.* — Cette greffe fut faite en fente, c'est-à-dire qu'après avoir coupé net la tête du sujet (fig. 14) vers un point où la tige était bien droite, mais au-dessus d'un nœud occasionné par la suppression d'un petit rameau, la greffe

[1] La plupart des greffes qui suivent sont décrites dans les Mémoires du Muséum, par André Thouin. Nous ne les avons répétées et nous ne les reproduisons ici que pour éclairer l'organographie et la physiologie des greffes, et, par suite, la question de l'accroissement en diamètre.

fut alors taillée comme pour la greffe en fente ordinaire. Ne devant mettre qu'une greffe sur le sujet, elle fut taillée en lame de couteau, c'est-à-dire en coin très-allongé, plus épais sur un côté que sur un autre; cependant on eut soin de laisser de l'écorce des deux côtés. Le sujet fut alors fendu sur un seul côté, et la greffe y fut introduite de manière que le point où était le liber du sujet se trouvât bien en rapport avec le même point du côté extérieur de la greffe.

Le sujet se dessécha vers la partie supérieure, d'un côté, et jusqu'au-dessous de la partie inférieure de la greffe, de l'autre côté, comme on le voit sur la figure 15. Cependant la greffe reprit, émit des feuilles et des bourgeons, et elle se souda avec le sujet, mais seulement vers sa partie inférieure; la partie supérieure ne pouvait se souder, puisque le sujet était mort vers ce point.

La greffe développa deux bourgeons. Ces bourgeons ne prirent pas un développement considérable, mais cependant ils poussèrent assez bien. L'un d'eux était placé en dedans, c'est-à-dire sur la ligne verticale du sujet; l'autre, en dehors, se trouvait vers le point d'insertion de la greffe et de la partie supérieure du sujet.

Plus tard, ayant procédé à l'anatomie de la plante, on a aisément reconnu, le tissu cellulaire ayant été enlevé avec précaution, que chacun des bourgeons avait produit des filets ligneux.

Des filets ligneux appartenant au bourgeon placé en dedans, les uns étaient descendus de manière à se marier avec ceux du bourgeon opposé, c'est-à-dire qu'en s'étendant sur la tige ils s'étaient reportés au dehors; les autres étaient descendus verticalement et s'étaient lancés à l'intérieur, en suivant toujours la ligne de l'écorce. Il n'y avait là aucune soudure du sujet avec l'écorce, puisque cette partie de la greffe était dans la moelle du sujet. Mais ces filets ligneux, arrivés à la base de la greffe, ont tourné sa partie inférieure et se sont rejetés en dehors du sujet, et là ils se sont épanouis en se soudant avec lui.

Les fibres du bourgeon placées au dehors sont descendues jusqu'à un point où elles se sont détournées de la verticale, se lan-

çant, par faisceaux, sur le sujet; elles le recouvraient même dans quelques-unes de ses parties mortes. Il était très-facile de voir ces fibres croisant celles du sujet qui suivaient la ligne verticale, tandis qu'elles-mêmes étaient obliques. Il était encore facile de voir ces faisceaux de fibres tournant le nœud, lequel était desséché et proéminent.

III. *Autre greffe de rosier faite en fente, ainsi que la précédente, vers la fin de février 1846.* — Cette greffe fut faite courte et nantie d'un seul bourgeon, qui se développa peu de jours après l'opération.

Le sujet se dessécha du côté opposé à la greffe, et le bourgeon (fig. 16) continua de végéter, sans cependant prendre beaucoup de développement. Lors de l'anatomie, on a trouvé à la base de ce bourgeon une quantité de fibres formant un bourrelet mince qui embrassait la base de la partie supérieure de la greffe, pour s'épanouir ensuite sur le sujet jusqu'en un point où les fibres s'étendent de plus en plus, croisent les faisceaux fibreux anciennement produits par le sujet, réunies elles-mêmes en faisceaux formant des espèces de cannelures recouvertes et croisées par les fibres de nouvelle formation. Ces fibres émanent de la greffe; elles suivent, en les croisant, toutes les ondulations des fibres du sujet, et en descendant elles surmontent les petits angles que forment leurs faisceaux. On voit ces fibres devenir moins nombreuses, ou même complétement disparaître en s'éloignant de la greffe.

IV. *Greffe par approche (bradley), mais dont le sujet a conservé sa tête* (fig. 17 et 18). — Au mois d'avril 1846, après avoir sur deux espèces de *daphne*, le *daphne laureola* et le *daphne dauphin*, enlevé deux esquilles, et fait sur chacune des plaies deux nouvelles incisions formant deux languettes opposées qui avaient leur point de réunion à la plante, l'une vers le haut et l'autre vers le bas, on les a croisées, comme il est indiqué dans le Cours de culture et de naturalisation des végétaux d'A. Thouin, et ligaturées ensuite.

En très-peu de temps la soudure s'effectua, et alors la tête du *daphne laureola* fut enlevée, ainsi que celle du *daphne dauphin*.

Le pied de *daphne* devenu *dauphin* continua de végéter, et en

septembre 1846, nous en fîmes l'anatomie. Il fut reconnu que partout où les plaies des *daphne* avaient été en contact, un fort bourrelet de tissu cellulaire s'était formé sur les bords et s'était réuni de manière à ne faire qu'un corps. Tout ce tissu cellulaire ayant été enlevé, ainsi que l'écorce, on a aisément vu de nombreux faisceaux de fibres qui étaient descendus des parties supérieures à travers le tissu cellulaire, laissant entre eux des espaces assez considérables, lesquels étaient complétement remplis par du tissu utriculaire.

On voyait même beaucoup de faisceaux de fibres, isolés des autres parties fibreuses, suivre cet isolement comme dans le vide (bien qu'ils fussent dans le tissu cellulaire), se rapprocher des autres faisceaux fibreux, s'y souder et faire couche avec eux, comme on peut le remarquer sur la figure 18. D'autres faisceaux enfin, s'étant lancés à travers le tissu utriculaire, se sont portés aux parois du sujet et sont remontés entre les deux sujets, sans avoir eu occasion de se réunir ou de se souder, et, par conséquent, sont restés isolés, même vers leurs extrémités.

V. *Greffe de* daphne *par approche.* — Après avoir coupé la tête du sujet en biseau ou bec de flûte et avoir creusé dans la plaie une gouttière triangulaire, on tailla la greffe en triangle, sans la détacher du pied auquel elle appartenait, et on l'appliqua de manière à remplir exactement la rigole triangulaire du sujet (fig. 19 et 20).

La soudure eut lieu, ainsi qu'on devait le présumer. Lors de l'enlèvement de l'écorce et du tissu cellulaire, il fut reconnu que de nouveaux faisceaux fibreux s'étaient formés.

Les uns sont descendus sur la partie inférieure de la greffe et y ont pris peu d'accroissement, tandis que les autres, et c'est le plus grand nombre, ont quitté la greffe par faisceaux pour se réunir plus tard sur le sujet en l'embrassant.

Il y eut même quelques faisceaux qui, après être descendus sur la greffe du côté du biseau du sujet, se trouvèrent arrêtés par celui-ci et rebroussèrent chemin.

VI. Sur un *echinocactus multiplex,* il fut fait, au mois de juin, un trou à la partie supérieure, de manière à enlever le bourgeon central; l'extrémité d'un *cereus grandis* fut taillée, à sa partie inférieure, de telle sorte qu'elle pût remplir la cavité (fig. 24) formée par l'enlèvement du bourgeon terminal de l'*echinocactus.* Tout fut disposé pour que l'une fût bien remplie par l'autre, et qu'il y eût soudure comme dans une greffe, ce qui eut lieu peu de temps après; mais la soudure ne s'effectua que d'un seul côté, et insensiblement la greffe semblait sortir de sa cavité, de telle façon qu'elle se trouva isolée du sujet, n'y adhérant que par un seul point (*aa'*), qui, cependant, lui a permis de prendre un beau développement (fig. 25).

A l'anatomie, nous avons reconnu que, de tous les bourgeons de la greffe, des fibres ligneuses descendaient sous l'écorce (qui, comme chacun sait, est fort épaisse) jusqu'à la partie inférieure, en entourant l'étui médullaire. Là, celles qui étaient du côté opposé au point où la greffe et le sujet se mariaient tournaient la plaie en divers sens, l'enveloppaient, se réunissaient aux fibres du côté où la soudure avait lieu en deux forts faisceaux (*aa'*, fig. 26), et s'enfonçaient ensemble entre l'écorce et la partie ligneuse du sujet; enfin, arrivées à une petite profondeur, elles se ramifiaient, s'affaiblissaient et disparaissaient à peu de distance.

VII. Il y a six ans, M. Manoury greffa un *echinocactus Eyriesii,* Turp., sur un *cereus peruvianus,* variété *monstruosus,* DC. La greffe et le sujet ont parfaitement végété. Voulant savoir de quelle manière l'un et l'autre se sont mis en communication, nous avons partagé la plante longitudinalement, et voici ce que nous avons reconnu:

1° Que de la base du corps ligneux de la greffe il part des fibres radiculaires qui, en remontant, se dirigent sur le sujet, pour descendre ensuite en rampant sur la périphérie du corps ligneux de celui-ci; en outre, on voit des fibres descendre de la greffe directement sur le sujet; on voit encore que les faisceaux vasculaires sont beaucoup plus gros à mesure qu'on les observe plus près du point de jonction de la greffe avec le sujet;

2° Que quelques courtes racines naissent du point de jonction de la greffe avec le sujet et se perdent, pour ainsi dire, dans le parenchyme cortical de ce dernier;

3° Que d'autres racines plus fortes s'échappent de la base réelle de la greffe, descendent dans le parenchyme médullaire ou central du sujet, se ramifient ordinairement et dirigent leurs divisions, à travers les couches ligneuses, dans le parenchyme extérieur ou cortical du même sujet.

Comme on le voit, cette greffe présente à la fois ce que l'on observe dans les greffes ordinaires et dans les boutures; mais le parenchyme central du sujet n'a point souffert de l'action de la greffe.

VIII. Dans une des rues de notre ville se trouve un tilleul argenté qui a été greffé sur un tilleul ordinaire. Depuis cinq ou six ans, à peu près, le sujet est mort dans une portion notable de sa circonférence; au-dessus de cette partie morte, la greffe a formé un bourrelet très-sensible, d'où sont descendues des agglomérations de fibres. Quelques-unes de ces agglomérations ont végété en dehors des parties mortes du sujet, conséquemment exposées à l'air libre, tandis que d'autres sont descendues entre l'écorce et le bois altérés.

Pour nous confirmer dans l'idée que ces réunions de faisceaux fibro-vasculaires appartenaient à la greffe, nous les avons fait végéter à part. Elles ont développé des feuilles et des bourgeons qu'il a été facile de reconnaître pour des organes du *tilleul argenté*.

§ III. DÉCORTICATION CIRCULAIRE.

EXAMEN DU BOURGEON DANS TOUTES LES PHASES DE SON DÉVELOPPEMENT.

I. Sur un *cactus* (*pereskia-bleo*), au mois de juin 1846, il fut pratiqué une décortication annulaire d'une hauteur d'environ 12 millimètres, près d'un œil *O* (fig. 21) chargé d'un faisceau

d'épines. Un bourrelet *B* se forma bientôt à la partie supérieure de l'incision, et en même temps le bourgeon commença à se développer; mais craignant que, conjointement avec le bourrelet de la partie supérieure, la plaie ne se recouvrît trop vite, on enleva ce bourgeon lui-même avec une portion d'écorce, de façon à allonger la décortication et à lui donner environ 3 centimètres de hauteur. Comme la figure le montre, déjà le bourgeon, cependant, avait émis des fibres ligneuses qui s'étendaient sur l'ancienne couche, ainsi qu'on le voit en *ff'*.

Le bourrelet, à la partie supérieure, continua de s'accroître, se gonfla considérablement, et il produisit de petits mamelons blancs formés de tissu utriculaire, desquels sortirent d'autres mamelons coniques allongés comme des glands qui s'élèvent au-dessus de leur cupule. Quelques-uns donnèrent naissance à cinq, à six et même à sept de ces petits mamelons coniques.

A l'anatomie, on a trouvé l'intérieur du bourrelet formé par une couche ligneuse très-épaisse, dont un certain nombre de fibres, les plus extérieures se réunissant par faisceaux, traversaient le tissu cellulaire du bourrelet, dans lequel elles se divisaient pour former de petits cônes allongés. Ces fibres n'atteignirent cependant pas l'extrémité de chaque cône (fig. 22); il y avait à la partie inférieure de celui-ci une petite coiffe semblable à celle qui existe à l'extrémité des jeunes racines qu'on désigne sous le nom de spongioles.

II. Au mois de mai, sur une tige d'oranger, l'écorce fut enlevée complétement dans une longueur de 9 centimètres, et aux deux extrémités (fig. 27 et 28) le liber fut altéré. On enferma ensuite la partie décortiquée dans un tube de verre dont on scella les deux extrémités. Bientôt, de toutes les parties mises à nu et où le liber n'avait pas été altéré, il suinta une liqueur blanchâtre qui s'épaissit de jour en jour, et forma ensuite des mamelons parenchymateux, qui, très-rapprochés les uns des autres, semblaient constituer une espèce de couche.

Aux deux extrémités de la partie mise à nu, là où commençait

et finissait la décortication, les bords inférieurs et supérieurs formèrent à la fois un bourrelet très-prononcé (*B B'*, fig. 27), plus développé à la partie inférieure qu'à la partie supérieure. Ces deux points étaient isolés, non-seulement par la décortication, mais encore par l'altération que le liber avait subie.

L'opération n'empêcha pas la partie supérieure de végéter. Un bourgeon assez fort (*C*) se développa et se couvrit de feuilles qui continuèrent à vivre jusqu'au moment où eut lieu l'anatomie de la plante.

Ayant fait bouillir, laver et enlever tout le tissu cellulaire de la partie supérieure de la plante, on trouva toutes les fibres du bourgeon *C* embrassant la tige, et descendant de manière qu'on pouvait les suivre distinctement jusque dans le bourrelet supérieur, qu'elles n'ont pu franchir, parce qu'au-dessous il n'y avait pas de tissu cellulaire; mais ici elles se sont roulées de toutes les manières dans le peu de tissu utriculaire qu'elles avaient à leur disposition.

Dans toute la longueur de la partie décortiquée où une couche épaisse de tissu cellulaire existait, nous n'avons trouvé aucune trace de fibres ligneuses, et, chose remarquable, il n'y avait dans l'énorme bourrelet inférieur aucune trace de filets vasculaires.

Ayant également examiné la partie inférieure de ce bourrelet, nous avons constaté qu'il ne s'y était formé aucune couche fibreuse.

III. Sur un autre oranger, même décortication que dans la figure précédente, mais seulement sur une longueur de 6 centimètres environ.

Cet oranger, peu vigoureux à sa partie supérieure, ne développa que quelques faibles feuilles, à une très-grande distance de la décortication. Cependant deux bourrelets se formèrent, et, pendant quelque temps, ils furent à peu près de même grosseur. Bientôt des points verts apparurent sur le bourrelet inférieur, et de ces points sortirent des bourgeons dont quelques-uns s'allongèrent et donnèrent des feuilles; cependant l'incision ne s'arrêtait pas près d'un œil.

Lors de l'anatomie, nous avons constaté que les fibres formées

par le développement des feuilles, aussi *rares que faibles*, de la partie supérieure du sujet, n'arrivaient que jusqu'à une certaine distance du bourrelet, dans lequel nous n'avons pu trouver que du tissu cellulaire; et, ainsi que dans l'expérience précédente, le tissu utriculaire formé dans la partie décortiquée ne nous a présenté aucune trace de tissu fibreux.

Mais il n'en a pas été de même dans le bourrelet inférieur. Ayant enlevé, avec toutes les précautions possibles, le tissu cellulaire de ce bourrelet et des jeunes bourgeons, nous avons reconnu (fig. 23) que de la base des jeunes bourgeons descendaient des fibres ligneuses. Ces fibres étaient la continuation des parties fibreuses des feuilles et s'épanouissaient sur la tige de manière à ce qu'on pût les suivre aisément à l'œil nu; elles descendaient plus ou moins bas, suivant qu'elles appartenaient à des bourgeons de formation plus ou moins ancienne. Parmi ces bourgeons, qui étaient nombreux, trois sont représentés dans la figure 23 (*B B' B''*) et sont nés à des époques différentes. Le plus vieux, placé un peu au-dessous de la coupe, présentait les fibres les plus longues, les plus fortes. Ce bourgeon a été pendant quelque temps seul sur la tige, et il avait projeté ses fibres de manière à l'envelopper. Les bourgeons nés ensuite étaient parfaitement indépendants de ce premier bourgeon, et leurs fibres, qui sont descendues, ont enveloppé celles du bourgeon premier né. Dans les bourgeons naissants, où à peine existaient les rudiments des feuilles, déjà des fibres très-minces apparaissaient, mais très-courtes et croisant toujours en dessus, de manière à les recouvrir, les fibres de formation plus ancienne.

Cette expérience nous a permis d'assister, non-seulement à la formation d'embryons de bourgeon, mais à celle de fibres ligneuses que nous avons pu suivre dans les diverses phases de leur développement.

Cette étude nous a permis de reconnaître nous-mêmes une analogie (signalée depuis longtemps par les botanistes) entre les faits qui s'accomplissent dans la formation de l'ovule, dans celle de

l'embryon, dans la germination de la graine, enfin dans le développement de la jeune plante, et ceux que nous avons remarqués relativement aux bourgeons d'oranger.

En effet, l'ovule naissant n'est qu'une petite masse de tissu cellulaire; c'est ce qu'on pouvait voir dans les points proéminents du bourrelet qui ont donné naissance à nos bourgeons. Lorsque l'ovule est fécondé, l'embryon se forme; lorsque nos points se sont colorés en vert, ils sont bientôt devenus des bourgeons parfaits; si leur végétation se fût arrêtée là, ils eussent pu être comparés à des graines arrivées à leur maturité. Maintenant les graines, dans leur germination, développent leurs feuilles, leur tige, et forment leur racine; c'est encore ce que nous avons observé dans les bourgeons de notre oranger. Les jeunes plantes, après la germination, ont à la fois deux systèmes, l'un ascendant, l'autre descendant; les bourgeons en question ont présenté le même phénomène, puisque en même temps qu'ils s'élevaient dans l'air, leurs fibres ligneuses descendaient.

Nous bornons là l'exposition des faits que nous avons observés sur les dicotylés. Ils s'enchaînent et concordent entre eux, quoiqu'ils soient le résultat d'expériences opposées : cette circonstance en fait la force.

Aussi nous croyons-nous autorisés à en tirer les conséquences suivantes :

Les trois modes de développement qui ont été annoncés par M. Gaudichaud sont exacts : développement en hauteur des végétaux par la superposition d'individus vasculaires distincts; accroissement en largeur par la descension des tissus fibro-vasculaires de ces individus; enfin accroissement, en tous sens, des tissus cellulaires qui rayonnent dans toutes les directions et qui forment la trame des deux premiers.

Quoique notre travail soit intitulé : *De l'accroissement en diamètre des végétaux dicotylés,* nous ne voulons pas le terminer sans faire connaître les études que nous avons faites sur le mode de développement et la marche des tissus ligneux dans quelques

plantes monocotylédones, particulièrement dans les *dracæna* et les *cordyline*. Ces études nous ont fourni des résultats identiques à ceux que nous avons observés dans les dicotylés.

Nous avons fait des boutures avec des tronçons de tige du *cordyline australis*. Après quelque temps, deux ou trois bourgeons se sont développés vers le sommet (fig. 29, *DD'*). Lorsque les bourgeons ont eu chacun dix à douze feuilles, on a arraché les boutures, à la base desquelles on a trouvé une assez forte souche latérale (fig. 30, *S*), longue de 6 centimètres, d'où s'échappaient un grand nombre de racines fibreuses.

On a procédé à la dissection de ces boutures, et on a aisément reconnu que les filets ligneux partaient de la base des bourgeons ou jeunes rameaux, et descendaient jusque dans les souches, et de celles-ci dans les racines (fig. 30).

Fig. 1.

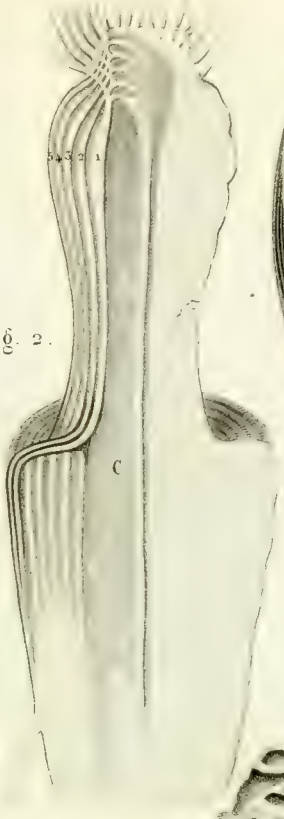


Fig. 2.

Fig. 4.

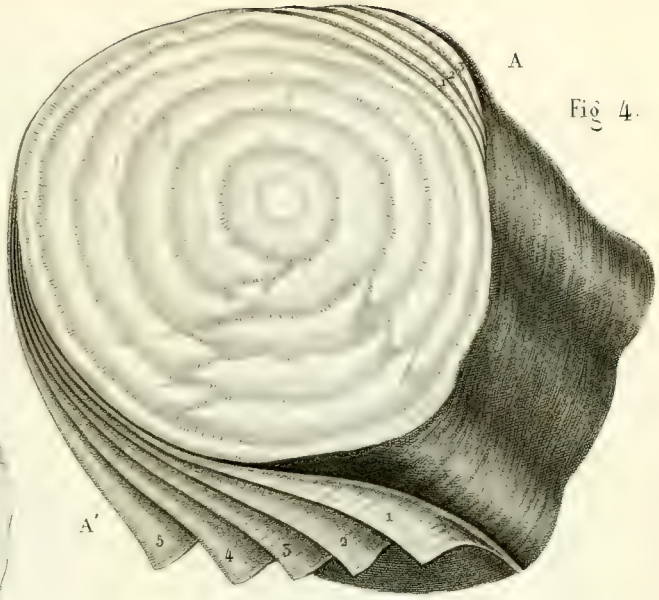


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 6.

...vié et gravé par Bovromée d'après les notes des Auteurs

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

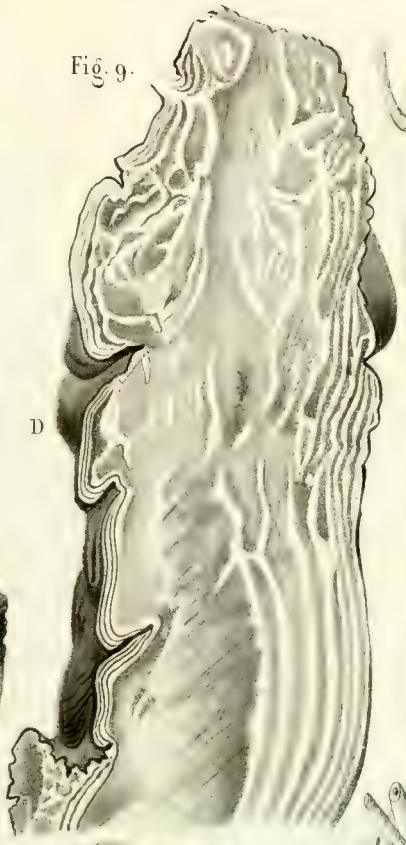


Fig. 12.

Fig. 11.

Fig. 10.

Fig. 13.

Dessiné et gravé par Borromée d'après les notes des Auteurs.

Fig. 14.

Fig. 15.

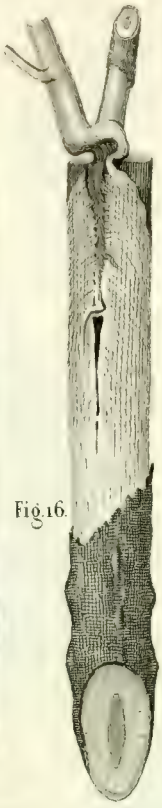


Fig. 16.

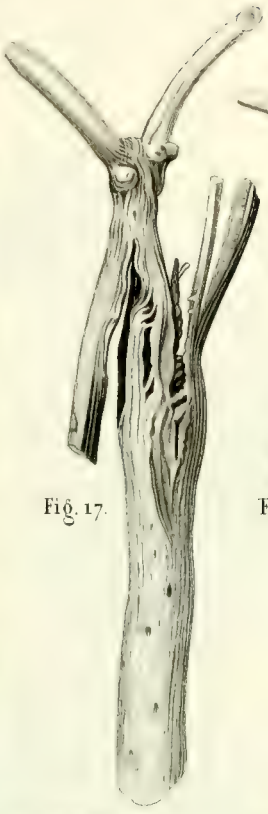


Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 18.

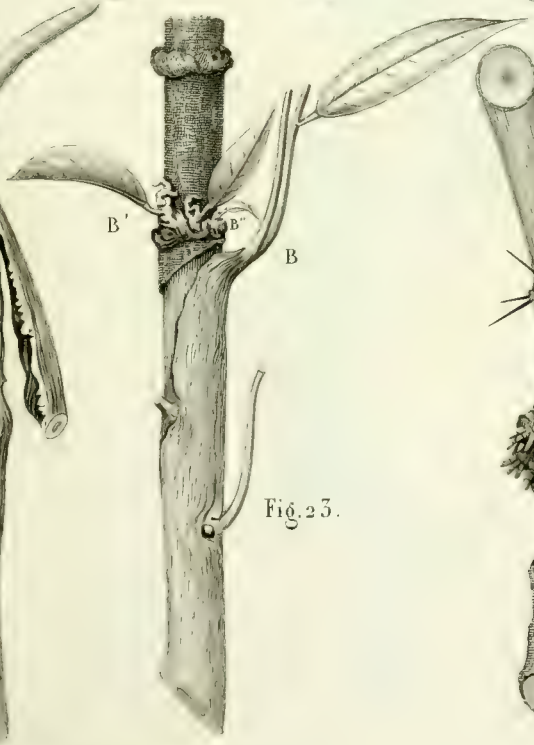


Fig. 23.

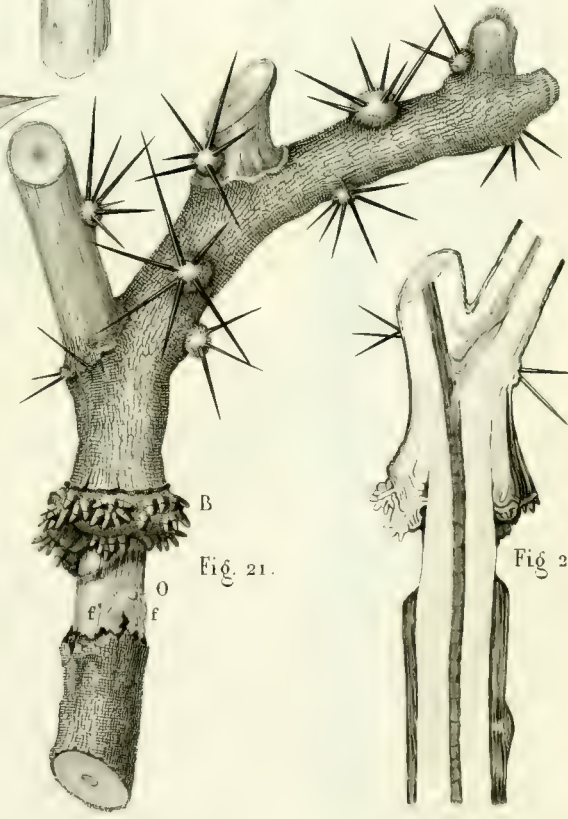


Fig. 21.

Fig. 22

Dessiné et gravé par Borromée d'après les notes des Auteurs.

Fig. 24

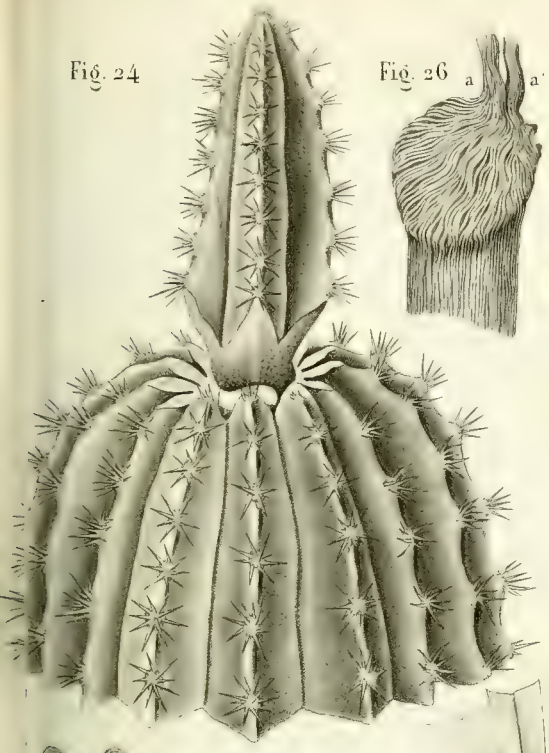


Fig. 26

Fig. 25.

Fig. 30.

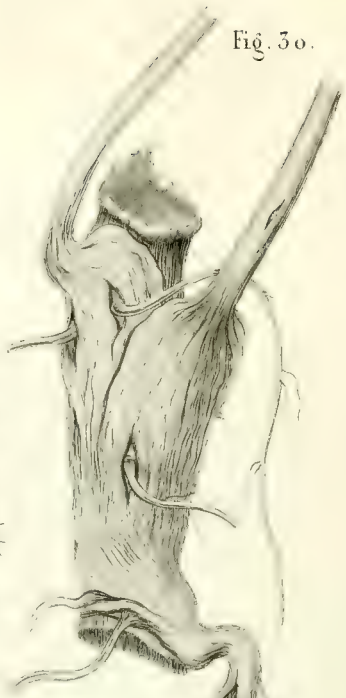


Fig. 27.

Fig. 29.

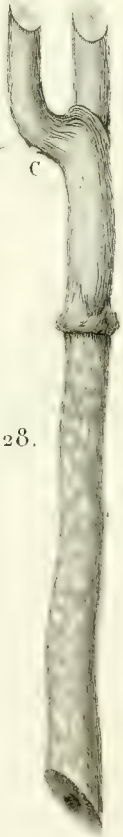


Fig. 28.

Dessiné et gravé par Borromée d'après les notes des Auteurs.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE PREMIÈRE.

Fig. 1. Betterave à laquelle on a enlevé quatre couches et tout ce qui leur correspondait, à la partie supérieure, sur une longueur de 8 centimètres. Dans cette partie, la betterave n'était plus qu'un cylindre avec une seule couche, surmonté d'un bourgeon central.

Fig. 2. La même, coupée longitudinalement par le centre, deux mois après, afin de montrer, 1° que la couche qu'on avait respectée (*C*) avait considérablement augmenté de diamètre, mais uniquement en tissus cellulaires; 2° cinq nouvelles couches (1, 2, 3, 4, 5) qui s'étaient formées à l'extérieur.

Fig. 3. Betterave à laquelle on a enlevé plus de la moitié de sa partie supérieure, en laissant le bourgeon entier au sommet, et dont les bords de la cicatrice ont formé, par leur accroissement, deux colonnes *A A'*.

Fig. 4. La même, coupée transversalement, afin de faire voir les couches qui se sont formées, sur le côté *A*, au nombre de trois, et sur le côté *A'*, au nombre de cinq.

Fig. 5. Betterave sur laquelle on a enlevé un anneau de 3 centimètres de hauteur.

Fig. 6. La même, coupée longitudinalement, pour montrer les cinq nouvelles couches qui se sont formées (1, 2, 3, 4, 5).

PLANCHE II.

Fig. 7. Betterave avec une entaille annulaire *B B'*, ayant sectionné deux couches concentriques, et à laquelle on a enlevé ensuite, au-dessous, dans une longueur de 9 centimètres, l'écorce, et même, sur plusieurs points, une partie de la couche la plus extérieure. Ni écorce ni couches nouvelles ne se sont formées au-dessous de l'entaille, tandis qu'au-dessus on peut voir trois nouvelles couches (1, 2, 3) se perdant au-dessous.

Fig. 8. Betterave fendue par la moitié dans une partie de sa longueur, et dont on a enlevé un des côtés présentant six couches ligneuses.

Fig. 9. La même, montrant les couches nouvelles formées dans les mamelons qui ont paru sur la précédente du côté amputé, *D*.

Fig. 10. Betterave à laquelle on a enlevé le bourgeon central, et fait un trou dans l'axe médullaire.

Fig. 11. La même, pour faire voir les bourgeons formés autour de la cavité, et montrer que les fibres radiculaires de l'extérieur avaient suivi la marche ordinaire, AA', et que les fibres ligneuses des bourgeons BB', situés près l'orifice de la cavité, étaient descendues, au contraire, le long de cette cavité, sous une espèce d'écorce disparaissant à une certaine profondeur, P, pour, de là, changer de direction, se porter à travers les couches concentriques de la betterave, rejoindre la périphérie et se mêler aux fibres des bourgeons extérieurs, E.

Fig. 12. Greffe de jasmin officinal dans la moelle.

Fig. 13. La même, pour faire voir la marche des fibres qui se sont développées dans la greffe.

PLANCHE III.

Fig. 14-15. Greffes de rosier, en fente.

Fig. 16. Autre greffe de rosier, en fente.

Fig. 17-18. Greffes par approche, suivant la méthode anglaise, du *daphne dauphin* sur le *daphne laureola*.

Fig. 19-20. Greffes par approche du *daphne dauphin* sur le *daphne laureola*.

Fig. 21. Décortication annulaire sur le *pereskia-bleo*, près d'un œil O, qu'on a ensuite enlevé en allongeant la plaie, mais après qu'il avait émis des fibres ligneuses ff'. B, bourrelet formé à la partie supérieure, présentant de petits mamelons blancs coniques.

Fig. 22. La même, coupée longitudinalement. Les fibres ligneuses du bourrelet n'atteignent pas l'extrémité des petits mamelons coniques, qui est entièrement cellulaire.

Fig. 23. Oranger sur lequel on a fait une décortication annulaire et qui présente trois bourgeons développés: l'un, B, au-dessous du bourrelet inférieur, les deux autres, B' B'', dans ce bourrelet même.

PLANCHE IV.

Fig. 24. Greffe de *cereus grandis* sur l'*echinocactus multiplex*.

Fig. 25. La même, où l'on fait voir la marche des fibres dans le sujet.

Fig. 26. La même, coupée transversalement au-dessous des deux faisceaux de fibres aa'.

Fig. 27. Tige d'oranger sur laquelle on a enlevé l'écorce complétement sur une longueur de 9 centimètres, et présentant un bourrelet inférieur B, plus gros que le supérieur B'.

Fig. 28. La même tige avec le bourgeon *C*, qui s'y est développé, et la direction de ses fibres.

Fig. 29. Bouture d'un tronçon de tige du *cordyline australis*, avec deux bourgeons ascendants *DD'*, et une souche latérale *S*, d'où s'échappent des racines fibreuses.

Fig. 30. La même, préparée pour faire voir les fibres ligneuses partant de la base des bourgeons, descendant dans la bouture, de là dans la souche, puis dans les racines.

C'est par erreur qu'on a mis au bas des planches : Dessiné et gravé par, etc Lisez : Réduit et gravé par Borromée, d'après les dessins des auteurs.

MÉMOIRES
SUR LA VISION,

PAR M. L. L. VALLÉE,

OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE.

PREMIER MÉMOIRE.

SUR LA FIGURE MATHÉMATIQUE DES SURFACES RÉFRINGENTES DE L'OEIL ET SUR LEURS DISPOSITIONS LES UNES PAR RAPPORT AUX AUTRES.

1. Les savants qui se sont occupés de l'œil ont pensé, en général, que les surfaces réfringentes de cet organe étaient engendrées par des ellipses, des hyperboles ou des paraboles; mais c'est à peu près à la simple inspection que leurs conjectures se sont formées relativement à ces courbes. Il y a une autre courbe, toutefois, dont M. Chossat a parlé (voy. *Annales de chimie et de physique*, t. X) et que Descartes avait signalée, qui jouit de propriétés optiques toutes particulières et tout à fait en rapport avec les besoins de la vision. Nous avons donné à cette courbe le nom d'*optoïde*, et nous nous occupons dans ce mémoire d'examiner jusqu'à quel point elle convient aux surfaces de l'œil. Nous présentons l'étude de l'optoïde avec beaucoup de détail, afin que

nous n'ayons pas à y revenir dans les mémoires subséquents, et afin que nous puissions être compris par un grand nombre des personnes que la théorie de la vision intéresse.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA COURBE QUE NOUS NOMMONS OPTOÏDE, ET DE SES PROPRIÉTÉS SOUS LE RAPPORT DE LA GÉNÉRATION DES SURFACES RÉFRINGENTES DE L'ŒIL.

2. Soit SAS′ (fig. 1) la courbe de séparation de deux milieux différemment réfringents; R un point rayonnant, et F un point vers lequel un élément uv infiniment petit de la courbe SAS′ réfracte un rayon incident qui lui est envoyé par le point R. Il est clair que si l'élément infiniment petit vx, contigu à uv, fait un angle convenable avec uv, le rayon incident envoyé sur l'élément vx sera aussi réfracté en F : d'où l'on voit que tous les éléments de la courbe SAS′ peuvent être placés les uns par rapport aux autres de telle sorte que les rayons émanés du point R soient tous réfractés vers un même foyer F.

3. La courbe SAS′ qui jouit de cette propriété est ce que nous nommons une *optoïde simple*, c'est-à-dire une courbe qui renvoie vers un point F les rayons émanés d'un point R.

Il est évident qu'une telle courbe est divisée en deux parties symétriques par la droite RF.

4. Il est évident aussi que la surface qu'elle engendre en tournant sur cette droite, prise pour axe, réfracte vers un même point les rayons émanés d'un autre point, sans qu'aucune aberration de courbure soit produite. Nous donnerons aux surfaces ainsi engendrées le nom de *surfaces de révolution optoïdales*, et nous appellerons, en général, *optoïdes composées* les surfaces réfringentes qui changent un faisceau de rayons normaux à une surface en un autre faisceau de rayons normaux à une autre surface.

5. Soit A (fig. 2) l'origine des coordonnées; AX l'axe des abscisses; AY l'axe des ordonnées; R le point rayonnant, situé

sur l'axe des x; F le foyer, situé sur le même axe; Mm un petit arc d'une optoïde simple; RM le rayon incident envoyé au point M; MN la normale en M; MF le rayon réfracté, et $x' = AP$, $y' = PM$, les coordonnées du point M. En désignant par d la distance du point R à l'origine, par f la distance de l'origine au point F, et en faisant le coefficient différentiel

$$\frac{dy'}{dx'} = \varphi,$$

nous aurons, pour les équations, savoir:

$$\text{de RM, } y = \frac{y'}{d + x'}(x + d);$$

$$\text{de MN, } y - y' = -\frac{1}{\varphi}(x - x');$$

$$\text{de MF, } y - y' = -\frac{y'}{f - x'}(x - x');$$

ce qui donne

$$\text{tang ARM} = \frac{y}{d + x'};$$

$$\text{tang MNX} = -\frac{1}{\varphi};$$

$$\text{tang MFX} = -\frac{y'}{f - x'}.$$

6. Si nous représentons par i l'angle d'incidence RMN', par r l'angle de réfraction NMF, et par l le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les deux substances que sépare l'optoïde, nous aurons l'équation

$$\text{sin. } i = l \text{ sin. } r. \qquad \text{(A)}.$$

Cela posé, de ce que tang i = — tang N'MR' = — tang MNR'' = — tang (MNX — ARM), il résulte que

$$\text{tang } i = \frac{d + x' + y'\varphi}{(d + x')\varphi - y'}.$$

Menons NR″ parallèle à RMR′ et FF″ parallèle à MN, on aura

$$\text{tang } r = \text{tang } (\text{MFX} - \text{MNX}),$$

ou

$$\text{tang } r = \frac{f - x' - y'\varphi}{(f - x')\varphi + y'}. \qquad \text{(B)}$$

On a, en conséquence,

$$\text{sin. } i = \frac{d + x' + y'\varphi}{\sqrt{|d + x' + y'\varphi|^2 + |(d + x')\varphi - y'|^2}};$$

$$\text{sin. } r = \frac{f - x' - y'\varphi}{\sqrt{|f - x' - y'\varphi|^2 + |(f - x')\varphi + y'|^2}};$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (A), donnent

$$\frac{d + x' + y'\varphi}{\sqrt{|d + x' + y'\varphi|^2 + |(d + x')\varphi - y'|^2}} = l \frac{f - x' - y'\varphi}{\sqrt{|f - x' - y'\varphi|^2 + |(f - x')\varphi + y'|^2}};$$

et en effectuant les calculs indiqués, on obtient pour l'équation différentielle de l'optoïde simple

$$\frac{y\,dy + (d + x)\,dx}{\sqrt{y^2 + (d + x)^2}} = -\,l \frac{y\,dy - (f - x)\,dx}{\sqrt{y^2 + (f - x)^2}}. \qquad \text{(C)}$$

Cette équation, dans laquelle il faut distinguer avec soin le signe de la différenciation d et la distance d, est la même que celle du *Traité de la lumière* de Herschell, t. I, p. 118.

7. Elle va, dès à présent, nous faire connaître si l'optoïde peut devenir quelquefois une section conique. Soit

$$y^2 = 2\,m\,x + n\,x^2$$

l'équation de cette section conique : on aura

$$dy = \frac{1}{y}(m + n\,x)\,dx,$$

valeur qui, substituée dans l'équation (C), donne

$$\frac{m+d+nx+x}{\sqrt{(d+x)^2+2mx+nx^2}} = -l\,\frac{-f+m+nx+x}{\sqrt{(f-x)^2+2mx+nx^2}} \qquad \text{(D)}.$$

Nous remarquerons d'abord que si l'on fait dans cette équation $x = o$, $y = o$, et qu'on remplace m, qui est la valeur du rayon de courbure au sommet de la section conique, par la lettre r, affectée dans ce qui suit à la désignation de ce rayon, on obtient

$$f = \frac{l\,d\,r}{(l-1)\,d-r}. \qquad \text{(E)}$$

Expression qui donne la distance focale AF (fig. 2) dans le cas où le point M se confond avec l'origine A. Or, si la section conique est osculatrice en A à l'optoïde, il arrivera que pour la surface de révolution décrite par l'optoïde, pour celle qui sera décrite par la section conique, et pour la sphère dont le rayon sera le rayon de courbure r, les rayons de lumière infiniment proches de l'axe de révolution se réfracteront en F; donc la formule (E), si souvent employée dans nos mémoires [114][1], est bien celle qui donne la distance focale f dans le cas des surfaces sphériques réfringentes.

8. Maintenant, mettons l'équation (D) sous la forme

$$P + Q\,x + R\,x^2 + S\,x^3 + T\,x^4 = o.$$

Il faudra que cette équation soit satisfaite par une infinité de valeurs de x, ce qui donne

$$P = o, \quad Q = o, \quad R = o, \quad S = o, \quad T = o.$$

Si donc on pouvait trouver pour une valeur arbitraire de d des valeurs de l, m, n et f qui satisfissent à ces équations, les valeurs

[1] Les nombres, comme celui-ci, qui sont entre des crochets, renvoient à l'ouvrage de l'auteur intitulé : *Théorie de l'œil*, publié de 1844 à 1846. Cet ouvrage contient quatre de ses mémoires, lesquels, dans les *comptes rendus de l'Académie*, sont indiqués par une même série de numéros. Dans cette série, ce premier mémoire *sur la vision* et le suivant sont le V^e^ et le VI^e^.

qui s'ensuivraient pour m et n donneraient des sections coniques dont tous les points renverraient les rayons lumineux vers un même foyer. Mais il est aisé de voir que la dernière de ces équations est

$$(n+1)^3 - l^2 (n+1)^3 = 0,$$

ou

$$1 - l^2 = 0,$$

ce qui donne

$$l = 1,$$

et montre, sans aller plus loin, que, d ayant une valeur finie, les sections coniques ne peuvent jamais devenir des optoïdes.

9. Voyons ce que devient la courbe quand d est infini. Dans ce cas, l'équation (D) prend la forme

$$-l\,(m-f) + (n-1)\,x\} = \sqrt{(f-x)^2 + 2\,m\,x + n\,x^2}$$

ou

$$\{(1-l^2)f^2 + 2\,l^2\,m\,f - l^2\,m^2\} - 2\,x\,(m-f)\,(n\,l^2 + l^2 - 1) - x^2\{n\,(n\,l^2 + l^2 - 1) + (n\,l^2 + l^2 - 1) = 0.$$

Et comme l'équation (C), lorsque $d = \infty$, se change en $f = \frac{l\,r}{l-1}$, ou $f = \frac{l\,m}{l-1}$, le premier terme de l'équation précédente disparaît, et cette équation se trouve satisfaite en faisant $n\,l^2 + l^2 - 1 = 0$. Or, on tire de cette équation et de l'équation $f = \frac{l\,m}{l-1}$ les valeurs

$$m = \frac{l\,f - f}{l} \text{ et } n = \frac{1-l^2}{l^2},$$

lesquelles, si l'on substitue l'équation

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \qquad \text{(F)}$$

à l'équation

$$y^2 = 2\,m\,x + n\,x^2,$$

deviennent

$$\frac{b^2}{a} = \frac{(l-1)f}{l}; \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1-l^2}{l}. \tag{G}$$

Donc, si les demi-axes a et b de la section conique (F) sont déterminés au moyen des équations (G) que nous venons d'obtenir, d étant infini, l'équation (C) sera satisfaite, c'est-à-dire que la section conique sera une optoïde[1].

10. Si cette section conique est une ellipse, $\frac{b^2}{a}$ sera négatif : les équations (F) deviendront donc

$$-\frac{b^2}{a} = \frac{lf-f}{l}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1-l^2}{l^2},$$

et l'on en tirera, en désignant par c l'excentricité $\sqrt{a^2-b^2}$,

$$l = \frac{a}{c}; \quad f = a \pm c,$$

ce qui donne, par la construction de la valeur de f, les deux foyers F et F′ (fig. 3) de l'ellipse ANA′.

Donc l'indice de réfraction l étant égal au rapport $\frac{a}{c}$ du demi grand axe à l'excentricité, et les rayons lumineux étant parallèles à AX et dirigés dans le sens AX, le foyer des rayons réfractés sera situé en F, c'est-à-dire au foyer de l'ellipse le plus éloigné du sommet A.

11. Il est clair que le foyer F′ de l'ellipse est aussi un foyer de rayons réfractés. En effet, un rayon quelconque $r\,m$, qui rencontre l'ellipse en un point m, la rencontre aussi en un autre point n, et s'il est dirigé dans le sens $r\,m$ en arrivant en m, il faut, pour que l conserve sa valeur, ou pour que la lumière passe, dans un cas comme dans l'autre, par exemple du milieu le plus rare dans le milieu le plus dense, il faut, disons-nous, que le rayon arrivant en n soit dirigé de t en n : d'où l'on voit que le point F′ est le

[1] Descartes a démontré synthétiquement cette propriété pour le cas de l'ellipse (*Dioptrique*, 8ᵉ discours).

foyer des rayons dirigés dans le sens $t\,n$, comme F est celui des rayons dirigés dans le sens $r\,m$.

12. En remontant à l'équation (A) du n° 5, on voit que, sous le rapport analytique, elle s'applique tout aussi bien à la droite MF′ (fig. 2), telle que F′MN = NMF, qu'au rayon réfracté MF lui-même. En substituant, dans ce qui précède, la ligne MF′ à la ligne MF, on a tang r = tang (MNX — MFX), et, en définitive, tang $r = -\frac{f-x-y\varphi}{(f-x)+y}$: c'est-à-dire que tangente r, au signe près, a la valeur donnée par l'équation (B). Or, dans la valeur trouvée plus haut (6) de sin. r, $f - x - y\,\varphi$ est le numérateur d'une fraction dont le dénominateur est affecté du signe $\pm$: donc l'équation (C) convient également aux rayons renvoyés suivant MF et suivant MF′. Ainsi le point F′, sous le rapport analytique, est aussi un foyer comme le point F, et, physiquement, le dernier correspond, dans le cas de l'ellipse, aux rayons dirigés en sens contraire de ceux qui sont réfractés vers le premier.

13. La section conique étant hyperbolique (fig. 4), on a, en désignant toujours l'excentricité par c,

$$l = \frac{a}{c}; \quad f = -a \mp c,$$

ce qui place les foyers F et F′ aux foyers mêmes de l'hyperbole. L'infini étant à la fois à droite et à gauche de l'axe imaginaire PQ, les rayons qui arrivent sur la branche MAN sont dirigés dans le sens F′F et se réfractent en F, tandis que ceux qui arrivent sur la branche M′A′N′ sont dirigés dans le sens FF′ et se réfractent en F′.

14. Dans le cas de la parabole on a $\frac{b^2}{a^2} = o$, et les équations (F) donnent

$$l = 1 \text{ et } f = \infty.$$

Et comme on a

$$\frac{b^2}{a} = \frac{l-l}{1} = o,$$

l'équation de cette parabole est $y = o \times x$: d'où l'on voit qu'elle se confond avec l'axe des y et que, l étant égal à l'unité, les rayons lumineux parallèles conservent leurs directions en la traversant et concourent, par conséquent, à une distance f égale à l'infini.

15. Tout ce qui précède, en ce qui concerne les sections coniques, considérées comme des optoïdes, peut se tirer de l'équation (C), dans laquelle on fait $d = \infty$, ce qui donne immédiatement par l'intégration une équation du second degré.

Opérons d'une manière générale sur cette équation (C). En l'intégrant, nous aurons

$$\sqrt{y^2 + (d + x)^2} = - l\sqrt{y^2 + (f - x)^2} + C,$$

dans laquelle $\sqrt{y^2 + (f - x)^2}$ est le rayon vecteur RM (fig. 5), partant du point R, rayon que nous désignerons par la lettre u, et $\sqrt{y^2 + (f - x^2)^2}$ un autre rayon vecteur FM, partant du point F, et que nous désignerons par la lettre t.

16. L'optoïde passant par l'origine A, pour laquelle on a $x = o$, $y = o$, en même temps que $u = + d$ et $t = + f$, l'équation précédente, pour le point A, devient

$$d = - lf + C,$$

ce qui donne

$$\sqrt{y^2 + (d + x)^2} - d = l\left(f - \sqrt{y^2 + (f - x)^2}\right). \quad (H)$$

C'est, en quantités finies, l'équation de l'optoïde.

16 *bis*. Si l'on fait disparaître les radicaux, et que l'on fasse

$$\frac{2l\left[fd(1 + l^2) + l(f^2 + d^2)\right]}{(1 - l^2)^2} = A;$$

$$\frac{2(1 - l^2)d + l^2 f)}{1 - l^2} = B;$$

$$\frac{8lfd(d + lf)(l + 1)}{(1 - l^2)^2} = C;$$

$$\frac{4\{(l^2f^2-d^2)l^2-1)-lfd(l-1)^2\}}{(1-l^2)^2}=D;$$

$$\frac{4(d+l^2f)(1-l^2)}{(1-l^2)^2}=E,$$

on aura

$$y^4-2(A-Bx-x^2)y^2+Cx+Dx^2+Ex^3+x^4=o \quad (I)$$

pour l'équation générale cherchée.

On voit qu'elle est du 4e degré et qu'elle se résout par rapport à y comme celles du second.

17. Si l'on fait $x=o$ dans cette équation, on trouve pour y les quatre valeurs

$$y=\pm o$$

$$y=\pm\frac{2}{1-l^2}\sqrt{1(d+lf)(f+ld)}.$$

Ces valeurs font voir que l'axe des y est tangent à l'optoïde au point A (fig. 5), et qu'il coupe cette courbe en deux points S et S′, dont l'un S est au-dessus de l'axe des X.

En faisant $y=o$ dans l'équation générale, on trouve

$$C+Dx+Ex^2+x^3=o, \quad (K)$$

équation qui est satisfaite quand on fait

$$x=\frac{2lf}{l+1};\quad x=-\frac{2d}{l+1};\quad x=\frac{2(d+lf)}{l-1}.$$

Nous reviendrons plus loin (25) sur ces valeurs.

18. Pour construire facilement l'optoïde, mettons dans l'équation (H) les rayons vecteurs u et t (15), au lieu des expressions $\sqrt{y^2+(d+x)^2}$, $\sqrt{y^2+(f-x)^2}$, ce qui nous donnera au moyen des nouvelles variables u et t l'équation très-simple

$$u-d=l(f-t). \quad (L)$$

19. Le point R étant, sur l'axe des X, le centre d'où divergent les rayons vecteurs u, et F celui d'où divergent les rayons vec-

teurs t, les points M de la courbe sont ceux auxquels correspondent deux droites $RM = u$, $FM = t$, qui satisfont à l'équation précédente, et qui sont les rayons des deux cercles décrits des points R et F comme centres, de sorte que ces deux cercles donnent le point M. Il est clair, d'après cela, que si l'on se donne t arbitrairement, l'équation (L) donne le rayon u correspondant à t.

20. Élevons par les points R et F les droites RR′, FF′, perpendiculaires à AX; prenons les u positifs sur RR′ au-dessous de l'axe AX; les t positifs sur FF′ au-dessus du même axe; rapportons RA en Ra, FA en Fa', et menons la droite aa' qui passe par le point A et coupe AX à 45 degrés; puis, sur la droite aa' prenons, à partir du point a', une grandeur

$$a'\,C = \frac{a\,a'}{l-1},$$

ou, ce qui revient au même, construisons le point C de manière qu'une grandeur $a'\,m'$ étant prise arbitrairement, et la grandeur am calculée de façon qu'on ait $a\,m = l \times a'\,m'$, les droites aa', mm', aient pour intersection le point C, on aura

$$a\,m : a'\,m' :: l : 1 :: a\,a' + a'\,C : a'\,C;$$

ce qui donne bien

$$a'\,C = \frac{a\,a'}{l-1}.$$

Cela posé, si du point R comme centre, avec un rayon quelconque Rm, on décrit l'arc $m\,M'\,M$, et qu'on mène la droite mC, qui coupe FF′ en m'; puis que l'on décrive du point F comme centre, avec Fm' comme rayon, l'arc $m'MM'$, il coupera, en général, l'arc mMM' en deux points M et M′ qui appartiendront à l'optoïde; car on aura

$$a\,m = l \times a'\,m',$$

ou

$$R\,m - R\,a = l\,(F\,a' - F\,m'),$$

ou

$$u - d = l\,(f - t).$$

21. On remarquera que le même arc $m\mathrm{M}'\mathrm{M}$ (fig. 5) coupe aussi la droite RR′ en n, et que si l'on mène la droite $n\mathrm{C}$, qui détermine sur FF′ un autre rayon vecteur Fn', les arcs $m\mathrm{M}'\mathrm{M}n$, $n'\mathrm{N}$, se coupent en deux points N et N′ qui appartiennent à l'optoïde. En effet, les grandeurs am, $a'm'$, ayant été prises positivement, leurs analogues an et $a'n'$ doivent être prises négativement : on a donc

$$-\,a\,n = -\,l \times a'\,n',$$

ou

$$-\,\mathrm{R}\,n - \mathrm{R}\,a = -\,l\,(\mathrm{F}\,n' - \mathrm{F}\,a),$$

ou

$$-\,u - d = l\,(f - t),$$

qui n'est pas autre chose que l'équation (H), dans laquelle le radical $\sqrt{y^2 + (d + x)^2}$, égal à u, devient négatif.

22. La suite des points tels que M donne, comme on voit, la branche de courbe AMB, représentée par les équations

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{y^2 + (d + x)^2} - d = -\,l\left\{f - \sqrt{y^2 + (f - x^2)}\right.\\ u - d = l\,(f - t)\end{array}\right\} \ldots \text{(M)},$$

et les points tels que N donnent la branche VNSZ, représentée par les équations

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{y^2 + (d + x)^2} + d = l\,\left(\sqrt{y^2 + (f - x)^2} - f\right)\\ u + d = l\,(t - f)\end{array}\right\} \ldots \text{(N)}.$$

23. Il est aisé maintenant de calculer les abscisses x des points V, B, Z. On a, savoir:

Pour le premier V (fig. 5),

$$u + d = l\,(t - f),$$
$$\mathrm{R\,V} + \mathrm{F\,V} = \mathrm{R\,F},\ \text{ou}\ u + t = d + f;$$
$$x + f = t,$$

ce qui donne

$$\mathrm{X} = \mathrm{A\,V} = -\frac{2\,d}{l-1};$$

Pour le second B,

$$u + d = l\,(f - t),$$
$$\mathrm{R\,D} - \mathrm{F\,D} = \mathrm{R\,F},\ \text{ou}\ u - t = d + f,$$
$$-\mathrm{X} - f = t,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{X} = \mathrm{A\,B} = \frac{2\,lf}{l+1},$$

Et pour le troisième Z,

$$u + d = l\,(t - f),$$
$$\mathrm{R\,Z} - \mathrm{F\,Z} = \mathrm{R\,F},\ \text{ou}\ u - t = d + f,$$
$$\mathrm{X} = t + f,$$

équations qui conduisent à

$$\mathrm{X} = \mathrm{A\,Z} = \frac{2\,(d + lf)}{l-1}.$$

24. Si, avec ces valeurs de X, on forme les facteurs $x - \mathrm{A\,V}$, $x - \mathrm{A\,B}$, $x - \mathrm{A\,Z}$, leur produit, égalé à zéro, donne l'équation (K), dont AV, AB et AZ sont par conséquent les racines.

25. On peut aussi calculer directement la valeur de AS (fig. 5) obtenue plus haut (17). Pour cela, nous remarquerons que le point S est tel qu'on a les trois équations

$$d^2 + \overline{AS}^2 = u^2;$$

$$f^2 + \overline{AS}^2 = t^2;$$

$$u + d = l(t - f);$$

lesquelles, par l'élimination de u et t, donnent

$$AS = \pm \frac{2}{l^2 - 1} \sqrt{l(d + lf)(f + ld)}.$$

26. Mais les points les plus essentiels pour décrire l'optoïde sont les points V, B, Z : voici une construction qui les fournit très-simplement. Transportons de la fig. 5 à la fig. 6 les points R, A, F, a, a', C, etc. et menons par le point C (fig. 6) la droite Cz, inclinée à 45 degrés. Elle coupera les lignes RR′, FF′, en deux points z et z', et les droites $z'a$, za' et zz', menées en diagonales dans le trapèze $aa'z'z$, couperont l'axe AX aux points cherchés. D'où l'on voit que si l'on se donne un trapèze $aa'z'z$, dont les côtés non parallèles soient tous deux obliques sur les côtés parallèles, et qui soit coupé par une droite AX perpendiculaire à az, les diagonales et les côtés obliques de ce trapèze donneront les quatre sommets V, A, B, Z, de l'optoïde pour lequel on aurait RA $= d$, AF $= f$, et aC : a'C : : l : 1.

Le moyen qui vient d'être exposé (18-21) de construire l'optoïde est, comme on doit le voir, simple et commode, lorsque les distances de d et f sont petites. Mais il est d'un emploi difficile quand ces distances sont grandes, parce qu'alors les points R, a et C étant éloignés, la figure prend trop d'étendue; et il est en défaut quand d ou f sont infinis, puisque, dans ce cas, les points R, a et C passent à l'infini.

27. L'objet du point C (fig. 5) étant de donner des grandeurs, telles que $a'm'$ et $a'n'$, qui soient dans un rapport l avec les gran-

deurs correspondantes am et an, il est facile de remédier à ces inconvénients.

Pour cela, construisons sur la distance focale AF (fig. 7) le carré AF a' G, et par son angle G menons la droite GD, telle qu'on ait GH : HI : : 1 : l; décrivons, avec un rayon vecteur Rm, pris arbitrairement, un demi-cercle mMN n, qui coupera AX en deux points m et n; par ces points élevons les verticales ms, nr, et par les points s et r où elles rencontrent GD menons les horizontales sm' et rn', nous obtiendrons les grandeurs $a'\,m' = \frac{\text{A}\,m}{l}$, $a'\,n' = \frac{\text{A}\,n}{l}$, et il est clair que les arcs m'M, n'N, décrits du point F comme centre, donneront sur le demi-cercle mMNn, les points M et N de l'optoïde.

28. Supposons que l'on ait $d = \text{AR} = \infty$, ou, ce qui est la même chose, que le point R s'éloigne à une distance infinie de l'origine A, les arcs de cercle tels que mM (fig. 7) deviendront des droites telles que ms (fig. 8), et les constructions demeurant d'ailleurs les mêmes, la nouvelle figure déterminera une courbe AMEB, pour chaque point M de laquelle, A étant l'origine des coordonnées, on a les deux équations

$$x = l \times a'\,m',$$

$$(x + f)^2 + y^2 = (f - a'\,m')^2;$$

d'où l'on tire en éliminant $a'm'$,

$$y^2 = 2\,f\,\frac{l-1}{l}\,x + \frac{1-l^2}{l^2}\,x^2.$$

Or, HI étant supposé plus grand que GH, ou $l > 1$, cette équation est celle d'une ellipse.

29. Il est aisé de voir que cette courbe est touchée en E par la droite GD (fig. 8), et que si l'on mène par le point F la droite FD, inclinée à 45 degrés, elle détermine sur GD un point D, tel que GK et DK sont les grandeurs des deux axes de l'ellipse AMED.

30. En faisant HI plus petit que GH, on est conduit à une courbe ouverte AMT (fig. 9), qui n'est autre chose que l'hyper-

bole correspondante au cas de $l < 1$, dont AA′ est le plus grand axe et F l'un des foyers.

31. Si, dans l'équation générale (16 *bis*) on suppose $d = \infty$, elle se change en une autre, qui n'est pas autre chose que la précédente, et qui convient à l'ellipse ou à l'hyperbole, selon que le nombre l est plus grand ou plus petit que l'unité. Le demi-axe horizontal est égal à $\frac{l+1}{lf}$; le demi-axe vertical à $\frac{lf}{l(l+1)}\sqrt{l^2-1}$, et le rapport du grand axe à la ligne AF (fig. 8), égal au demi grand axe augmenté de l'unité, devient égal à l.

On peut, avec ces procédés, construire synthétiquement l'optoïde dans tous les cas possibles.

32. Mais les opérations graphiques étant peu précises, et celles dans lesquelles on applique l'optoïde à l'œil présentant des constructions où les lignes se coupent sous des angles quelquefois fort aigus, il est nécessaire de recourir au calcul pour obtenir numériquement les abscisses et les ordonnées des points qu'on veut connaître exactement. On pourrait se servir, à cet effet, de l'équation générale (16), mais le procédé suivant sera d'un emploi beaucoup plus simple.

33. Considérons la branche AMB (fig. 7) et le point M de cette branche. Ce point est l'intersection des cercles respectifs dont les centres sont en R et en F, et dont les rayons sont u et t: on aura donc pour le point M,

$$u - d = lf - lt$$
$$(d + f - x)^2 + y^2 = u^2$$
$$x^2 + y^2 = t^2.$$

Or, on tire de ces équations

$$t = \frac{lf - u + d}{l};$$
$$x = \frac{t^2 - u^2 + (d+f)^2}{2(d+f)};$$
$$y = \pm\sqrt{t^2 - x^2}.$$

Si donc on prend arbitrairement u, la première des trois équations précédentes fournira t en nombres, la seconde x et la troisième y.

34. Afin de nous donner x, nous avons quelquefois fait usage d'un autre moyen. Soit (fig. 7) $a'\,m' = \varphi$; la condition que le point M soit l'intersection des deux cercles m' M, m M, donnera

$$\varphi = -\frac{l\,d+f}{l^2-1} \pm \frac{1}{l^2-1}\sqrt{(l\,d+f^2)+2\,(l^2-1)\,(f+d)\,x},$$

$$y = \sqrt{(f-\varphi)^2-(f-x)^2}:$$

d'où l'on voit qu'en se donnant x on peut en déduire φ, ce qui conduit ensuite à la valeur de y.

35. Cherchons la tangente MT au point M de la courbe AMM' (fig. 10), R et F étant l'un le point rayonnant et l'autre le foyer. L'équation focale de cette courbe (22) est $u - d = l\,(f - t)$, d'où l'on tire en différenciant

$$d\,u = -\,l\,d\,t.$$

Or, si l'on porte sur les rayons vecteurs respectifs RM, FM, à partir du point M, les deux lignes MV, MW, telles que l'on ait M V égal à $l \times$ M W; puis que l'on élève par les points V et W les perpendiculaires VT, WT, elles se couperont en un point T, et si par ce point et par le point M on mène la droite TM, elle sera la tangente cherchée; car Mm étant un élément infiniment petit de l'optoïde, et les droites mv et mw, Mv et Mw, étant respectivement parallèles et perpendiculaires à MR et à MF, on a $mv = du$, $mw = d\,t$, et les triangles Mvm et TVM, Mwm et TWM étant semblables, la droite TM est le prolongement de Mm.

36. La normale MN s'obtient aussi très-facilement. Prenons sur MR et MF deux longueurs égales MV, MG; menons ensuite VG; puis construisons le point N de manière qu'on ait NG : NV : : 1 : l. Il est clair que si l'on a cette proportion, les droites VT et GH seront les sinus d'incidence et de réfraction pour le cercle dont

le rayon est MV, et que leur rapport sera égal à l; donc la droite MN, menée par les points M et N, est la normale cherchée.

37. Au moyen de cette construction commode des normales, on peut déterminer graphiquement la développée de l'optoïde et en déduire ses rayons de courbure. Mais pour les obtenir avec précision, il faut recourir à leur expression différentielle. Afin d'éviter des calculs un peu compliqués, nous nous bornerons à la considération de ceux qui répondent aux sommets A, B, V, Z (fig. 5) de la courbe.

38. Son équation (16 *bis*) est

$$y^4 - 2(A - Bx - x^2)y^2 + Cx + Dx^2 + Ex^3 + x^4 = 0;$$

mettons-la sous la forme

$$y^4 - 2My^2 = N,$$

en faisant

$$M = A - Bx - x^2,$$

$$N = -Cx - Dx^2 - Ex^3 - x^4.$$

Prenons les différentielles de ces expressions, et posons

$$\frac{dM}{dx} = -B - 2x = P;$$

$$\frac{dN}{dx} = -C - 2Dx - 3Ex^2 - 4x^3 = Q.$$

Nous aurons, conséquemment, en différentiant l'équation de la courbe,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Py^2 + Q}{4y(y^2 - M)}.$$

Concevons qu'un cercle, d'un rayon r, ait son centre sur l'axe des x, à une distance $+a$ de l'origine; son équation sera

$$y^2 = 2r(x - a) - (x - a)^2,$$

ce qui donne pour ce cercle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r - (x - a)}{y}.$$

39. Cela posé, prenons sur l'optoïde un point dont les coordonnées soient x' et y', et supposons que le cercle passe par ce point et par le point infiniment voisin, c'est-à-dire que le cercle et l'optoïde aient en ce même point une tangente commune. Il est clair qu'on aura pour le cercle

$$x = x', \quad y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'},$$

ce qui donne

$$y'^2 = 2r(x' - a) - (x' - a)^2;$$
$$\frac{r - (x' - a)}{y} = \frac{2Py'^2 + Q}{4y'(y'^2 - M)},$$

et en éliminant $x' - a$, on trouve

$$r^2 = y'^2 + \left\{ \frac{2(B - 2x')y'^2 + C + 2Dx' + 3Ex'^2 + 4x'^3}{4(y'^2 - A - Bx' - x'^2)} \right\}^2,$$

expression d'où l'on peut tirer le rayon r du cercle tangent à l'optoïde au point (x', y').

40. Supposons que y' soit égal à zéro, le point de contact sera sur l'axe des x, et le cercle passera par le point correspondant de l'optoïde et par le point infiniment rapproché en dessus. Mais tout est symétrique entre les deux courbes par rapport à l'axe des x : donc le cercle passera aussi par le point de l'optoïde infiniment rapproché et situé au-dessous de l'axe : donc r sera le rayon du cercle osculateur. On a conséquemment pour ce rayon

$$r = \frac{C + 2Dx' + 3Ex'^2 + 4x'^3}{4(A + Bx' - x'^2)}.$$

41. Si l'on fait $x = 0$ dans cette équation, le rayon de courbure correspond à l'origine, et si l'on substitue dans son expression les valeurs suivantes

$$A = \frac{2l(d + lf)(f + ld)}{(1 - l^2)}$$
$$C = \frac{8lfd(d + lf)(l - 1)}{(1 - l^2)},$$

tirées du numéro 16 *bis*, on trouve

$$r = \frac{4\,A}{C}$$

ou

$$r = \frac{fd(l-1)}{f+ld},$$

valeur pareille à celle qu'on tire de l'équation (E), dont l'exactitude a déjà été démontrée (7).

En mettant au lieu de x', dans l'expression générale du rayon r, les abscisses des trois autres sommets suivant lesquels l'axe des x coupe l'optoïde, on trouverait les rayons de courbure correspondants à ces sommets.

CHAPITRE II.

DES DIVERSES ESPÈCES D'OPTOÏDES À ESSAYER DANS LA GÉNÉRATION DES SURFACES DE L'OEIL.

42. La disposition des surfaces réfringentes de l'œil par rapport au point rayonnant et au foyer de chacune d'elles, conduit à considérer ces surfaces comme engendrées par quatre espèces d'optoïdes :

Premièrement, les optoïdes pour lesquelles le point rayonnant et le foyer sont situés sur les deux côtés opposés de la courbe, cette courbe tournant sa convexité vers le point rayonnant. La surface extérieure de la cornée, dans le cas de l'œil raccourci et de l'œil allongé, est de celles qui peuvent être produites par des optoïdes de cette espèce.

Secondement, les optoïdes dans lesquelles le point rayonnant et le foyer sont du même côté de la courbe, f étant plus petit que d, et cette courbe tournant sa convexité du côté d'où la lumière arrive. La surface antérieure du cristallin pourrait être engendrée par une de ces optoïdes.

Troisièmement, les optoïdes auxquelles correspondent encore un point rayonnant et un foyer situés du même côté de la courbe, en même temps qu'on a $d > f$, mais dans lesquelles la concavité est tournée vers les rayons arrivants. La surface postérieure du cristallin est dans ces conditions par rapport à l, f et d. Nous verrons jusqu'à quel point elle offre l'exemple d'une surface engendrée par une telle optoïde.

Quatrièmement, enfin, les optoïdes qui ne diffèrent de la précédente qu'en ce qu'on a $d < f$. Les surfaces réfringentes du corps vitré ne seraient-elles pas produites par des optoïdes de cette quatrième espèce? C'est ce que nous aurons à examiner.

43. Nos exemples seront pris dans l'œil n° 1, tel qu'il se trouve décrit par les chiffres du tableau du n° 605 de la *Théorie de l'œil*. Nous avons sur cet œil n° 1 beaucoup de calculs tout faits; nos lecteurs le connaissent, et, par ces raisons, il nous convient de l'employer ici. Quant à l'inconvénient qu'il présente d'avoir des surfaces centrées sur le même axe, nous devons, pour aller du simple au composé, accepter maintenant cet inconvénient. Plus tard nous reviendrons sur cet objet. D'après cela, pour chaque exemple de courbe optoïdale, nous trouverons les valeurs de l, de d et de f au tableau précité du numéro 605, et nous pourrons construire l'optoïde.

44. Les courbes obtenues sont représentées avec une échelle de deux millimètres pour un. La droite AV (fig. 11) est l'axe optique; les génératrices correspondantes à l'œil raccourci seront au-dessus de AV, et nous mettrons au-dessous de cet axe celles qui correspondent à l'œil allongé. Nous supposerons que le point V soit pour l'œil raccourci et pour l'œil allongé le point d'intersection du fond de l'œil et de l'axe optique. Les points A et A′, tels que $AV = 21.984$ et $A'V = 22.308$, sont les sommets respectifs de la cornée [605 et 606], pour les deux yeux dont il s'agit.

45. Première espèce. Exemple : *Surface extérieure de la cornée.* Considérons d'abord l'œil raccourci. D'après le tableau précité du

n° 605, on aura $l = 1.33$, $d = \infty$, $f = 34.987$, et l'optoïde, conformément à ce qu'on a vu précédemment (28), sera l'ellipse,

$$l^2 y^2 = 2(l-1) l f x + (1 - l^2) x^2,$$

pour laquelle on a,

demi grand axe $a = 19.9711$,
demi petit axe $b = 13.1673$,

le grand axe de la courbe coïncidant avec l'axe optique de l'œil.

Cette courbe est représentée en AB (fig. 11), et l'on a pour les coordonnées du point B, $x = 2.025$ et $y = 5.784$.

46. Pour l'œil allongé, le tableau précité du n° 605 donne $l = 1.33$, $d = 250$, $f = 37.362$, et l'optoïde est de l'espèce des courbes représentées en AMB (fig. 5 et fig. 7), et dont la construction se trouve exposée aux n^{os} 20 et 27. Elle pourrait donc s'obtenir au moyen du compas et de la règle, mais non pas sans quelques difficultés résultant de ce que la valeur de d, avec une échelle double de l'échelle naturelle, étendrait considérablement la grandeur de la figure.

47. Le calcul appliqué à cette courbe donne la formule

$$\varphi = -481.027353 \pm 1.300559\sqrt{136797.899044 + 441.905284\, x},$$

d'où l'on tire par le procédé du numéro 34, pour les abscisses $x = 2.025$ et $x = 2.50$,

$$\varphi = 1.571 \text{ et } y = 5.682,$$
$$\varphi = 1.939 \text{ et } y = 6.280.$$

Le point dont les coordonnées sont $x = 2.025$ et $y = 5,682$, se trouve représenté en B′ (fig. 11), et la courbe cherchée est A′B′.

48. Deuxième espèce. Exemple : *Surface antérieure de la capsule*. On a [605] pour cette surface, dans le cas de l'œil raccourci, $l = 1.909$; $d = -30.460$ et $f = 29.269$. Les centres R et

F (fig. 5) sont en conséquence tous deux situés sur le coté droit du sommet A, et très-près l'un de l'autre, ce qui donne des cercles de construction se coupant sous des angles fort aigus; d'où il résulte que la détermination graphique de leur point M de rencontre est peu précise. Nous avons dû, en conséquence, calculer la formule

$$\varphi = \frac{-1.4651 \pm \sqrt{2.14652 - 0.04307\,x}}{0.018081},$$

et nous avons trouvé, avec le secours de cette formule et de l'équation

$$y = \sqrt{(f - \varphi)^2 - (f - x^2)},$$

pour les points de la figure 11, savoir :

D, $x = 1$, $\varphi = 0.818$ et $y = 3.217$;

E, $x = 2$, $\varphi = 1.645$ et $y = 4.418$;

F, $x = 3$, $\varphi = 2.478$ et $y = 5.258$.

Au moyen de ces valeurs, nous avons pu construire exactement la génératrice CDEF.

49. Dans le cas de l'œil allongé, le tableau précité [605] donne $l = 1.009$, $d = 33.943$ et $f = 32, 439$. La courbe cherchée C'D'E'F' diffère peu de la précédente, ainsi qu'on le voit par les valeurs obtenues au moyen de la formule :

$$\varphi = 100.076718 \pm 55.30668 \sqrt{3.272432 - 0.054388\,x}.$$

Ces valeurs sont :

Point D', $x = 1$, $\varphi = 0.878$ et $y = 2.772$;

Point E', $x = 2$, $\varphi = 1.705$ et $y = 4.251$;

Point F', $x = 3$, $\varphi = 2.554$ et $y = 5.144$.

50. Troisième espèce. Exemple : *Surface postérieure du cristallin ou antérieure du corps vitré.* D'après le tableau précité [605], on a pour cette surface, dans le cas de l'œil raccourci, $l = 0.\ 933$; $-d = 11.\ 679$ et $f = 9.\ 000$. Le point rayonnant R et le foyer F (fig. 12) sont encore l'un et l'autre à droite de l'origine A; mais contrairement à ce qui a lieu pour les exemples de la seconde espèce, le point R est plus éloigné du sommet A que le point F. Il en résulte qu'après avoir construit la droite GI, telle qu'on ait GH : HI : : 0. 933 : 1, il faut prendre le rayon Fm', d'un cercle de construction tel que m'M, plus grand que Fa', ce qui donne au moyen des lignes $m's$, sm, un rayon Rm, avec lequel se décrit l'arc mMn, qui donne le point cherché M. Les points tels que M ont donc des abscisses négatives.

On voit par la figure que les deux arcs m'M, mMn, se coupent sous un angle très-petit, ce qui oblige à recourir au calcul pour avoir des constructions exactes.

51. Il donne

$$\varphi = -17.00068 \pm 7.721352\sqrt{4.847813 + 0790276\,x},$$

et nous avons tiré de cette équation et de la valeur

$$y = \sqrt{(f-\varphi)^2 - (f-x)^2},$$

pour les points respectifs M, N, P, Q, les chiffres suivants, savoir :

$x = -1$, $\varphi = -1.488$ et $y = 3.626$;
$x = -2$, $\varphi = -3.160$ et $y = 5.184$;
$x = -3$, $\varphi = -5.140$ et $y = 7.480$;
$x = -4$, $\varphi = -7.647$ et $y = 10.399$.

En construisant les valeurs de x et y nous avons obtenu la courbe AMNPQ, dont un petit arc est rapporté sur la figure 11 en GHI.

Or, il suffit de regarder la courbe AMNPQ (fig. 12) pour reconnaître qu'elle est loin de présenter la figure bien connue de la partie postérieure du cristallin; mais ce n'est pas ici le lieu d'examiner cette circonstance. (Voy. le chapitre III.)

52. Dans le cas de l'œil allongé, $l = 0.933$, $-d = 12.675$ et $f = 9.624$. On a en conséquence

$$\varphi = -17.00068 \mp 7.721352\sqrt{4.847813 - 0.790276x},$$

ce qui donne pour les cinq points L, M, N, O, P, de la fig. 11, savoir :

$$x = -1,\ \varphi = -1.447 \text{ et } y = 2.774;$$
$$x = -2,\ \varphi = -3.044 \text{ et } y = 5.036;$$
$$x = -3,\ \varphi = -4.843 \text{ et } y = 7.066;$$
$$x = -4,\ \varphi = -6.973 \text{ et } y = 9.479;$$
$$x = -5,\ \varphi = -9.690 \text{ et } y = 12.610.$$

D'où l'on voit que l'optoïde cherchée KLMNOP, est bien peu différente de celle qui précède.

53. Quatrième espèce. Exemple : *Surface du corps vitré*. On trouve [605] pour cet exemple, dans le cas de l'œil raccourci, comme dans le cas de l'œil allongé, bien que, à la rigueur, ils ne soient pas absolument les mêmes, $l = 1.01$, $d = 9.086$ et $f = 9.380$. La courbe, ainsi que dans la troisième espèce, n'a que ses parties à peu près adjacentes au sommet qui soient situées en deçà de la verticale passant par ce sommet.

Nous avons trouvé pour les trois points S, R, Q (fig. 11), savoir:

$$x = 1,\ \varphi = -1.569 \text{ et } y = 3.484;$$
$$x = 2,\ \varphi = -3.500 \text{ et } y = 6.032;$$
$$x = 3,\ \varphi = -6.002 \text{ et } y = 9.129.$$

En construisant ces points, on obtient la ligne TSRQ. Nous l'avons rapportée en T S', au-dessous de l'axe AV, attendu qu'elle

est sensiblement la même pour l'œil raccourci et pour l'œil allongé.

54. Cette ligne TSRQ, et les lignes précédentes GHI, KLM, ne doivent pas, quant à la vision, satisfaire le lecteur. Nous allons nous occuper, dans le chapitre qui suit, des objections que soulève leur forme et de la question de savoir jusqu'à quel point les quatre espèces d'optoïdes que nous venons de construire peuvent convenir à la génération des surfaces réfringentes de l'œil.

CHAPITRE III.

EXAMEN DES OBJECTIONS QUE SOULÈVE L'OPTOÏDE SIMPLE, CONSIDÉRÉE COMME GÉNÉRATRICE DES SURFACES RÉFRINGENTES DE L'ŒIL.

55. Le chapitre qui précède fait voir qu'il y a des cas où les courbes optoïdales ne sont pas, comme génératrices des surfaces réfringentes de l'œil, d'une nature admissible.

En effet, la partie postérieure du cristallin ne présente pas, en réalité, la figure AMNPQ (fig. 12); d'où il suit que la surface de ce corps, du côté de la rétine, avec la condition de $l < 1$ et de $d > f$, ne peut être une optoïde simple, c'est-à-dire une optoïde du 4e degré. De même, les surfaces réfringentes du corps vitré ne peuvent avoir la figure QRST (fig. 11).

56. La forme bien connue de la membrane cristalloïde ne s'accorde pas non plus, du moins en ce qui concerne l'œil n° 1, avec la théorie qui admettrait des optoïdes pour toutes les surfaces réfringentes du globe oculaire; car la surface antérieure de la capsule ayant la figure ABCD (fig. 13) des optoïdes de la seconde espèce, la surface postérieure de cette capsule appartiendrait à la troisième espèce. Cette surface présenterait, en conséquence, la figure MBNP, ce qui donnerait un point B d'intersection des lignes ABCD, MBNP: de sorte qu'au lieu d'une membrane com-

prise entre deux courbes à peu près équidistantes, on aurait une forme absolument inadmissible.

57. Mais on peut dire que cette objection a été résolue par avance aux nos 372-378 de la *Théorie de l'œil*. A quoi tient-elle, en effet? Uniquement à ce que l'indice déterminé par M. Chossat, pour la première couche du cristallin, est moindre que celui de la capsule : or nous avons fait voir, dans les numéros cités plus haut, qu'il résultait, de la comparaison des nombreux chiffres obtenus pour des yeux d'animaux, que les indices augmentent de l'extérieur de la capsule au noyau.

On nous dira peut-être que nous devions, d'après cela, réformer les indices de l'œil n° 1. Nous n'avons pas pris ce parti, parce que c'était d'une faible utilité, et parce qu'il aurait semblé que nous éprouvions le besoin, pour l'objet que nous nous proposions alors, de modifier les chiffres obtenus par M. Chossat.

58. On peut encore reprocher aux optoïdes obtenues qu'elles ne sont pas assez ouvertes en ce qui concerne le devant de la cornée; mais on remarquera que l'optoïde s'ouvre ou se ferme plus ou moins, à mesure que l croît ou décroît; d'où il suit qu'avec une plus forte densité de la cornée nous aurions des courbes auxquelles on ne trouverait rien à redire sous ce rapport.

59. Nous ferons remarquer aussi que la figure du cristallin n'est pas la même pour l'œil raccourci et pour l'œil allongé, ainsi qu'on le voit par les coordonnées rapportées aux nos 48 et 49. C'est chose assez naturelle; car, dans l'œil allongé, le cristallin comprimé à son bord équatorial doit prendre un certain allongement dépendant de son plus ou moins de mollesse. Nous l'avons dit ailleurs et nous reviendrons sur ce sujet.

60. Il résulte de ce qui précède que, lorsque nous écrivions les pages 403 et suivantes de la *Théorie de l'œil*, nous nous persuadions, à tort, que toutes les surfaces réfringentes du globe pouvaient être des optoïdes simples, de telle sorte qu'un point rayonnant vert, par exemple, étant situé sur l'axe optique, tous les rayons admis dans la pupille fussent successivement réfractés du

foyer de l'optoïde précédente, pris pour point émergent de la suivante, au foyer de cette dernière, et, en définitive, réunis tous avec rigueur en un même point de la rétine. Cette théorie, qu'un travail déjà considérable justifiait quant aux surfaces convexes de l'œil, était assurément fort séduisante[1].

Mais il fallait achever le calcul pour se prononcer, et l'on voit qu'il ne justifie pas nos prévisions en ce qui concerne les surfaces non convexes. Suffirait-il que les surfaces convexes fussent optoïdales? Telle est une des questions qui doivent faire l'objet de nos recherches subséquentes.

61. En résumé, nous devons conclure de ce qui précède :

1° Que les optoïdes de la première espèce pourraient convenir aux surfaces extérieures de la cornée, les éloignements du point considéré variant de $0^{m},25$ à l'infini;

2° Que les densités du cristallin augmentant de l'extérieur au noyau, les optoïdes de la seconde espèce conviendraient aux surfaces postérieures de la cornée et aux surfaces des couches du cristallin et de la capsule convexes vers le devant de l'œil;

3° Que les optoïdes de la troisième espèce conviendraient pour les petites facettes, de deux millimètres à peu près environnant l'axe optique, des surfaces réfringentes concaves vers le devant de l'œil comprises entre le centre du noyau et le corps vitré;

4° Que les optoïdes de la quatrième espèce, mais seulement en ce qui concerne de petites facettes, comme les précédentes, conviendraient pour les surfaces réfringentes du corps vitré;

5° Que le noyau du cristallin devrait être homogène, et qu'il devrait avoir d'assez fortes dimensions pour qu'il fût rencontré par tous les rayons émanés des objets situés sur l'axe optique ou tout auprès de cet axe.

[1] Cette théorie va prendre, dans le VI^e^ mémoire, une forme un peu différente de celle qui vient d'être indiquée; mais non moins satisfaisante, non moins complète et non moins rigoureuse.

CHAPITRE IV.

DE LA DISPOSITION DES SURFACES REFRINGENTES DE L'ŒIL, DANS LA VISION À DES DISTANCES DIFFÉRENTES; CONCLUSION DE CE MÉMOIRE.

62. On a été longtemps sans s'apercevoir que les parties antérieures du globe oculaire n'étaient pas disposées symétriquement par rapport à l'axe optique, c'est-à-dire par rapport à l'axe de la cornée. Il paraît que la première observation importante sur cet objet est celle de D. W. Sœmmering, qui s'assura que, dans l'œil du cheval, le devant du cristallin et celui de la cornée ont des axes différents.

63. Vers 1818, M. le docteur Chossat, opérant avec les instruments du collége de France et par les conseils de M. Biot, s'occupa de déterminer d'une manière précise les formes des parties principales des yeux de divers animaux, et plus particulièrement de ceux du bœuf. Il trouva, 1° que les surfaces de la cornée et du cristallin étaient ou paraissaient être des surfaces de révolution; 2° que l'axe de la cornée était incliné en dedans, c'est-à-dire vers les naseaux de l'animal, de 9 à 10 degrés de plus que l'axe de la surface antérieure du cristallin; 3° que ce dernier axe était incliné, aussi vers les naseaux, d'environ 5 degrés de plus que celui de la surface postérieure.

64. Nous avons nous-même observé, après M. Chossat, la forme du cristallin renflé du côté externe, dans les yeux du lapin et de la pie.

Mais, dans l'œil humain, les circonstances que nous venons d'indiquer n'ont pas, que nous sachions, été remarquées. Le docteur Krause, opérant six ans après M. Chossat, et prenant pour modèle le travail du docteur génevois, a dû porter son attention sur les circonstances dont il s'agit : toutefois il place le cristallin de l'homme sur l'axe optique, et représente, du moins dans le seul

écrit que nous connaissions de lui, toutes les surfaces réfringentes comme centrées sur cet axe.

65. Serait-ce une faute qu'il aurait commise? Nous n'en serions pas surpris. Pour opérer, le docteur Krause tranche d'abord l'œil en deux, avec un rasoir; puis il mesure les dimensions de la section ainsi obtenue : or l'action du rasoir, quelque bon qu'il soit, déplace nécessairement les parties qui résistent plus que leurs voisines; d'où il résulte qu'après avoir fait la section on doit être obligé de remettre en place, *selon les idées qu'on se fait*, les parties déplacées, afin de remédier au désordre produit. Ainsi, les altérations dues à la mort; celles qui s'opèrent pendant l'extraction du globe et son nettoiement; enfin, celles que l'imagination de l'opérateur apporte dans l'arrangement et dans le rétablissement des figures à mesurer, n'ont pu manquer de vicier, jusqu'à un certain point, les résultats qu'on doit à M. Krause.

66. En faisant bien attention à ce qu'il dit à l'égard de la surface du fond de l'œil, on voit clairement qu'il a sur cet organe des idées de symétrie trop absolues; car, il fait violence aux faits, à ceux qu'il a lui-même constatés, pour établir, en critiquant Tréviranus, que cette surface est un ellipsoïde à trois axes inégaux, régulièrement placé par rapport à l'axe optique [268-272]. Il est donc manifeste que le docteur Krause, malgré tout le mérite de son travail, s'est laissé influencer par des opinions préconçues, tendantes à donner à l'œil humain une régularité qu'il n'a pas.

67. Il était presque impossible aux expérimentateurs d'éviter cet écueil. Les difficultés à vaincre pour avoir, d'après le mort, des mesures satisfaisantes de l'œil dans le vivant, sont tellement grandes, qu'on ne peut pas laisser de côté l'action incessante de la théorie qu'on est porté à se faire. Or, ils supposaient tout naturellement les vitres de l'œil, comme dans une lunette, centrées sur un même axe, et rien n'était plus propre à fausser leurs idées. On doit donc, quant à l'objet dont il s'agit, s'appliquer maintenant à revenir sur les nombreuses fautes qu'on a du faire.

68. Nous allons en citer une qui montre la nécessité d'opérer

avec une certaine rigueur. On voit, en lisant les livres d'anatomie, que, à l'inspection d'un œil coupé en deux, beaucoup de personnes ont pensé qu'elles pouvaient, à vue de nez, comme on dit, déterminer le sommet de la cornée et la direction de son axe : il faut reconnaître que ce moyen n'est pas satisfaisant. En effet, une courbe B′ AA′ B (fig. 14) étant donnée sur le papier, et cette courbe ayant un axe, il faut, pour déterminer cet axe, opérer à peu près ainsi qu'il suit. D'abord, mener une droite arbitraire AB; puis calquer soigneusement la figure et placer le calque, mis à l'envers, de façon que la courbe donnée et la courbe calquée coïncident parfaitement. Ensuite il faut marquer sur la courbe donnée les positions A′ et B′ que prennent les points A et B; enfin, mener une droite PQ, de manière qu'elle divise en parties égales les droites AA′, BB′ : la droite PQ ainsi construite est l'axe cherché, et de sa détermination résulte celle du sommet C et de la normale C P. N'est-il pas clair qu'en substituant le sentiment à de pareilles opérations, lorsqu'il s'agit de construire l'axe optique auquel on veut rapporter la figure et la position du cristallin, on est dans une voie bien peu rassurante pour la vérité?

69. Nous reconnaissons toutefois que, pour déterminer sur un même œil toutes les courbures des pièces de cet organe, ce qui était d'une grande utilité, le docteur Krause ne pouvait pas opérer par de meilleurs moyens que ceux qu'il a choisis et que M. le docteur Chossat avait employés. Mais la question change quand on se propose de déterminer, par exemple, l'inclinaison des axes de la cornée et du cristallin : alors, on peut opérer d'une manière plus sûre que celle dont le docteur Krause a fait usage. Il est évident que si, après avoir nettoyé le globe, on le place dans une cuvette, à peu près moulée sur sa forme ordinaire, en donnant à son axe une position autant que possible horizontale, et qu'ensuite, avec des ciseaux, on enlève une petite calotte de la sclérotique au droit du cristallin, puis une calotte plus grande, puis les parties de l'iris, des procès ciliaires et du corps vitré situés en deçà du plan passant par l'axe, lesquelles empêchent la vue de pénétrer dans

l'intérieur, on doit arriver, sans efforts qui puissent rien déplacer, ni sensiblement altérer la cornée, à juger bien des positions respectives que présentent les axes des surfaces réfringentes. Quoiqu'on n'ait guère opéré ainsi, du moins nous le croyons, sur des yeux humains très-frais, et en se débarrassant de tout préjugé touchant la régularité prétendue des surfaces réfringentes de l'œil, on peut cependant tirer des observations faites les conséquences importantes qui vont suivre.

70. Soit BAD (fig. 15) la cornée de l'œil d'un bœuf, A le sommet de BAD, A'A l'axe, E le côté extérieur du globe et I son côté intérieur. Puisque le cristallin est plus épais à l'extérieur qu'à l'intérieur (63), le rayon central [740] A' A s'infléchira dans l'œil, et il viendra percer la rétine en un point M, situé intérieurement par rapport à l'axe optique A'A. Cela posé, nous remarquerons que le rayon virtuel [251] correspondant au point M sera une droite M*a*, sensiblement parallèle à A'AP, et comme les rayons virtuels sont normaux à la rétine [261], la tangente au fond de l'œil aura une direction MN perpendiculaire à A'AP : d'où il suit que l'axe optique A'AP devra être incliné en P sur la rétine IME[1].

71. Cette conclusion se vérifie, en effet, sur les yeux de bœuf, comme on le voit par les figures 41 et 42 de la *Théorie de l'œil*, dessinées par un procédé qui présente quelque exactitude [249], et elle se vérifie également sur les yeux de lapin représentés sur les figures 43 et 44 du même ouvrage.

L'œil de pie (fig. 17) accuse aussi le même résultat; car il est manifeste que, dans cet œil, l'axe OP de la cornée ne peut être normal au fond MPQ du globe.

72. D'après cela, il est naturel de se demander si, chez l'homme, le rayon dirigé suivant l'axe optique, lorsqu'il atteint le fond de l'œil, est réellement normal à la rétine. Les travaux du docteur Krause semblent, à beaucoup d'égards, résoudre négativement cette question; car on peut remarquer :

[1] C'est ce que nous avons dit de l'œil humain dans les notes (*e*) et (*u*) de la *Théorie de l'œil*, pages 137 et 149.

Premièrement, que le plus court diamètre de l'œil joint, suivant lui [269], un point de la partie inférieure interne postérieure du globe avec un point de sa partie supérieure externe antérieure, tandis que le plus long joint un point de la partie inférieure externe postérieure avec un point de la partie supérieure interne antérieure, ce qui fait déjà présumer que le plan tangent à l'extrémité postérieure de l'axe optique est incliné avec cet axe;

Secondement, que, pour l'œil n° 1 [267], les points N et N′ de la section horizontale (voy. la fig. 49 de la *Théorie de l'œil*) sont un peu rentrés en dedans, tandis que ceux *n* et *n′* de la section verticale sont un peu en dehors, ce qui, en repoussant l'idée de symétrie à droite et à gauche, indique encore au point P (fig. 15) une inclinaison du plan tangent sur l'axe optique A′A;

Troisièmement, que, pour l'œil n° 2 [267], on est par les mêmes motifs conduit à la même conséquence.

73. Nous ajouterons que les lois de l'anatomie philosophique, si bien développées dans ces derniers temps, permettent de dire, en partant des observations de Sœmmering et de M. Chossat (62 et 63), que, dans l'œil de l'homme, les axes des surfaces réfringentes de la cornée et du cristallin s'inclinent en dedans par leur partie postérieure, à mesure qu'on arrive à une surface plus enfoncée dans l'œil, et que, en même temps, le cristallin doit être plus épais du côté externe qu'il ne l'est du côté interne. Or, il résulte de là, comme nous l'avons dit n° 70, pour l'œil du bœuf, que le rayon central est infléchi; qu'il arrive sur la rétine en un point M (fig. 15), différent du point P; que la tangente en M est perpendiculaire à l'axe A′P, et que cet axe n'est pas normal en P au fond de l'œil IME.

74. On doit donc admettre comme principe que, en général, les parties extérieures de l'œil ne sont pas disposées symétriquement par rapport à l'axe optique, et que, par conséquent, les surfaces réfringentes ne sont pas centrées sur le même axe. De plus, l'analogie nous conduit à penser que le polygone des axes, dans toute son étendue, a sa concavité du côté interne.

75. D'après cela, prenons les points A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′ (fig. 16), pour les sommets des principales surfaces réfringentes de l'œil, les surfaces convexes A′, B′, C′, étant optoïdales dans toute leur étendue, et les dernières D′, E′, F′, G′, optoïdales seulement dans leurs parties rencontrées par le pinceau des rayons émanés du point émergent situé sur l'axe optique. Occupons-nous d'abord de la vision à l'infini, c'est-à-dire du cas de l'œil raccourci, et supposons, afin de ne pas trop nous écarter des idées reçues, que tous les axes aient des directions A′A, B′B, C′C, etc., très-faiblement infléchies les unes sur les autres. Le foyer le plus éloigné, suivant des calculs analogues à ceux des n^os^ 605 et 606 de la *Théorie de l'œil*, sera situé en un certain point A; les foyers suivants B, C, etc., se rapprocheront; le foyer D correspondant à la surface postérieure du cristallin sera le plus rapproché (ce sera une sorte de point de rebroussement) et les autres foyers E, F, G, s'éloigneront de plus en plus, de manière que le dernier G soit sur la rétine.

76. Concevons maintenant qu'une personne placée debout, et considérant un objet à l'horizon, ait ses deux yeux A et B (fig. 21) disposés comme nous venons de le dire : les axes optiques correspondants seront les deux droites AX, BY. Imaginons que cette personne, sans baisser la tête, porte sa vue sur un petit objet pour l'examiner avec beaucoup de soin. Au moyen de ses mains, elle placera cet objet dans le plan médian, en un point R, tel qu'on ait BR = AR = $0^{m}25$, et ce point, pour des yeux conformés comme l'étaient les nôtres il y a vingt ans, sera au-dessous du plan XABY d'une hauteur C′R que nous croyons devoir porter à un décimètre : d'où il résultera que les axes optiques BY, AX, auront décrit les angles YBR, XAR, d'au moins 23 degrés. Ces angles, évalués ainsi au plus bas, sont très-considérables, ce qui montre invinciblement, suivant nous, que l'œil se sera déformé.

77. Considérons, dans le plan YBR, sur lequel la figure 18 est supposée faite, le mouvement subi par l'axe optique, et soient, sur cette même figure, *a′a* la position première de cet axe et A″A

sa position nouvelle. La pupille, toutes choses d'ailleurs égales, quant à la clarté, se sera rétrécie; l'iris, en conséquence, aura opéré dans son plan un resserrement de la sclérotique; les muscles droits interne et inférieur se seront contractés; le droit externe et le droit supérieur se seront relâchés; le nerf optique, sinueux dans l'œil raccourci, aura pris une position moins sinueuse NOP (fig. 18); la partie interne MN de la sclérotique se trouvera pressée contre l'orbite, et il s'ensuit tout naturellement que les parties intérieures de l'œil se seront portées vers l'extérieur. De plus, le cristallin se sera avancé et le globe se sera allongé, ainsi que nous l'avons dit au n° 606 de la *Théorie de l'œil.*

78. Si donc A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, sont les sommets des nouvelles surfaces réfringentes, ils correspondront à un polygone d'une courbure plus forte que celle qu'il a dans la figure 16. Les axes A′A, B′B, C′C, etc., seront donc plus inclinés entre eux que dans cette dernière figure, et si l'on suppose que les surfaces réfringentes antérieures, en se modifiant, se soient maintenues optoïdales, on concevra que la vision, dans l'œil allongé A′MNN′, puisse s'accomplir comme que dans le cas de l'œil raccourci.

79. Imaginons que, l'œil s'étant allongé et infléchi, la courbure du polygone des axes se trouve un tant soit peu trop forte. Qu'en résultera-t-il? C'est que les rayons réfractés, au lieu de donner un foyer rigoureux G, seront, après la dernière réfraction, tangents aux deux nappes d'une surface caustique. Or, dans ce cas, on aura sur le fond de l'œil une image allongée dans un certain sens, et l'on peut admettre que, en conséquence de la conformation de l'organe, la direction de l'allongement soit située dans le plan *a′*A″A*a;* on aura donc en G une petite image *mn.*

Maintenant, examinons l'action des deux muscles obliques. Il est clair que cette action, en appuyant l'œil contre l'orbite, rapprochera la périphérie M′N′ de la périphérie MN et diminuera la courbure du polygone des axes. Et comme cette action ne déforme pas sensiblement l'œil dans le plan A″A, perpendiculaire au plan de la figure, elle ne modifiera les surfaces réfringentes qu'en res-

serrant les génératrices et en les rapprochant les unes des autres, principalement à leurs parties externes, d'où il suit qu'elle devra tendre à raccourcir l'image *mn*. On conçoit par là que les deux muscles obliques, au moyen d'une action exercée dans des limites convenables et combinée avec les autres changements éprouvés par l'œil, pourront réduire à un point l'image placée en G.

80. Pour nous faire une idée claire des choses, nous nous figurons que les six muscles de l'œil, lesquels s'épanouissent sur la périphérie du globe, font l'office de six mains à doigts éventaillés formés par les fibres musculaires. Ces fibres, en appuyant plus ou moins sur telles ou telles parties, modifient la convexité de ces parties, et en même temps la longueur du globe, son fléchissement et la direction de l'axe de la cornée, lequel, d'ailleurs, continue de se porter exactement sur le point qu'on veut observer. Leur action extérieure déforme évidemment les organes intérieurs; ils sont déplacés, et leurs changements sont nécessairement en rapport avec les particularités que présentent le bombement de la cornée, l'allongement de la sclérotique et les dispositions fibreuses de ces membranes. Enfin, à ces moyens de déformation de l'œil, il faut encore ajouter les contractions et les dilatations de l'iris, lesquelles resserrent tous les arcs du cercle qui l'unit à la sclérotique, ou repoussent ce cercle en dehors, ce qui modifie la forme extérieure du globe et en même temps élargit ou rétrécit la papille [1].

81. Les six muscles et les autres causes dont il s'agit sont donc, en quelque sorte, autant d'agents qui nous sont soumis. Si le tableau de la rétine est diffus, notre volonté, avec le secours de ces nombreux agents, produit toutes les modifications de figure qui sont nécessaires pour amener les rayons émanés d'un point rayonnant situé sur l'axe optique à se réunir en un foyer sur la rétine.

L'accomplissement de ces mouvements compliqués doit néces-

[1] Il est bon de remarquer que le nerf optique, qui est plus ou moins tendu quand l'œil se porte en dedans, ne doit pas être absolument sans action sur la figure du globe : il est probable qu'il contribue à son infléchissement.

sairement exiger un certain temps, et c'est ce qu'on reconnaît en effet quand on se sert du microscope et des lunettes; car il ne faut pas seulement mettre ces instruments, ce qu'on appelle au point de l'observateur, pour qu'ils fonctionnent convenablement, il faut encore qu'après les avoir mis à ce point, l'œil se dispose de manière que la vision s'opère bien, ce qui prend toujours quelques secondes. Ceux qui n'ont pas l'habitude d'observer avec des instruments d'optique, et qui ont de très-bons yeux, s'aperçoivent parfaitement, en commençant chaque observation, de la nécessité qu'éprouve l'organe de se monter comme il convient.

82. En résumé, la question principale de ce mémoire était d'examiner, au moyen du calcul, si les surfaces réfringentes de l'œil pouvaient être des optoïdes simples; elle est à présent résolue, et elle l'est négativement. Si l'on se reporte à ce que nous en avons dit dans la *Théorie de l'œil* [719-724], on verra que M. Sturm était guidé par un juste sentiment des choses, quand, il y a quelques années, il repoussait les idées vers lesquelles nous penchions quant à l'optoïde. Nous tenions, dès lors, à traiter la question à fond : c'est une tâche que nous venons de remplir.

83. Nous conclurons, d'ailleurs, de ce mémoire :

Que, dans le vivant, en général, l'œil humain a ses surfaces réfringentes centrées sur des axes différents;

Que, dans l'œil agissant et raccourci, les axes doivent former un polygone un peu convexe en dehors, et que le cristallin doit être plus épais du côté externe que du côté interne;

Que, dans l'œil allongé, le polygone des axes doit avoir une convexité plus grande que dans l'œil raccourci, et que le cristallin doit être aussi plus renflé du côté externe;

Que, dans l'œil dirigé beaucoup en dedans, la courbure du polygone des axes doit avoir une convexité plus prononcée, en même temps que le cristallin doit être plus renflé à l'extérieur;

Que ces dispositions paraissent s'accorder avec les situations et les formes des organes musculaires qui donnent à l'œil ses mouvements, qui l'allongent et le courbent, et qui modifient néces-

sairement sa figure et celle de ses parties intérieures, en raison de la direction du point regardé et de son éloignement;

Enfin, que les surfaces réfringentes, tant pour l'œil raccourci que pour l'œil allongé, pourraient à la rigueur être optoïdales, savoir : les surfaces convexes dans toute leur étendue, et les surfaces non convexes dans l'étendue seulement de la petite calotte enfermée par le pinceau qui peint sur la rétine le point vu sur l'axe optique.

Nota. J'ai supprimé, à la fin de ce mémoire, divers calculs relatifs à des expériences à faire pour tâcher de savoir si la surface antérieure de l'œil, dans la vision d'un point plus ou moins éloigné, ne serait pas quelquefois une optoïde simple. Le motif de cette suppression tient à ce que le mémoire suivant donne, par le moyen d'une optoïde composée, et dans chaque cas de vision, la solution du problème que les optoïdes simples, comme on le voit dans l'exposé présenté du n° 719 au n° 724 de la *Théorie de l'œil*, semblaient devoir résoudre. Cette nouvelle solution, due à une optoïde composée, étant infiniment supérieure à celle des optoïdes simples qui me paraissait nécessaire, les expériences dont je viens de parler n'ont plus, actuellement, la valeur que je leur attribuais, et il m'a semblé superflu d'en parler dans ce mémoire.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

SUR LES FONCTIONS DE LA CORNÉE,

PRINCIPALEMENT CONSIDÉRÉES DANS LES RAPPORTS DE CETTE MEMBRANE AVEC UN THÉORÈME NOUVEAU, DÉDUIT DES LOIS DE LA RÉFRACTION,

ET SUR LES IMAGES RÉFLÉCHIES ET RÉFRACTÉES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPOSITIONS RELATIVES AUX RAYONS BRISÉS PAR LA RÉFLEXION ET PAR LA RÉFRACTION.

84. Depuis la présentation de notre dernier travail à l'Académie des sciences, nous avons démontré plusieurs faits qui jettent beaucoup de clarté sur la vision. Nous allons les établir ici, en commençant par une démonstration générale et géométrique de la loi de Malus pour les rayons réfléchis et réfractés [355 *bis*], démonstration qu'il nous a fallu trouver d'abord pour arriver aux vérités que nous soupçonnions.

85. Proposition I. — *Théorème.* Si un faisceau de rayons lumineux homogènes soumis à la condition d'être normaux à une surface $\Sigma M \Sigma$[1] (fig. 19), sont brisés par une surface réfringente SAS, les rayons réfractés formeront un second faisceau et ils seront normaux à une autre surface $\sigma m \sigma$.

[1] Il est clair que les rayons incidents sont également normaux à toutes les surfaces, en quelque sorte *concentriques* à $\Sigma M \Sigma$, qui coupent, pour chacune, tous les rayons incidents à une même distance de $\Sigma M \Sigma$.

La dénomination de *surfaces concentriques*, employée ici et dans ce qui suit, exprime que partout ces surfaces sont équidistantes dans le sens des normales. (Voy. ci-après, p. 246, la note du numéro 92.)

Soit, dans le plan de la figure, un rayon IMA du premier faisceau, A le point où il rencontre la surface réfringente SAS et M le point où il rencontre la surface ΣMΣ, à laquelle les rayons incidents sont normaux. Imaginons que par le point A on mène la normale AN à la surface SAS, et que le plan de la figure soit celui du rayon incident IMA et de la normale AN, c'est-à-dire qu'il soit le plan dans lequel s'opère la réfraction. Décrivons du point A comme centre, avec AM comme rayon, le cercle MDM′ et abaissons MP perpendiculairement sur AN. Nous pourrons prendre MP pour le sinus d'incidence, et si rq est le sinus correspondant de réfraction, rAR sera le rayon réfracté. Menons par les points A et M les tangentes AV, MV, aux contours SAS, ΣMΣ, de la surface réfringente et de la surface normale aux rayons incidents; ces tangentes se rencontreront en un point V. Par ce point menons la droite Vm perpendiculaire au rayon réfracté rAR, et décrivons le cercle mdm' dont le centre est en A : nous allons prouver que les rayons réfractés, tels que rAR, sont normaux à une certaine surface $\sigma m \sigma$, comme les rayons incidents IMi sont normaux à la surface ΣMΣ.

86. Concevons dans l'espace les sphères dont les centres sont en A et dont AM et Am sont les rayons, puis les cônes droits MVM′, mVm', dont les sommets sont en V et qui touchent les sphères suivant les cercles respectifs MM′, mm'. Il est clair que si le point A se meut sur la surface réfringente SAS et qu'il entraîne avec lui le rayon incident IMAi et le rayon réfracté rAR, les sphères MDM′, mdm', se mouvront en variant de rayons, en même temps que le sommet V des cônes MVM′, mVm', variera, et que si le point A suit une courbe donnée sur SAS, par exemple l'intersection du plan normal MAN et de la surface SAS, les cercles MM′ et mm' seront les caractéristiques de deux surfaces enveloppes que nous appellerons E et e (la fig. ne les indique pas), dont les enveloppées respectives sont les sphères mobiles MDM′, mdm', ou les cônes mobiles MVM′, mVm'.

87. Cela posé, nous remarquerons que chaque enveloppée

sphérique ou conique MDM', MVM', touche, en un point tel que M, la surface ΣMΣ, ce qui donne sur cette surface une ligne de contact, qui est une ligne $MM_1 M_2 M_3$, non indiquée sur la figure, passant par tous les points tels que M. Maintenant, faisons tourner le plan NAV autour de la normale AN; les enveloppes E et *e* varieront, et si on les considère comme des enveloppées, il y aura deux positions consécutives de E qui se couperont ou se toucheront suivant la ligne $MM_1 M_2 M_3$, laquelle sera une caractéristique. De même, deux positions consécutives de *e* donneront une caractéristique analogue $mm_1 m_2 m_3$. Or, la première de ces caractéristiques engendrera évidemment la surface enveloppe ΣMΣ, à laquelle tous les rayons incidents sont normaux, et la seconde donnera une surface $\sigma m \sigma$, de tout point analogue à la surface $\Sigma m \Sigma$, et à laquelle tous les rayons réfractés seront normaux. Donc, etc.

88. Proposition II. — *Corollaire.* Il est clair que l'enveloppée sphérique ou conique MDM', MVM', produit deux nappes ΣMΣ, Σ'M'Σ', dont la première seule ΣMΣ est normale aux rayons incidents; et il est aisé de voir que la seconde Σ'M'Σ' serait normale aux rayons réfléchis, tels que M'A*f*, si la surface SAS était celle d'un miroir courbe: d'où l'on voit que le théorème du n° 85 s'applique au cas de la réflexion comme à celui de la réfraction[1].

89. Proposition III. — *Corollaire.* Il suit de là que les rayons réfléchis ou réfractés par une surface S étant normaux à une surface Σ, sont soumis à la loi des normales de cette surface, loi d'où résultent les deux nappes de chaque surface des centres de courbure. Il faut en conclure :

1° Que les rayons émanés d'un point et réfléchis ou réfractés par une surface forment deux systèmes de surfaces développables dont les arêtes de rebroussement composent deux nappes de caustique touchées l'une et l'autre par tous ces rayons;

[1] Ce corollaire n'est autre chose que la proposition démontrée par M. Ch. Dupin dans ses *Développements de géométrie*, t. II, p. 194; on voit ici que c'est une simple conséquence d'une proposition plus générale. — La démonstration que nous donnons de cette proposition nous a été suggérée par le travail même de M. Dupin.

2° Que les développables d'un système rencontrent normalement celles de l'autre système;

3° Que la surface réfléchissante ou réfringente S est coupée par les développables d'un système suivant une suite de lignes telles que deux points consécutifs de ces lignes donnent des rayons réfléchis ou réfractés qui se rencontrent. Ces lignes, comme nous l'avons dit ailleurs [279], sont ce qu'on nomme les *lignes de réflexion* ou *de réfraction*.

90. Proposition IV. — *Corollaire.* Supposons que les rayons émanent d'un point R et qu'ils soient réfléchis ou réfractés par une surface S_1; ils seront, avant de rencontrer cette surface, normaux à toutes les sphères dont le centre sera en R: donc les rayons réfractés, comme Malus l'a prouvé [1], seront soumis à la loi des normales d'une surface courbe; donc ils seront normaux à une autre surface, et conséquemment à une série d'autres surfaces, concentriques à la première [2].

Si ces rayons réfléchis ou réfractés rencontrent une autre surface réfléchissante ou réfringente S_2, ils seront de nouveau brisés et encore soumis à la loi des normales; ce qui résulte aussi des publications de Malus et de M. Cauchy [3].

Et s'ils sont de nouveau brisés par d'autres surfaces $S_3, S_4, \ldots S_n$, réfléchissantes ou réfringentes, entremêlées comme on le voudra, la loi de Malus se conservera toujours. C'est ce que M. Dupin a démontré, pour le cas de la réfraction, par des considérations relatives aux déblais et aux remblais [4], et, pour le cas de la réflexion, comme on l'a vu plus haut (note du n° 88), par des considérations purement géométriques.

[1] Voyez, dans le VII[e] volume du *Journal de l'École polytechnique*, les pages 1 et 84 des deux beaux mémoires qu'il a publiés.

[2] Ces surfaces ayant les mêmes centres de courbure, nous les appelons des surfaces concentriques. (Voy. ci-dessus, p. 242, la note du n° 85.)

[3] Malus avait démontré que les surfaces développables qui se croisent suivant chaque rayon étaient rectangulaires après la première réfraction; M. Cauchy a étendu à la seconde réfraction la loi démontrée pour la première [355 *bis*].

[4] *Applications de géométrie*, p. 191.

Le théorème du n° 85, dû aux beaux travaux de trois de nos grands géomètres, est donc établi, dans ce qui précède, de la manière la plus élémentaire, la plus complète et la plus générale. Il va nous conduire à deux autres théorèmes très-intéressants pour la vision.

91. Proposition V. — *Lemme.* Une surface réfringente quelconque SAS (fig. 19) est caractérisée par rapport aux surfaces $\Sigma M\Sigma$, $\sigma m\sigma$, auxquelles sont respectivement normaux les rayons incidents et les rayons réfractés, par la propriété que si l'on abaisse d'un point A, pris à volonté sur SAS, des normales AM, A*m*, aux deux surfaces $\Sigma M\Sigma$, $\sigma m\sigma$, ces normales sont entre elles dans le rapport l du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

D'après ce qu'on a vu précédemment, les trois droites VA, VM et V*m*, sont perpendiculaires à AN, AM et A*m;* donc on a $AVM = MAN$, $AVm = mAN$: c'est-à-dire que les angles AVM, AV*m*, sont égaux aux angles d'incidence et de réfraction. Mais AM et A*m* sont les sinus de ces angles dans le cercle dont le rayon est VA : donc, etc.

Il est aisé de voir que cette propriété est caractéristique, car elle peut servir à trouver la surface SAS, étant donné les deux surfaces $\Sigma M\Sigma$, $\sigma m\sigma$, comme on va le démontrer dans la proposition qui suit.

92. Proposition VI. — *Théorème.* Étant donné deux surfaces $\Sigma M\Sigma$, $\Sigma' M'\Sigma'$ (fig. 20), on peut toujours trouver une surface réfringente SGPS', passant par un point P et agissant avec une valeur quelconque l du rapport des sinus d'incidence et de réfraction, telle que les rayons incidents étant normaux à la surface $\Sigma M\Sigma$, les rayons réfractés soient normaux à la surface $\Sigma' M'\Sigma'$ [1].

Abaissons, du point P, les normales PM et PM' sur les surfaces données $\Sigma M\Sigma$, $\Sigma' M'\Sigma'$, et prenons sur PM' une quantité P*m*, telle que le rapport de PM à P*m* soit égal à l; puis, concevons qu'on porte sur chacune des normales de la surface $\Sigma' M'\Sigma'$ une

[1] La figure ne donne ici que des idées très-restreintes ; il faut concevoir dans l'espace les grandeurs indiquées.

même longueur M'm : il est clair que toutes les extrémités m de ces normales donneront une nouvelle surface $\sigma m \sigma$, qui pourra être substituée à la surface donnée $\Sigma' M' \Sigma'$; car les droites normales à l'une seront normales à l'autre.

Cela posé, diminuons toutes les normales de la surface $\sigma m \sigma$ d'une quantité $k = mn$, et diminuons toutes celles de la surface $\Sigma M \Sigma$ d'une quantité $l \times k = MN$; il est clair que les extrémités des nouvelles normales donneront deux nouvelles surfaces Gnh, GNH, qui se couperont suivant une ligne passant par le point G, ligne dont tous les points seront éloignés d'une même quantité k de la surface $\sigma m \sigma$, et d'une même quantité $l \times k$ de la surface $\Sigma M \Sigma$. Si donc on fait varier k, depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, les surfaces Gnh, GNH, varieront, leur ligne d'intersection passant par le point G sera une courbe mobile dans l'espace, et la surface SGPS', engendrée par cette courbe, sera une optoïde composée (4), jouissant de la propriété d'avoir tous ses points éloignés des deux surfaces $\sigma m \sigma$, $\Sigma M \Sigma$, de deux distances dont le rapport sera égal à celui des sinus d'incidence et de réfraction. Donc, la surface ainsi obtenue SGPS' réfractera les rayons incidents, normaux à $\Sigma M \Sigma$, suivant des normales à la surface $\sigma m \sigma$ ou à la surface donnée $\Sigma' M' \Sigma$ [1].

93. Proposition VII. — *Corollaire.* Étant donné dans l'espace deux points R et F, l'un R d'où émanent des rayons homogènes, l'autre F, qui doit servir de foyer, et ces deux points étant séparés par des surfaces réfringentes quelconques S_1, S_2, S_3.... S_n, auxquelles correspondent des valeurs l_1, l_2, l_3.... l_n, du rapport des sinus d'incidence et de réfraction, on peut toujours faire passer une de ces surfaces, S_k par exemple, par un point donné, et trouver pour cette surface une figure telle que les rayons émanés du point R soient, en définitive, réfractés au foyer F.

En effet, les rayons émanés du point R, en sortant de la

[1] Il est aisé de voir que si les courbes $\Sigma M \Sigma$, $\Sigma' M' \Sigma'$, qui représentent les surfaces données, sont des cercles, la courbe SGPS', qui représente l'optoïde composée demandée, sera une optoïde simple (3).

surface S_{k-1}, seront normaux à une suite de surfaces concentriques; parmi les surfaces de cette suite prenons-en une quelconque, telle que $\Sigma M \Sigma$ (fig. 20); imaginons que le point F, qui n'est pas sur la figure, devienne un point rayonnant, et que ses rayons soient réfractés par les surfaces S_n, S_{n-1} .... S_{k+1}, avec des valeurs du rapport des sinus d'incidence et de réfraction égales à $\frac{1}{l_n}, \frac{1}{l_{n-1}} \ldots \frac{1}{l_{k+1}}$; les rayons arriveront à la surface S_k normalement à une autre suite de surfaces concentriques, parmi lesquelles on pourra en prendre une quelconque telle que $\Sigma' M' \Sigma'$ (fig. 20); donc, la question de trouver la surface cherchée sera celle dont la solution vient d'être indiquée. Donc, etc.

CHAPITRE II.

DE LA VISION, CONSIDÉRÉE DANS SES RAPPORTS AVEC LES DEUX DERNIÈRES DES PROPOSITIONS PRÉCÉDENTES, ET CONSIDÉRÉE DANS SA PERFECTION.

94. Il résulte du corollaire qui termine le chapitre premier que si parmi les surfaces réfringentes S_3, $S_4 S_5 \ldots S_n$ du cristallin et du corps vitré, l'une S_k de ces surfaces se modifiait convenablement, un point rayonnant situé sur l'axe optique, et envoyant dans cet organe des rayons homogènes, aurait toujours un point unique pour image sur la rétine. Mais il faudrait pour cela que la surface S_k subît, par rapport aux autres, de certaines déformations, et c'est ce qu'il est difficile d'admettre.

95. Par le même corollaire, on voit que si, au lieu d'attribuer ces déformations à l'une des surfaces du cristallin ou du corps vitré, on les attribue à la surface extérieure de l'œil, la condition d'un foyer unique sera satisfaite. Or, ici l'anatomie vient puissamment à notre secours pour montrer que la cornée remplit réellement le rôle que nous venons d'indiquer. En effet, cette membrane, en ce qui concerne la forme qu'elle se trouve dans la nécessité de prendre, est soumise à un grand nombre de forces, savoir :

Premièrement, les actions des fibres des quatre muscles droits, fibres qui sont distribuées au pourtour de la cornée et qui agissent dans les plans tangents au globe. Et nous ferons remarquer, en passant, que ces actions sont jusqu'à un certain point indépendantes de l'action générale de chaque muscle pour tourner le globe dans une direction donnée ou pour l'allonger.

Secondement, les actions des cordons rayonnants de l'iris, lesquelles actions sont aussi distribuées au pourtour de la cornée, mais comprises, comme forces, dans le plan de l'iris.

Troisièmement, les actions des cordons circulaires iriens.

Quatrièmement, les actions des fibres des muscles obliques, lesquelles, comme dans le cas des muscles droits, sont jusqu'à un certain point indépendantes de l'action générale des obliques.

Cinquièmement, les résistances qu'opposent aux déformations les différentes parties de la cornée et de la sclérotique, d'après les épaisseurs diverses que présentent ces membranes dans leur périphérie.

Sixièmement, les résistances de même sorte produites par la conjonctive, qui adhère à la cornée, et dont la rigidité, en dehors du segment qui leur est commun, ne peut être sans influence sur les variations de forme du devant de l'œil.

Septièmement, les actions de l'enveloppe appelée *fascia*, laquelle, à partir du plan de l'iris, enferme la partie postérieure du globe, est traversée par tous les muscles, leur est soudée, et produit entre eux et le pourtour de la cornée une certaine solidarité de mouvements.

Huitièmement, l'afflux plus ou moins grand du sang dans l'œil[1], ce qui, en augmentant ou diminuant la pression intérieure, tend à rapprocher ou à éloigner le globe de la forme sphérique, et fournit en chaque point de sa surface une action nouvelle, qui change les rapports de toutes les autres actions, et qu'on sent en soi pendant la durée des observations que l'on fait avec soin (81).

[1] C'est cette cause probablement qui donne aux yeux les différents degrés de brillant qu'ils peuvent présenter chez un même individu.

96. Ces causes, exercées sur un globe élastique peu consistant, sont certainement fort agissantes. On les connaissait toutes; mais, pour les rapprocher et pour faire apprécier leur commun concours à la question de donner à la cornée des figures qui, à chaque instant, convinssent à sa fonction, il était nécessaire, sans doute, de connaître le théorème du n° 92.

Ce théorème important nous montre, en cela et de nouveau, combien la géométrie peut porter de lumière sur la physiologie de l'œil. Au surplus, les causes que nous venons d'énumérer ne sont pas, comme on le verra plus loin (104), les seules qui concourent à la modification des formes de la cornée.

97. Si ces causes, pourra-t-on nous dire, ont un résultat si puissant, ne devrait-on pas en conclure que la figure qu'elles donnent à la cornée, dans les différents cas de vision, suffit à l'explication de tous les phénomènes? Non. En effet, si l'on suppose le corps vitré homogène, l'irisation des images subsiste, à moins qu'on n'admette avec d'Alembert que les couleurs gênantes ne se neutralisent [234], hypothèse qui ne soutient quelque examen que dans le cas de la vision du blanc, et qui a contre elle, dans tous les cas, l'affaiblissement d'intensité de l'image : or, c'est un vice grave; car, l'œil étant pourvu d'un appareil *concentrateur* [687], il n'est pas raisonnable de supposer que la vision nécessite une déconcentration.

98. D'un autre côté, on remarquera que si le corps vitré était homogène, les déformations de la cornée, comme on l'a vu n° 423 de la *Théorie de l'œil,* ne pourraient pas donner des différences de rayon de courbure suffisamment grandes, en sorte qu'il faudrait toujours un fort allongement de l'œil pour bien juger des objets rapprochés, ce qui, en éloignant le globe de sa forme presque sphérique, gênerait et même empêcherait ses mouvements dans l'orbite, lesquels ont besoin d'être libres et faciles, parce qu'ils ont une amplitude considérable.

D'ailleurs, beaucoup d'autres faits établissent la non-homogénéité du corps vitré [800-803].

99. Tout cela fait voir que le mécanisme de l'œil est très-compliqué : et il ne faut pas en être surpris, car la création, comme ses œuvres le prouvent, abonde en moyens qu'elle a su parfaitement grouper, et il est tout naturel qu'elle les ait accumulés dans la disposition de la vue, afin de donner à cet organe toute la perfection possible. Ainsi, elle savait, ce que nous seul savons encore en écrivant ces lignes, qu'une surface convenablement déterminée, entre plusieurs qui brisent les rayons, suffit pour les amener à un foyer unique (93). Comment n'aurait-elle pas appliqué à l'œil une propriété[1] qui convient si éminemment à sa perfection?

100. D'après ce qui précède, et d'après ce que nous avons exposé dans les mémoires précédents, admettons:

1° Que le corps vitré soit composé de couches, afin que l'aberration de réfrangibilité n'ait aucun effet d'irisation sensiblement nuisible à la vision [688];

2° Que, par cette même composition du corps vitré, l'œil n'ait pas besoin d'allongements considérables, qui, en passant de la perception d'un objet éloigné à celle d'un objet rapproché, lui donneraient une forme susceptible d'empêcher ses mouvements dans l'orbite, ou, tout au moins, de les gêner;

3° Que les surfaces réfringentes du globe soient centrées sur des axes différents.

4° Que, le globe étant élastique et peu consistant, il s'infléchisse sous l'effort des muscles quand l'axe optique se dirige à gauche, à droite, en haut ou en bas, et que la convexité du polygone des axes soit en conséquence modifiée, quelquefois même portée dans un plan nouveau, mais tout cela entre des limites extrêmement resserrées;

5° Que, par les mêmes changements de direction de l'axe optique, le cristallin, organe qui présente aussi beaucoup de mollesse, notamment dans l'homme, serré d'un côté et se portant vers le côté opposé, s'aplatisse du côté interne et se renfle du

[1] On verra dans un des mémoires suivants que cette propriété concilie, jusqu'à un certain point, les idées de M. Sturm et les nôtres.

côté externe, de façon à recevoir la forme observée chez le bœuf, le cheval, etc. (62 et 63), forme qui doit se retrouver, comme résultat d'une loi générale, tout au moins dans certains cas de vision où il est nécessaire que cette loi ait des effets très-sensibles;

Il y aura mathématiquement trois moyens d'expliquer une vision excellente dans le sens de l'axe optique.

101. En premier lieu, toutes les surfaces réfringentes, les unes convexes, les autres concaves, les premières dans toute leur étendue, les dernières pour une petite partie seulement, seraient des optoïdes simples, à quelque distance que fût le point rayonnant (83).

En second lieu, il n'y aurait d'optoïdes simples, avec les restrictions qui viennent d'être indiquées, que les surfaces réfringentes correspondantes à une seule distance du point rayonnant, l'infini par exemple, et pour les autres éloignements de ce point, la forme d'optoïde serait plus ou moins altérée; mais la cornée, avec sa puissance corrective, suppléerait au défaut d'optoïdalité rigoureuse.

En troisième lieu, les surfaces réfringentes, dans aucun cas, ne seraient des optoïdes simples, et toujours la figure d'optoïde composée prise par la cornée préviendrait, comme *puissance corrective*, l'aberration de courbure, de manière que l'image eût toute l'intensité correspondante à la réunion de la totalité des rayons admis par la pupille.

102. Ces trois solutions, en ce qui concerne la vision ordinaire (celle d'un point qui envoie sa lumière directement dans l'œil au travers d'une masse d'air), sont des solutions équivalentes; mais au point de vue général de l'œil, considéré dans toutes ses fonctions et dans ses états divers de maladie ou d'infirmité, la première nous semble se recommander ici comme la meilleure.

103. En effet, pour la vision ordinaire, cette première solution laisse en réserve la puissance corrective de la cornée, de sorte que cette puissance tout entière reste libre pour s'employer à des cas accidentels de vision. Ainsi, l'œil pouvant avoir quelqu'une de

ses parties disproportionnée à l'ensemble, soit en volume, en force, en densité, ou bien cette partie pouvant être atteinte d'une lésion permanente ou d'une affection passagère, ou bien l'objet pouvant être vu au travers d'une loupe, d'une lunette, d'un microscope, d'un télescope, ou bien, enfin, par le moyen de rayons réfléchis ou réfractés, et la cornée, par la puissance de ses déformations, notamment dans le cas très-remarquable des images réfléchies et réfractées, lequel cas sera examiné chapitre III, la cornée, disons-nous, remédiera aux défauts que, sans cette puissance, et dans ces divers cas, présenterait la vision.

Les deux dernières solutions, au contraire, ne laissant pas disponible une aussi grande puissance corrective de la cornée, l'œil dans ses déformations, et dans les cas exceptionnels que nous venons de mentionner, fait plus promptement défaut au besoin d'une vision excellente, même dans des cas de légère maladie, de légère infirmité, etc.

104. Maintenant on remarquera, d'après ce que nous avons admis au n° 100 que les causes qui influent sur les formes que prend la cornée sont plus nombreuses que nous ne l'avons supposé au n° 95, et qu'il faut ajouter à ces causes:

Premièrement, le plus ou moins de convexité du polygone des axes, car cette convexité varie suivant le degré de pression exercée par les deux obliques sur le globe, et les seules conditions auxquelles ce polygone soit assujetti, c'est que l'axe optique dirigé sur le point vu, soit un de ses côtés, et que ses autres côtés aient les directions les plus convenables pour la vision;

Secondement, les formes des surfaces du cristallin, qui, plus ou moins pressé en dedans par ces mêmes muscles obliques, varie nécessairement de figure;

Troisièmement, les formes des surfaces réfringentes du corps vitré, formes qui, dans les mêmes circonstances, varient aussi;

Quatrièmement, l'organisme de la cornée par lames [29] dont les fibres ont de certaines dispositions:

Ce qui fait, avec les causes énumérées au n° 95, douze groupes

de forces diverses agissant à chaque instant sur la forme de la membrane extérieure de l'œil, lesquelles forces, par une sorte d'équilibre variable entre elles, déterminent continuellement cette forme.

105. Passons à des objections qui peut-être nous seront faites, et imaginons que l'on nous dise : « Tout cela est admissible en thèse générale; mais il faut prouver qu'on n'arriverait pas, pour le devant de la cornée, à une surface tout autre que celle dont l'inspection nous donne l'idée, par exemple, à une surface presque tangente à l'axe optique, ou qui serait beaucoup en avant du globe oculaire, ou qui aurait des inflexions que l'œil ne présente pas. » La réponse est facile.

En premier lieu, on sait par le théorème du n° 92 que la surface cherchée peut être menée par un point pris à volonté : donc on peut la faire passer par un point de la cornée tel que le sommet de cette membrane; ce qui déjà montre qu'il n'y a dans la distance nécessaire absolument rien qui puisse répugner.

106. On remarquera, en second lieu, que si les axes étaient donnés avec les sommets des surfaces, avec leurs écartements, avec les valeurs de l_1, l_2, l_3, etc., on pourrait calculer les surfaces optoïdales qui satisferaient mathématiquement à la question, et que, d'après le chapitre I du mémoire précédent, la surface antérieure de la cornée serait engendrée par une optoïde tout à fait admissible. Or, si ce ne sont pas exactement des optoïdes simples qui existent dans le globe par l'effet des forces en équilibre qui le sollicitent, ce sont du moins des surfaces resserrées ou évasées dans les sens convenables, et l'on peut en conclure que la cornée, qui n'a besoin de subvenir que pour faire en quelque sorte l'*appoint* de conditions déjà presque remplies, différera très-peu, dans sa surface extérieure, d'une optoïde simple qui s'accorderait parfaitement avec le sentiment que nous avons de l'œil.

107. Et comme la cornée présente deux surfaces, les changements de l'une entraînent nécessairement des changements de l'autre; d'où il suit que, si la densité de cette membrane diffère de celle de l'humeur aqueuse, l'appoint dont nous venons de par-

ler se fera au moyen de deux surfaces, liées entre elles par des épaisseurs et des degrés de rigidité variables et en rapport avec les besoins de l'œil, au lieu de se faire par le moyen d'une seule surface. Or, il est présumable que la solution, avec deux surfaces, convenablement dépendantes l'une de l'autre, a l'avantage d'être plus facile encore que si une seulement de ces deux surfaces était disponible.

108. On voit donc que, dans ces doctrines, tout s'enchaîne étonnamment bien; et il nous semble qu'elles jettent une lumière utile sur la destination des muscles obliques. Cette destination était considérée comme fort obscure, et on était loin de penser que leur objet principal dût être celui d'agir comme de larges mains à doigts éventaillés (80), pressant l'œil contre la partie interne de l'orbite, et graduant les pressions sur chaque point, de façon que le polygone des axes devienne tel que les deux surfaces de la cornée amènent l'image de la rétine à ne présenter aucune diffusion sensible.

109. Aurions-nous quelques faits propres à justifier ces théories? Il est clair que, dans une matière si nouvelle, la physiologie ne doit pas nous en fournir beaucoup; nous en présenterons toutefois d'assez nombreux dans la suite, et nous allons, dès à présent, en indiquer plusieurs, dont trois, qui nous occuperont les derniers, sont relatifs à des affections que nous avons éprouvées.

110. On sait que, si l'on se presse l'œil avec le bout du doigt, la vision ne passe d'un objet à un autre, quand la pression a acquis un certain degré, qu'avec beaucoup de difficulté. Or, si le globe, et notamment la cornée, doivent être ajustés d'une certaine manière pour donner à l'objet vu toute la netteté possible, la pression du doigt, dès qu'elle se fait sentir, oblige la cornée de modifier un peu plus fortement sa figure, ce qui, tant que la modification nécessaire n'excède pas certaines limites, s'opère sans gêner la vision. Mais si la pression continue d'augmenter, les forces qui produisent les déformations de la cornée deviennent insuffisantes, et les efforts qu'on fait, instinctivement, nous causent

de la souffrance, comme si la sclérotique, exposée en quelque sorte à des déchirements, se refusait aux mouvements que la cornée tend à lui imposer pour s'accommoder elle-même aux besoins de la vision.

111. Voici le second fait. Il y a six ou sept ans, nous avons eu sur le blanc de l'œil droit, tout auprès de l'iris, un petit abcès qu'il a fallu brûler par de nombreux attouchements de pierre infernale, ce qui nous a laissé contre et en dehors de la cornée, sur la conjonctive, dans l'angle externe du globe, une petite excroissance de deux à trois millimètres de longueur horizontale et d'environ deux de hauteur. Cette excroissance altérait un peu la figure de l'iris; et nos deux yeux, qui jusque-là ne nous avaient donné que des sensations pareilles, eurent des actions différentes, le droit donnant au contour des objets une diffusion très-notable. Cependant, cette diffusion nous permettait parfaitement de lire avec cet œil; elle n'était pas sensible quand les deux yeux agissaient, et elle nous aurait permis de croire que notre œil droit était excellent, si le gauche n'avait pas été d'une bonté supérieure. Or, il nous semble qu'il faut attribuer le défaut dont il s'agit à ce que la conjonctive et la cornée, auprès de la sclérotique, ayant perdu leur souplesse, les proportions des forces qui sollicitent cette dernière membrane avaient changé, ce qui lui ôtait la possibilité de prendre les formes que nécessitait une vision normale.

112. La saillie de l'excroissance dont il s'agit a diminué peu à peu. Elle est même devenue presque insensible; mais nous avons eu, en 1844 et 1845, de longues et fortes inflammations au même œil, et, depuis leur guérison, la cornée a toujours présenté à son bord extérieur un cordon opaque et blanchâtre dont l'intensité de couleur diminue en approchant du centre et qui commence à disparaître, qui même a disparu dans les parties qui, s'étant épaissies les dernières, étaient apparemment moins compromises. Cependant, la vision de notre œil droit est encore défectueuse; nous voyons les objets comme au travers d'une gaze et avec un certain sentiment de gêne. A la chasse, par exemple, nous jugions parfaite-

ment de la remise des perdrix aux plus grandes distances, et quoique, maintenant encore, peu de personnes en jugent mieux que nous, il est certain que notre vue, dans ce cas, a beaucoup perdu. N'est-il pas présumable, d'après cela, qu'après la disparition de l'excroissance, la cornée a contracté du côté externe une certaine roideur, ce qui produit un effet analogue à celui que produisait l'excroissance, de sorte que cette membrane, en ce qui concerne ses changements de forme, ne peut pas recouvrer les moyens de remplir normalement ses fonctions?

113. Le quatrième fait se rattache au précédent. Il consiste en ce que nos besicles, à verres convexes du n° 15, nous causent une fatigue qui bientôt nous interdirait le travail, si nous ne nous appliquions pas avec un soin extrême à maintenir l'accomplissement des conditions suivantes : 1° que les centres des verres aient un écartement bien convenable; 2° que les branches soient courbées outre mesure, si l'on peut parler ainsi, afin que les axes optiques tombent normalement sur les verres; 3° que l'objet considéré ne soit jamais sensiblement éloigné de la juste portée de ces mêmes verres. Or, il est clair, premièrement, que si ces conditions sont enfreintes, c'est la cornée qui doit, par des déformations plus fortes, pourvoir à l'*appoint* (106) qu'une bonne vision exige; et, secondement, que ces déformations deviennent tout naturellement fatigantes, et même douloureuses, quand elles excèdent un certain maximum. Ainsi, le défaut de souplesse de notre cornée explique le quatrième fait.

114. On doit présumer, d'après ces faits, que toutes les lésions des organes musculaires et autres qui environnent la cornée, et celles de la cornée elle-même, produisent des désordres analogues à ceux que nous venons de citer.

CHAPITRE III.

COMPLÉMENT DE LA THÉORIE DES IMAGES RÉFLÉCHIES ET RÉFRACTÉES.

115. La question des images réfléchies et réfractées, ainsi que nous l'avons dit au n° 292 de la *Théorie de l'œil,* est *une bonne fortune pour la science,* en ce que, la vision de ces images étant produite par des faisceaux de rayons tout à fait en dehors de la loi des rayons émis par un point ordinaire, elle permet d'interroger l'œil sur des circonstances exceptionnelles propres à dévoiler son mécanisme. Nous ne savions pas, lorsque nous nous occupions des objets vus par réflexion et par réfraction, il y a plus de trente ans, que nos recherches s'appliqueraient aussi positivement qu'on va le voir à la justification des idées émises dans le chapitre précédent; mais, comme on le voit, nous étions persuadé que les images en question devaient être, en quelque sorte, une pierre de touche pour apprécier la bonté des systèmes relatifs à l'organe de la vue. Aussi, avons-nous consacré un livre tout entier, le livre IV de la *Théorie de l'œil,* à l'examen de ces images.

Ce livre, toutefois, laissait à résoudre une difficulté très-grande que nous n'avions pas expliquée, à beaucoup près, d'une manière satisfaisante [340]. Les faits géométriques déjà établis dans ce mémoire vont, ce nous semble, la lever complétement.

116. Prenons les choses où elles en sont à la fin du livre IV, et occupons-nous tout de suite des objets submergés dans l'eau et vus par réfraction, dans le cas où le globe oculaire et l'objet sont rapprochés.

Nous avons établi [337] qu'un point quelconque de l'objet envoie dans l'œil des rayons qui, à cause de la réfraction, arrivent sur la cornée PRQ (fig. 23) comme s'ils émanaient d'une petite droite verticale *mn* [330] située dans l'air, chacun des points *v* de cette droite envoyant une lame développable *rvt* de rayons. On sait d'ailleurs que l'étendue angulaire de cette lame est à peu

près à son maximum pour le point v, correspondant à l'axe optique; qu'elle diminue en approchant des points extrêmes m et n, et qu'elle se réduit, pour le premier de ces points, à un seul rayon, de couleur rouge, et pour le second, aussi à un seul rayon, d'une couleur violette.

Nous donnerons à cette petite droite mn le nom d'*aigrette*.

117. Cela posé, concevons qu'un spectateur placé, par exemple, dans une baignoire, considère un bouquet submergé, son œil étant aussi près que possible de l'eau, l'axe optique étant incliné de 35 degrés avec l'horizontale, le bouquet se trouvant éloigné de 25 centimètres, et faisons cette hypothèse, dont il va falloir constater l'exactitude, que l'œil soit exactement monté comme s'il s'agissait de la vision du même objet placé dans l'air.

Il est démontré que pour l'objet submergé la rétine, au lieu de recevoir l'image du bouquet, recevrait une autre image, dans laquelle, au lieu de chaque point, se trouverait l'image d'une aigrette. De plus, il est aisé de voir par le calcul [317] que si l'on suppose l'ouverture de la pupille seulement de 3 millimètres, les aigrettes, dans le cas que nous examinons, auront chacune une longueur de $2^{mm}00$, environ. D'où il suit que le bouquet en question, placé dans l'eau, et peint au moyen d'aigrettes parallèles de cette longueur, serait bien loin d'être vu nettement.

118. Or, l'expérience dément ce résultat : donc l'œil ne reste pas monté comme il le serait pour la vision d'un objet ordinaire. Et il faut bien remarquer que ceci est indépendant de toute théorie : car il est rigoureusement établi par la géométrie, qu'on verrait des aigrettes si l'œil était monté comme il l'est dans le cas d'un objet situé dans l'air, et il est prouvé, par l'expérience, qu'on voit l'objet nettement, et que, par conséquent, l'œil prend une forme qui annule les images des aigrettes, ou, autrement dit, qui opère de telle sorte que chaque aigrette mn soit contractée en un point unique v situé sur l'axe optique.

119. D'après ce qu'on a vu dans le chapitre qui précède, cette conclusion, au premier abord si surprenante, n'a rien que de na-

turel, puisqu'il suffit à la réalisation du fait en question que la cornée, dans sa partie MN (fig. 23), prenne une figure convenable et susceptible d'être construite géométriquement (93), qui renvoie les rayons dans les mêmes directions que si l'objet était dans l'air. Mais suivons notre sujet, afin de bien voir comment se résolvent toutes les difficultés secondaires qu'il soulève.

120. Nous nous demanderons, en premier lieu, quel est le changement de forme qui doit s'opérer dans l'œil. La réponse est aisée. Supposons le spectateur debout, et ne considérons que le point correspondant à l'axe optique : il sera peint sur la rétine, avant le changement de forme, suivant une petite droite verticale. Concevons que le polygone des axes des surfaces réfringentes augmente ou diminue de convexité dans le plan vertical, c'est alors dans ce plan que s'opéreront les plus grands changements de réfraction, et dans le sens horizontal elles demeureront à peu près ce qu'elles étaient. Donc la petite image linéaire et verticale restera linéaire, et sera plus courte ou plus longue selon que le polygone des axes se courbera plus ou moins. Par là on comprend que, s'il s'infléchit convenablement, l'image, au lieu d'être une droite, ne sera plus qu'un point.

121. Mais comment, pourra-t-on dire, l'œil de l'observateur est-il amené à faire cette manœuvre, qui, toute simple à concevoir qu'elle est, est cependant fort compliquée? Par l'emploi, répondrons-nous, de la faculté qu'il exerce continuellement : c'est celle de se monter comme il faut qu'il soit monté pour discerner bien les objets. Or, on les verrait confusément si les aigrettes ne disparaissaient pas; d'un autre côté, l'œil, en se portant sur l'objet et en se montant selon l'éloignement, change les proportions de ces aigrettes : il est donc averti, par les variations de leur grandeur, qu'elles ne sont autre chose qu'un phénomène accessoire, comme la confusion elle-même, quand elle provient de ce que l'œil n'est pas adapté aux circonstances. De plus, par la sensation perçue de leur amoindrissement, on a le sentiment des mouvements nécessaires pour qu'elles s'anéantissent. Donc, la cornée, sans sortir de

ses habitudes et de son jeu continuel, prend la forme qui convient pour rendre nette l'image de l'objet.

122. Il est fâcheux, sans doute, qu'il y ait autant de considérations de haute géométrie mêlées à tout ceci; mais, pour le mathématicien, rien de plus décisif peut-il se présenter? Il sait que pour le point rayonnant S (fig. 22), placé dans une masse d'eau terminée au plan PQ, l'œil OO′ reçoit les rayons qui lui arrivent comme s'ils émanaient par lames coniques de la petite droite verticale *rr′;* il sait qu'en vertu de cette loi, une horizontale MN serait vue comme un ruban *mn;* qu'une ligne inclinée TU serait vue comme un ruban en pointe *v*T*v′*, et qu'une ligne verticale serait vue sous sa véritable apparence, si l'œil conservait la figure qu'il a dans le cas de la vision dans l'air; il sait, par le fait[1], que nous voyons toutes ces lignes sous la même apparence, quelle que soit leur inclinaison; il sait que, pour produire ce résultat, il suffit, après que l'œil s'est monté pour la distance, qu'il s'opère un infléchissement de ses axes réduisant à une déformation faible, et partant possible, le changement que doit éprouver la cornée : il conçoit donc que la difficulté de vision qui semblait invincible puisse disparaître entièrement.

123. Et si le physiologiste vient au secours du géomètre; s'il fait voir que l'œil n'est pas un corps solide, mais un globe élastique d'une faible consistance, lequel se déforme sous une petite pression des doigts, et par conséquent sous la pression des muscles qui le sollicitent; s'il fait voir que le cristallin est suspendu de telle manière qu'il doit se déplacer quand l'œil s'allonge ou se raccourcit; s'il fait voir que les axes de la cornée et des deux faces du cristallin sont trois axes différents dans certains animaux (63 et 64); que, en conséquence, le cristallin, qui s'aplatit en dedans et s'étend en dehors, en même temps qu'il se porte de côté, sont des cas particuliers d'une loi générale, d'après laquelle varient les sur-

[1] Ce fait se constate avec la plus grande facilité, puisqu'il suffit, en prenant un bain, d'approcher les yeux de l'eau et d'examiner un papier submergé sur lequel soient tracées des lignes diversement inclinées.

faces réfringentes et leurs axes, le physiologiste et le géomètre reconnaîtront de concert que le but et les moyens se concilient parfaitement dans l'organisation de l'œil, pour amener la vision des objets submergés, vus de près, à s'opérer d'une manière aussi satisfaisante que celle des objets placés dans l'air, sauf les altérations d'intensité et de couleur qui résultent du trajet de la lumière dans le milieu réfringent.

124. On nous dira, sans doute, que nous avons expliqué les choses tout autrement au n° 340 de la *Théorie de l'œil*. Cela est vrai; mais nous n'avons pas dissimulé que l'explication que nous donnions était difficile à admettre [341]; nous avons dit qu'elle ne semblait pas toutefois devoir être absolument repoussée, et que, bien qu'elle laissât beaucoup à désirer, elle présentait tout au moins l'avantage d'un exposé dans lequel se voyaient tous les éléments géométriques de la question. Il peut nous être permis de dire, d'après cela, que nous ne présentions au n° 340 qu'un essai d'explication.

125. Après avoir traité avec détail le cas des objets submergés, il serait superflu de nous occuper des autres cas de réfraction ou de réflexion. Il est évident, pour les personnes qui liront le livre IV de la *Théorie de l'œil*, que ce livre et ce qui précède donnent l'explication complète, cherchée par Newton, d'Alembert et d'autres géomètres [290], de la vision des images réfléchies et réfractées, lorsqu'une des deux caustiques de réflexion ou de réfraction est linéaire.

Il ne reste donc à traiter que le cas où les caustiques sont l'une et l'autre non linéaires.

126. La vision s'explique encore dans ce cas, puisque les rayons qui correspondent à un point rayonnant, et qui ont été réfléchis ou réfractés, étant soumis à la loi des normales, il suffit que la cornée prenne une forme convenable pour que les rayons reçus dans l'œil concourent en un point sur la rétine.

127. Mais y aura-t-il toujours un point vu? Non, sans doute, car si les caustiques étaient placées, par exemple, en avant de l'œil, les rayons arriveraient en convergeant sur la cornée, ce qui

ne donnerait que la sensation d'une lumière vague et ne pourrait donner celle d'un point.

128. Les caustiques se trouvant en arrière de la cornée, y aura-t-il toujours un point vu? C'est une question intéressante, mais dont l'examen serait long. Nous nous bornerons à dire qu'il n'y aura probablement de point vu que dans le cas où l'une des deux caustiques serait touchée par les rayons dans un espace suffisamment resserré pour que la cornée pût parvenir à réunir tous ces rayons en un même point du fond de l'œil.

129. Sur laquelle des deux caustiques sera situé le point vu, s'il y a un point vu? Évidemment ce devra être sur celle qui sera touchée dans l'espace le plus restreint par les rayons admis dans la pupille.

130. Il est clair que, pour traiter à fond ces questions, il faudrait examiner quelques exemples au moyen de la géométrie et vérifier les faits par l'expérience, ce qui exigerait des surfaces réfléchissantes et réfringentes de définition rigoureuse, donnant par elles-mêmes, ou par leur combinaison deux à deux, des caustiques non linéaires. Nous n'avons pas fait ce travail, qui pourrait conduire à des résultats curieux, mais qui serait maintenant d'un ordre très-secondaire, en ce qui concerne la théorie de l'œil.

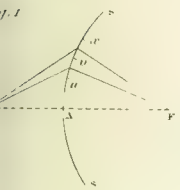
131. Avant de quitter cette matière, revenons encore à la vision des objets placés dans l'eau, et nous remarquerons que la puissance des infléchissements du polygone des axes est telle qu'une ligne droite de 2 millimètres de longueur (117), sur laquelle se croisent les rayons réfractés qui donnent la sensation d'un point submergé, a une action qui se réduit, par les déformations que causent ces infléchissements, à celle d'un point concentrant en lui tous les rayons qui touchent cette droite. On voit que c'est une puissance bien grande, et toutefois on ne peut guère la nier; car, nous l'avons, ou du moins nous croyons l'avoir très-positivement établie.

132. Les déformations de l'œil, bien qu'elles soient faibles, sont donc, non-seulement très-réelles, comme nous l'avons souvent dit, notamment au n° 81, mais encore très-énergiques.

133. Il était déjà bien clair que l'action de l'œil n'étant pas la même à droite et à gauche, en dessus et en dessous, il ne devait pas être régulier par rapport à l'axe optique; mais il devient évident que, pour lui donner la puissance que présentent ses déformations, il fallait que les surfaces réfringentes eussent des axes différents, afin que le changement du polygone des axes eût de grands résultats, sans que la forme du globe et la figure de la cornée se modifiassent trop sensiblement.

134. Autre remarque. Dans la vision des objets submergés, les rayons qui partent d'un point rayonnant et qui arrivent sur la cornée n'étant pas normaux à une sphère dont ce point soit le centre, une au moins des surfaces réfringentes de l'œil ne peut être de l'espèce de celles qui s'obtiennent par la révolution d'une optoïde du 4^{e} degré sur son axe. Faut-il conclure de là que l'optoïde simple ne sert pas de type dans l'organisation de l'œil? Ce qui est certain, c'est que ce type n'est nullement essentiel. On doit même reconnaître, contrairement aux vues énoncées du n° 719 au n° 724 de la *Théorie de l'œil*, que la solution par l'optoïde composée, avec des surfaces réfringentes d'ailleurs indéterminées, est ce qu'on peut obtenir de plus satisfaisant; car, cette solution laisse toute liberté de choisir ces surfaces de façon que la vision dans des directions inclinées sur l'axe optique soit la meilleure possible. C'est un objet important, sur lequel nous reviendrons.

135. Il pourrait arriver toutefois que l'œil ne présentât jamais de surfaces réfringentes en forme d'optoïdes simples, et que la considération de ces optoïdes fût pourtant d'une grande utilité quand on s'occupe de la vision, comme les sections coniques sont la base des théories et des calculs astronomiques, bien qu'aucun astre ne décrive une section conique. Nous nous sommes déjà servi ainsi de la considération de l'optoïde (106), et il est possible que d'autres géomètres l'emploient, plus tard, comme nous l'avons employée et comme nous l'emploierons encore, pour asseoir les idées que nous aurons à comparer.



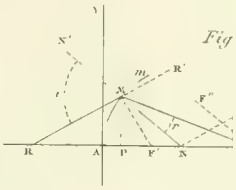


Fig. 7.

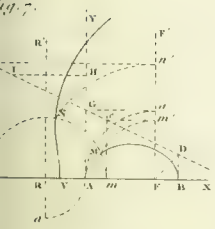
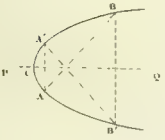
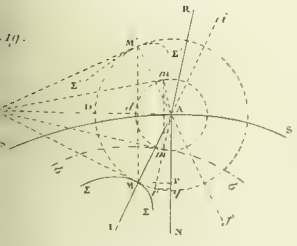


Fig. 8.

Fig. 13.

Fig. 14.





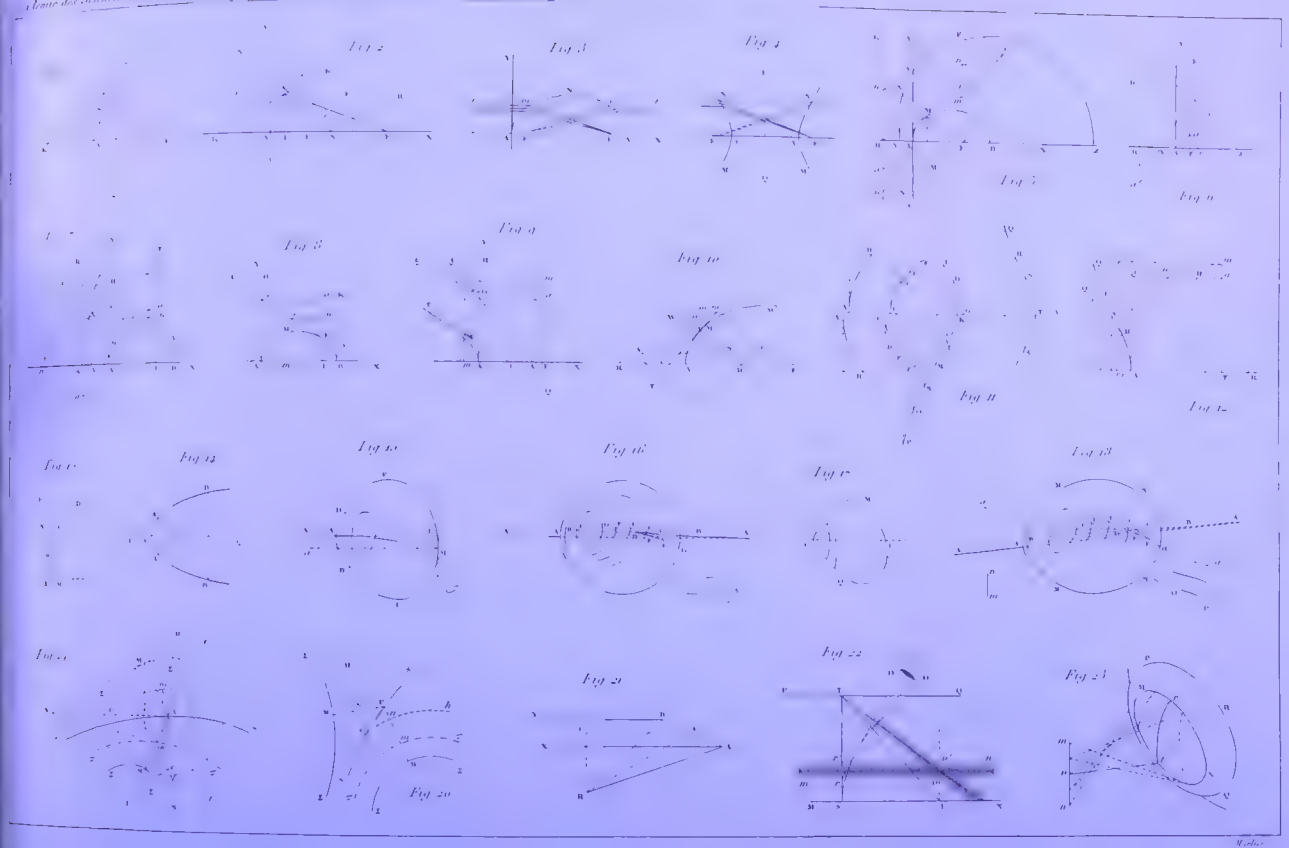


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23

MÉMOIRE

SUR LES EAUX DE PLUIE

RECUEILLIES A L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

PAR M. BARRAL.

§ I.

HISTORIQUE DES RECHERCHES FAITES JUSQU'À CE JOUR SUR LES EAUX DE PLUIE.

Plusieurs savants se sont occupés de recherches sur les eaux de pluie.

Dans sa dissertation sur l'analyse des eaux, Bergman pose dans des termes que l'on peut encore accepter de nos jours le problème que de pareilles recherches devraient, selon nous, avoir pour but de résoudre. « Il ne faut pas s'étonner, dit-il[1], si l'eau qui coule à la surface de la terre n'est jamais absolument pure : la pluie et la neige elles-mêmes, quoique produites naturellement par les plus subtiles vapeurs et comme distillées d'une manière bien plus parfaite que dans nos laboratoires, avec quelque soin qu'on les recueille, *se trouvent encore altérées différemment suivant les saisons, suivant les climats et autres semblables accidents.* »

Personne ne révoquera en doute la vérité de ce principe; mais

[1] *Opuscules chimiques et physiques* de M. T. Bergman, traduits par M. de Morveau, t. III, p. 89; Dijon, 1780, in-4°.

il n'est pas plus possible aujourd'hui que du temps de Bergman de dire comment les climats, les saisons ou telles autres circonstances indéterminées influent sur la nature et la composition des matières dissoutes dans l'eau de pluie.

Relativement aux substances que contiennent les eaux météoriques, le célèbre chimiste suédois s'exprime ainsi[1] :

« *La neige* recèle une très-petite partie de *sel marin calcaire* et donne quelques faibles indices d'*acide nitreux;* lorsqu'elle est récemment fondue, elle est absolument privée d'air et d'acide aérien, qui existent plus ou moins abondamment dans toutes les eaux; ne serait-ce pas ce qui la rend nuisible aux animaux?

« *L'eau de pluie* est communément altérée par les mêmes matières, mais à plus grande dose. Il est évident qu'elle les trouve suspendues dans l'atmosphère, dont elle balaye en quelque sorte toutes les immondices. C'est pourquoi on ne la recueille jamais pure; elle n'en est que très-peu chargée quand les pluies ou les neiges ont duré pendant plusieurs jours. »

Ainsi du chlorure de calcium et de l'acide azotique, telles étaient les matières que, dans le siècle dernier, l'on admettait exister dans les eaux de la pluie. Mais en quelles proportions se trouvent ces matières? Quelques tentatives ont été faites depuis pour résoudre cette question, ainsi que pour rechercher si d'autres substances ne se rencontraient pas encore dans la pluie.

Dalton[2] a trouvé par l'analyse des eaux de pluie de tempête, tombées au mois de décembre 1822 aux environs de Manchester, c'est-à-dire à quelque distance de la mer, que ces eaux renfermaient $\frac{1}{7500}$ de chlorure de sodium ou 133 grammes par mètre cube.

Brandes[3] a fait régulièrement, en 1825, des recherches sur

[1] *Opuscules chimiques et physiques* de M. T. Bergman, traduits par M. de Morveau, t. III, p. 95; Dijon, 1780, in-4°.

[2] *Edinburgh Journal of sciences*, t. III, p. 176.

[3] *Jahrbuch der Chemie und Physik* von Schweigger, t. XVIII, p. 153; et *Klaproth'sche Versammlung des Apotheker-Vereins zu Herford, 8 sept. 1826.*

les eaux de pluie tombées à Salzuflen. Ce météorologiste a eu pour but de déterminer *qualitativement* quelles étaient les diverses substances organiques ou minérales contenues dans chaque eau tombée, et ensuite de trouver quel poids leur ensemble formait pour chaque mois.

Pour faire ses déterminations qualitatives, Brandes prenait dans des verres bien lavés avec de l'eau distillée sur de la potasse jusqu'à ce qu'elle ne donnât plus aucun trouble avec l'azotate d'argent, une demi-once (15 grammes environ) d'eau de pluie, et y ajoutait 5 gouttes de l'un de ses réactifs toujours amenés au même point de concentration. Ces divers réactifs étaient au nombre de onze, savoir : chlorure d'or, chlorure de platine, azotate d'argent, sulfhydrate d'ammoniaque, oxalate d'ammoniaque, dissolution de potasse caustique, phosphate d'ammoniaque, azotate de baryte, azotate de plomb, eau de chaux, prussiate de potasse.

Comme exemple des détails donnés par Brandes sur ses observations faites pour chaque pluie, nous citerons ce qui concerne la pluie du 1^er^ janvier 1825. Voici la traduction de ses paroles :

« Janvier 1. Pluie de brouillard. Elle était à chaque instant troublée et rendue blanchâtre par des flocons grenus, et avait une odeur moite. Le chlorure d'or produisit une coloration verdâtre, qui disparut par la potasse caustique. Le chlorure de platine donna un précipité blanc comme neige et d'apparence laineuse. L'azotate d'argent, après quelques heures, donna une coloration d'un rouge vineux très-net, et après 12 heures se montrèrent un grand nombre de pellicules qui présentaient l'aspect de l'*ulva purpurea,* et qui par l'agitation se changèrent en flocons très-déliés, après quoi la liqueur prit une teinte rosacée. Dans cette pluie, il fut mis en évidence, par les réactifs, une quantité prédominante de *pyrrhine,* du chlorure de sodium, beaucoup de sulfate de chaux et un peu de carbonate. La pluie de la nuit de cette journée ne fut pas trouble; elle présenta beaucoup de flocons très-filamenteux, ayant une odeur moite. Elle contenait moins de

pyrrhine, plus de carbonate et chlorhydrate de soude, et moins de sulfate de chaux que la précédente. »

On comprend que des observations de cet ordre, qui n'indiquent que du *plus* ou du *moins* dans chaque pluie, sans tenir compte de l'abondance de l'eau tombée, ne peuvent avoir que très-peu d'intérêt. Dans tous les cas, Brandes tire de ses recherches qualitatives les conclusions suivantes, qui, selon lui, caractérisent l'eau de pluie :

« Lorsque nous considérons, dit-il, l'ensemble que donnent les essais précédents, nous croyons que le plus souvent les eaux de pluie diffèrent les unes des autres. Dans son aspect, l'eau de pluie est claire, transparente, ou plus ou moins troublée et rendue opaline par une matière organique tenue en suspension, qui paraît tantôt pulvérulente (poussière météorique), tantôt floconneuse, filamenteuse, feutrée et membraneuse.

« Le *trouble* de la pluie est en général blanc, rarement rouge, brun, verdâtre. De temps en temps, toute la masse de l'eau présente une coloration brunâtre et laiteuse.

« L'*odeur* de l'eau de pluie n'est pas en général sensible ; cependant, de temps en temps, elle est fade, moite, désagréable, marécageuse, et, au printemps, elle devient plus souvent balsamique et rappelle celle des fleurs ou des prairies ; plus tard, elle se rapproche de celle des betteraves, des genevièvres, de matières en putréfaction ; puis, en hiver et en automne, de celle du chlore, de fucus brûlés et aussi d'acide prussique.

« Sa *saveur* n'est pas en général sensible ; cependant elle est fraîche, moite, marécageuse, putride, aromatique, douce, piquante, semblable à celle des amandes amères.

« L'eau de pluie n'est presque jamais pure ; elle contient des matières organiques et des sels. Quant à ce qui concerne la dose des sels, cette remarque générale suffit, à savoir que cette dose est plus grande en hiver et en automne et plus faible en été, que très-rarement les sels manquent tout à fait, de telle sorte que de l'eau de pluie d'une pureté absolue serait un cas extraordinaire. »

Brandes a toutefois essayé de doser quantitativement, mois par mois, l'ensemble de toutes les matières organiques ou salines contenues dans les eaux de pluie. Pour cela il évaporait, dans une capsule de platine chauffée par une lampe à alcool, trente onces (612 grammes) du mélange de toutes les eaux tombées en un mois, et il pesait le résidu sec. Il a obtenu les résultats suivants :

Mois.	Poids des résidus secs pour 1 mètre cube (1,000,000 de parties).
Janvier	6g,5
Février	3, 5
Mars	2, 1
Avril	1, 4
Mai	0, 8
Juin	1, 1
Juillet	1, 6
Août	2, 8
Septembre	2, 1
Octobre	3, 1
Novembre	2, 7
Décembre	3, 5
TOTAL	31, 2
MOYENNE mensuelle	2, 6

La masse saline totale que recueillit Brandes par l'évaporisation de 12 fois 30 onces d'eau (7^k,344) ne s'élevait pas au delà de 275 grains (505 milligrammes). Il est évident que sur une aussi petite quantité de matière il était difficile de faire une analyse quantitative bien exacte. Aussi Brandes ne l'a-t-il pas tenté, et il s'est contenté encore d'essais qualitatifs. Il conclut de ces essais que le résidu salin total provenant de toutes ses évaporations mensuelles contenait, en 1825, selon ses propres expressions :

« De la résine;
« De la *pyrrhine*, matière végéto-animale;
« Du mucus;
« Du chlorure de magnésium;
« Du sulfate de magnésie;
« Du carbonate de magnésie;
« Du chlorure de sodium;

« Du sulfate de chaux;
« Du carbonate de chaux;
« Du carbonate de potasse;
« De l'oxyde de fer;
« De l'oxyde de manganèse;
« Des sels ammoniacaux (nitrate?). »

Brandes calcule ensuite que, d'après la quantité d'eau tombée en 1825, quantité s'élevant à 6,373 mètres cubes par hectare ($637^{mill.},3$ en hauteur), les eaux de pluie ont déversé sur Salzuflen $16^{k},770$ de sels divers.

Mais ces chiffres ne sauraient, selon nous, être regardés comme pouvant fournir un renseignement météorologique de quelque valeur. En effet, aucune précaution n'était prise par Brandes pour retenir les sels volatils, comme par exemple les sels ammoniacaux, et rien ne prouve qu'il s'était arrangé de manière à éviter efficacement l'introduction de matières étrangères accidentelles dans les eaux qu'il évaporait à l'air libre.

Cette critique paraîtra complétement légitime, si l'on remarque que Brandes n'est pas certain de l'existence du nitrate d'ammoniaque et qu'il signale beaucoup de matières, telles que les oxydes de fer et de manganèse et le chlorure de potassium, dont la présence dans les eaux de pluie a été révoquée en doute par M. Liebig.

La matière organique dont il s'agit dans le mémoire de Brandes, et qui est caractérisée par la propriété de donner avec l'azotate d'argent une coloration rouge sous l'action de la lumière, avait été signalée antérieurement par Zimmermann dans des recherches publiées par extrait à la fin de 1824[1]. Zimmermann lui donna le nom de *pyrrhine*. Hermbstädt remarqua cette substance dans l'eau de la mer Baltique recueillie près de Doberau. Krüger observa que l'air de la mer à Rostock donnait la même coloration aux sels d'argent. Brandes rapporte qu'en 1821 il eut l'occasion de constater que l'air de la saline de Salzuflen agissait de la même manière sur l'azotate d'argent très-étendu. Berzélius, qui a aussi

[1] *Kastner's Archiv*, t. I, p. 257.

remarqué ce phénomène sur les bords de la mer, l'attribue à une matière organique que l'eau saline abandonnerait à l'atmosphère. Dans le mémoire de Brandes dont nous venons de donner une analyse, ce chimiste pense que la matière de Zimmermann ne doit pas être regardée comme définie, mais que c'est un mélange de résine, de mucus et d'une substance végéto-animale.

Les travaux entrepris par Zimmermann à Giessen ont été continués par M. Liebig. Voici comment s'exprime ce savant[1] :

« Depuis deux ans et demi, je m'occupe de l'analyse des eaux de pluie, travail qui a été occasionné par un mémoire relatif aux météores aqueux, de M. Zimmermann, professeur de chimie à Giessen et mon prédécesseur.

« M. Zimmermann croyait avoir trouvé dans les eaux de pluie du manganèse, du fer, de l'acide carbonique, de la chaux, du chlorure de potassium et *point* de chlorure de sodium.

« Le but de mes recherches était de démontrer que le chlorure de potassium, le fer et le manganèse n'existent pas dans l'eau de pluie. En deux ans, j'ai analysé 77 résidus par l'évaporation d'autant de différentes eaux de pluie, recueillies dans des vases de porcelaine et évaporées à une douce chaleur. Ils contenaient tous du muriate de soude et pas une trace de potasse; le manganèse et le fer manquaient également, si les eaux étaient préalablement filtrées.

« Les eaux contenaient en même temps des substances organiques, que je cherchai à détruire par la chaleur. En chauffant le résidu obtenu par l'évaporation de 10 livres d'eau d'une pluie d'*orage*, j'observai un léger fusement, et cela me suggéra aussitôt l'idée de rechercher l'acide nitrique dans toutes les eaux de pluie. Parmi mes 77 échantillons d'eau, il y en avait 17 qui provenaient de pluies d'orages; or ces 17 contenaient tous de l'acide nitrique en quantités très-différentes, combiné ou à la chaux ou à l'ammoniaque : parmi les autres, au nombre de 60, je n'en trouvai que deux qui continssent des traces d'acide nitrique.

[1] *Annales de chimie et de physique*, 2e série, t. XXXV, p. 329 (1827).

« Après la mort de M. Zimmermann, on m'a remis tous ses appareils et de plus 50 résidus d'eaux de pluie recueillies en 1821, 1822 et 1823; parmi celles-ci, 12 contenaient de l'acide nitrique ou plutôt des nitrates. »

Dans ce premier travail, M. Liebig était préoccupé du rôle que l'acide azotique, produit dans les orages, pouvait jouer dans les différents exemples de nitrification naturelle que l'on connaît à la surface de la terre; plus tard, il a moins insisté sur ce sujet, et toutes ses idées se sont tournées vers la détermination de l'ammoniaque que les eaux de pluie pouvaient renfermer, et vers l'importance d'un pareil fait pour l'agriculture. Ainsi, dans l'Introduction à son Traité de chimie organique[1], il cherche à prouver que l'atmosphère contient assez d'ammoniaque pour fournir à l'alimentation en azote d'un hectare de forêts, de prairies ou d'une récolte quelconque de blé, de betteraves, etc.; il pense que l'ammoniaque atmosphérique est fournie aux plantes par l'eau pluviale, et il ajoute : « Des expériences exécutées avec beaucoup de soin et de précision au laboratoire de Giessen ont mis hors de doute l'existence de l'ammoniaque dans l'eau de pluie; ce corps a échappé jusqu'à présent aux observations, parce que personne n'a songé à s'enquérir de sa présence. L'eau de pluie qui a servi à nos expériences a été recueillie à six cents pas au sud-ouest de Giessen, dans un endroit d'où le vent passait sur la ville. Tout le monde peut s'assurer de la présence de l'ammoniaque dans les eaux pluviales d'une manière très-simple, en évaporant presque à siccité de l'eau de pluie récemment tombée, après y avoir ajouté un peu d'acide sulfurique ou d'acide hydrochlorique. Ces acides, en se combinant avec l'ammoniaque, le privent de sa volatilité; le résidu contient alors du sel ammoniac ou du sulfate d'ammoniaque, que l'on reconnaît à l'aide du bichlorure de platine, et plus facilement encore à l'odeur pénétrante qu'il dégage lorsqu'on y ajoute de l'hydrate de chaux pulvérisé.

« L'ammoniaque se rencontre également dans les eaux de neige.

[1] T. I, p. CII, traduction de M. Charles Gerhardt, 1840.

Plusieurs livres de neige prise au mois de mars, à la surface d'une couche de dix pouces de hauteur environ, ont donné, par l'évaporation avec l'acide hydrochlorique, un résidu de sel ammoniac qui, par l'addition de la chaux, dégageait beaucoup d'ammoniaque; la couche de neige inférieure, qui touchait le sol, en contenait une proportion bien plus grande. Il est remarquable que l'ammoniaque contenue dans les eaux de neige et de pluie présente une odeur fort prononcée de sueur et d'excréments, ce qui dénote clairement son origine. L'eau distillée trouble toujours le sous-acétate de plomb, en raison du carbonate d'ammoniaque qu'elle renferme; ce n'est qu'en ajoutant à l'eau, avant de la distiller, de l'alun ou un acide minéral, qu'on peut l'en priver complétement. »

Non-seulement M. Liebig est ainsi arrivé à penser que, dans l'eau de pluie, l'ammoniaque joue le rôle capital, mais il a même affirmé que l'acide azotique ne devait s'y trouver, au moins dans le centre de l'Europe, qu'en quantité insignifiante. Voici comment il s'exprime à cet égard dans sa *Chimie appliquée à la physiologie végétale et à l'agriculture*[1] : « Il est impossible de doser l'acide nitrique contenu dans l'eau des pluies d'orage; deux ou trois cents livres d'eau de pluie filtrée ne fournissent que quelques grains d'un résidu coloré, où le nitrate ne représente qu'une quantité fractionnaire. » Et plus loin il dit[2] : « On peut admettre qu'en Europe la quantité d'acide nitrique portée sur la terre par les pluies est infiniment petite, et que si l'acide nitrique produit par les éclairs exerce une influence favorable sur la végétation, cet effet ne doit pas être considéré comme provenant d'une source d'azote. La plupart des contrées ne reçoivent par an que 12, beaucoup d'entre elles que 8 pluies d'orage; de sorte qu'il est naturellement impossible de découvrir la présence de l'acide nitrique dans les eaux de rivière et de source. »

Telles étaient les notions un peu vagues que l'on possédait sur

[1] Traduction de M. Gerhardt, p. 321 (1844).
[2] *Ibid.* p. 323.

les matières contenues dans les eaux pluviales, lorsque, dans le courant de 1850, MM. Chatin et Marchand y joignirent, par des communications successives faites à l'Académie des sciences [1], la révélation du fait de la présence presque constante de l'iode et même du brome.

Au mois de mars 1851, du 12 au 19, M. Isidore Pierre, professeur de chimie à la Faculté des sciences de Caen, a recueilli une certaine quantité d'eau de pluie tombée à une distance de la mer évaluée de 30 à 40 kilomètres, dans le but spécial d'y rechercher la dose de sel qui y serait contenue. Voici les détails que ce savant donne sur ses expériences : « Deux grands flacons, lavés et nettoyés avec le plus grand soin, dit-il [2], ont été placés au milieu du jardin de la maison que j'habite, de manière à être à l'abri des éclaboussures et de la chute des corps étrangers qui auraient pu dénaturer d'une manière notable les résultats que je voulais observer. On n'eut rien à redouter de la poussière entraînée par les vents, puisque le temps est resté constamment pluvieux pendant toute la durée de l'expérience.

« Chacun de ces deux flacons étant surmonté d'un entonnoir de verre de 21 centimètres, neuf, bien lavé et bien nettoyé, l'on obtint ainsi un peu plus de 5 litres d'eau prise proportionnellement sur toutes les averses d'eau qui tombèrent. Cette eau devait évidemment représenter la composition moyenne de la couche d'eau tombée sur le sol.

« Cette couche, calculée d'après la quantité d'eau reçue dans les entonnoirs, fut de 78 millimètres pour l'espace de temps pendant lequel on a continué de la recevoir.

« En évaporant avec soin, dans une petite capsule de porcelaine bien propre et pesée d'avance, 5 kilogrammes de cette eau, j'obtins un résidu pesant 123 milligrammes, soit par litre ou par

[1] Le premier travail de M. Chatin est mentionné dans le compte rendu de l'Académie des sciences, t. XXXI, p. 280; celui de M. Marchand, même volume, p. 495.

[2] *Annales agronomiques*, t. I, p. 471 (mai 1851).

kilogramme un résidu de 24 milligrammes 6/10 de substances fixes. On a trouvé à l'aide des réactifs ordinaires, dans ces 123 milligrammes de résidu, 17 milligrammes 434 de chlore qui, transformés par le calcul en chlorure de sodium, représentent 28 milligrammes 737 de cette substance, ou 5 milligrammes 3/4 par kilogramme d'eau[1].

« Si l'on admet, ce qui ne doit pas être éloigné de la vérité, que l'état de salure de cette eau représente la moyenne salure de l'année; si l'on admet, en outre, que la quantité d'eau qui tombe annuellement à Caen y forme une couche de 1 mètre, la masse d'eau reçue par un hectare de terre pèserait 1 million de kilogrammes et contiendrait 57 kilogrammes 1/2 de chlorures, c'est-à-dire de quoi fournir à plus de 3 récoltes de betteraves, à plus de 10 récoltes d'avoine, à plus de 25 récoltes de froment, la quantité de chlorures que les analyses de M. Boussingault nous montrent comme l'un des éléments constitutifs de ces récoltes.

« Si, comme les expériences précédentes nous portent à le croire, les eaux de pluie contiennent partout ou presque partout des matières salines en proportion notable, nous retrouvons encore, dans ce mode de restitution, un de ces moyens mystérieux qu'emploie si souvent la Providence pour répandre et renouveler au loin les principes de vie et de fécondité. La même cause que nous accusons sans cesse d'entraîner peu à peu dans les fleuves, et de là dans la mer, une partie des matières solubles essentielles à la fertilité de nos champs, cette même cause les leur ramène périodiquement par une sorte de mouvement de circulation continuel dont les exemples se multiplient chaque jour à nos yeux, à mesure que nous pénétrons plus avant dans l'étude des phénomènes naturels.

« La détermination des principaux éléments de ce résidu offrait trop d'intérêt pour que je ne cherchasse pas à l'effectuer au moins

[1] Les nombres que donne M. Pierre correspondent par mètre cube d'eau à $24^{g},6$ de résidu salin et à $3^{g},5$ de chlore.

approximativement. Cet examen m'a conduit aux résultats qui vont suivre :

	Milligr.
Chlorure de sodium	22,03
——— potassium	4,80
——— magnésium	1,46
——— calcium	1,10
Sulfate de soude	4,94
——— potasse	4,68
——— chaux	3,66
——— magnésie	3,22

« Beaucoup de carbonate de chaux, qui se trouvait sans doute dans l'eau à l'état de bicarbonate soluble, des matières organiques diverses et des substances dont la nature n'a pas été déterminée.

« Les éléments que nous venons de citer sont précisément de ceux dont l'analyse chimique a indiqué la présence dans la plupart des eaux courantes et dans les eaux de la mer, avec la différence que les sels de potasse et de chaux y paraissent surtout proportionnellement plus abondants. La proportion totale de chaux s'élève à plus de 13 milligrammes, c'est-à-dire à plus de 2 milligrammes 6 par kilogramme[1], et la quantité d'acide sulfurique à plus de 1 milligramme 7 par kilogramme[2]; en d'autres termes, en nous plaçant dans les conditions que nous admettions précédemment, 1 hectare de terre recevrait annuellement, par l'intermédiaire des pluies, plus de 58 kilogrammes 8 de chlorures, dont au moins 44 de sel marin, plus de 17 kilogrammes d'acide sulfurique ou plus de 33 kilogrammes de sulfates divers, plus de 26 kilogrammes de chaux, etc. »

Dans ses analyses, faites uniquement sur les eaux d'un seul mois, M. Isidore Pierre ne s'est occupé de rechercher ni l'ammoniaque, ni l'acide azotique; la méthode qu'il employait, celle de la simple évaporation dans une capsule, ne permettait pas d'ailleurs d'obtenir ces deux corps, qui se volatilisent dans de pareilles conditions.

[1] 2ᵏ,6 par mètre cube d'eau de pluie.

[2] 1ᵏ,7 par mètre cube.

Dans un mémoire récemment publié[1] sur l'oxydation de l'ammoniaque dans le corps de l'homme, M. Henry Bence Jones, chirurgien de l'hôpital Saint-Georges à Londres, après avoir rapporté des expériences d'où il résulte qu'après l'ingestion du carbonate, du chlorhydrate et du tartrate d'ammoniaque, ainsi que de l'ammoniaque liquide et de l'urée, on retrouve de l'acide azotique dans les urines, déclare qu'il est probable que cet acide existe en tout temps dans l'air de tous les lieux et joue dans la végétation un rôle non moins important que celui attribué à l'ammoniaque. M. Jones ajoute à son mémoire un appendice dont voici la traduction littérale : « *Sur l'acide azotique de l'eau de pluie.* Durant janvier, en différents jours de pluie, de l'eau pluviale a été recueillie à Londres, et de petites quantités en ont été évaporées avec du carbonate de potasse tout à fait pur; et je trouvai que l'acide azotique y était toujours présent et pouvait être découvert parfaitement dans une pinte d'eau de pluie (6 dixièmes de litre environ) par le réactif à l'amidon.

« De plus, dans de l'eau de pluie recueillie dans le même temps à Kingston dans le Surrey, à Melburgh dans le Dorsetshire à plusieurs milles de toute ville, et près de Clonakilty dans le comté de Cork, lorsque le vent du sud-ouest régnait, je trouvai une quantité évidente d'acide azotique. »

Si diverses recherches ont été effectuées pour accuser la présence, soit de l'acide azotique, soit de l'ammoniaque, dans les eaux de pluie, il n'y en a pas encore eu de publiées relativement aux quantités qui peuvent s'y rencontrer. Par une communication qu'a bien voulu nous faire M. de Gasparin postérieurement à notre travail, nous savons seulement que, dans de l'eau recueillie à Orange par les soins de ce savant agronome, M. Payen pour les eaux de l'année 1845-1846, et M. Wurtz[2] pour les eaux de

[1] *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, for 1851, part. II, p. 409.

[2] Je dois faire remarquer ici que l'analyse de M. Wurtz est postérieure à la présentation de mon mémoire à l'Académie.

l'année 1850-1851, ont trouvé des quantités d'ammoniaque dont l'azote représente plusieurs kilogrammes tombés par chaque hectare. Ce résultat montre que la dose d'azote fourni aux plantes par la pluie n'est pas négligeable, et est sans doute de même ordre que celle des chlorures et sulfates trouvés par M. Isidore Pierre dans les résultats que nous avons cités précédemment.

De tous les détails historiques dans lesquels nous venons d'entrer, il ressort bien évidemment qu'il est impossible de rien conclure des travaux exécutés sur la question qui nous occupe, relativement aux variations que les saisons ou les climats, selon les expressions de Bergman, peuvent amener dans les matières que la pluie déverse sur le sol. Il reste aussi bien des doutes à éclaircir sur l'existence et sur la quantité de plusieurs matières qui ont été signalées dans la pluie. D'un autre côté, si l'on peut soupçonner aujourd'hui, d'après les recherches effectuées, que les matériaux de la pluie doivent jouer un rôle dans la végétation, il reste complétement à définir leur action et à trouver pour chaque lieu la valeur de l'influence exercée chaque année par ce grand météore sur les récoltes. L'atmosphère est sans doute un vaste laboratoire où des combinaisons se produisent entre les éléments gazéiformes qui y circulent. Les eaux de pluie doivent contenir la plus grande partie de ces combinaisons.

§ II.

OBJET DE CE MÉMOIRE.

Nous avons pensé que si l'on parvenait à doser les matières que chaque eau de pluie ramène sur le sol après avoir en quelque sorte balayé l'atmosphère, on fournirait à la météorologie un élément dont on pourrait tirer parti pour expliquer un grand nombre de faits. Nous avons, en conséquence, résolu de chercher si la chimie ne pourrait pas livrer à la science des résultats numériques qui viendraient prendre place à côté de ceux enregistrés aujourd'hui dans un si grand nombre de localités, par l'observation du baromètre, du thermomètre, de l'hygromètre, de l'udomètre, des

girouettes indiquant la direction des vents, etc. Le mémoire que nous soumettons à l'examen de l'Académie démontrera, nous l'espérons, par les résultats que nous a fournis l'étude chimique des eaux recueillies tant sur la terrasse que dans la cour de l'Observatoire de Paris, qu'il est possible de dire avec précision, et mois par mois, les quantités des matières suivantes existantes dans les eaux météoriques :

1° Azote,
2° Acide azotique,
3° Ammoniaque,
4° Chlore,
5° Chaux,
6° Magnésie,

et toutes les autres substances que la continuation de pareils travaux pourra faire découvrir.

Après plusieurs tâtonnements, nous sommes arrivé à nous tracer une méthode que nous croyons propre à mener à la découverte de la vérité. Mais dans une matière aussi délicate, nous avons dû nous défier de nous-même; aussi ne présentons-nous nos premières recherches que comme un premier pas, et nous avons pensé que peut-être nos efforts ne sembleraient pas à l'Académie indignes de conseils qui nous empêcheraient de nous égarer. Si les chimistes et les physiciens voulaient bien nous encourager, fût-ce même par la critique scientifique de nos recherches, à les poursuivre, nous nous croirions suffisamment récompensé.

§ III.

IMPORTANCE DU PROBLÈME À RÉSOUDRE.

Dans ces dernières années, on a vivement agité, parmi les chimistes et les agronomes, la question du rôle de l'atmosphère dans la végétation. Quelle part a l'azote de l'air? quelle part a le sol dans la nutrition des plantes? Est-il vrai que l'agriculteur n'a à s'occuper que de fournir des sels minéraux au sol, comme le soutient un célèbre chimiste allemand? Les sels ammoniacaux, au

contraire, sont-ils le principal élément que les engrais doivent contenir? Si les plantes prennent de l'azote à l'atmosphère, ce qui n'est pas douteux pour quelques récoltes, comme l'a prouvé M. Boussingault, cet azote provient-il de l'ammoniaque contenue dans l'atmosphère et fournie aux végétaux par l'eau de pluie? Sur tous ces points, un travail du genre de celui que nous avons entrepris doit jeter le plus grand jour, si du moins on en juge par les conséquences que l'on a déjà tirées des connaissances très-imparfaites acquises jusqu'à présent sur ce sujet.

La citation de l'opinion présentée par un habile chimiste, M. Malaguti, dans des leçons faites récemment sur la chimie agricole, donnera la mesure de la gravité de la question que nous soulevons.

« Quelle est, dit M. Malaguti[1], l'importance de la vapeur d'eau dans l'air? Elle est énorme, et peu de mots suffiront pour vous le prouver.

« Si l'on évapore beaucoup d'eau de pluie, elle laissera un résidu plus ou moins considérable. Ce résidu est en partie formé de poussières qui voltigent toujours dans l'air et de quelques sels solubles, parmi lesquels figure le sel marin; on y trouve aussi des sels ammoniacaux, et spécialement du nitrate d'ammoniaque, si l'eau examinée est de l'eau d'orage, car la foudre en sillonnant l'atmosphère y produit de l'acide nitrique et de l'ammoniaque. La vapeur aqueuse de l'air, en tombant sous forme de pluie, balaye l'espace et entraîne avec elle des matières qui, introduites dans la terre, exercent une influence heureuse sur la végétation. En effet, personne ne peut contester aujourd'hui les bons effets du sel marin et des sels ammoniacaux sur les plantes; mais en nous plaçant au point de vue de la végétation naturelle, en dehors tout à fait de l'influence de l'art, nous voyons dans les matières salines apportées par les pluies sur la terre un des éléments de l'existence des végétaux.

« Il n'en est point qui ne contienne de l'azote. Ce principe est

[1] *Leçons de chimie agricole*, p. 15 (1848).

aussi indispensable que le carbone, l'oxygène, l'hydrogène. Mais où certaines plantes trouveraient-elles de l'azote, si ce n'est, en partie au moins, dans les sels ammoniacaux que les eaux du ciel apportent sur la terre? Ce que je viens de dire de l'azote est applicable à la soude; dans certaines cendres, on trouve constamment de la soude : la présence immanquable de cette matière prouve qu'elle est un élément de vie et d'existence pour les plantes d'où l'on a tiré ces cendres. Or il peut arriver que l'analyse la plus exacte ne fasse pas découvrir la moindre trace de soude dans le terrain où ces plantes ont végété. D'où viendra donc la soude, si ce n'est de l'atmosphère, où elle se trouve transportée par l'évaporation de la mer, sous forme de sel marin ou muriate de soude?

« La vapeur d'eau atmosphérique, qui par sa condensation se transforme en pluie, sert de véhicule pour introduire dans la terre des matières nécessaires à l'existence des végétaux. »

Beaucoup de chimistes et d'agriculteurs répondront à M. Malaguti qu'il a émis des hypothèses plutôt que des vérités hors de toute contestation. Mais n'est-il pas vrai que si l'on avait des chiffres certains démontrant que les pluies apportent, dans tel pays, tels ou tels éléments en quantités connues, toute espèce de doute cesserait à l'instant même. Ainsi, par exemple, dans les belles recherches de M. Boussingault relatives aux matériaux que divers assolements enlèvent aux engrais et à l'excédant de l'azote contenu dans les récoltes par rapport à celui fourni par les fumiers, un élément important eût été déterminé, si l'on avait eu l'azote apporté par les eaux de pluie. M. Boussingault a terminé son travail en montrant que plusieurs hypothèses pouvaient expliquer le phénomène. « L'azote, a-t-il dit[1], peut entrer directement dans l'organisme des plantes, si leurs parties vertes sont aptes à le fixer; cet élément peut encore être porté dans les végétaux par l'eau toujours aérée qui est aspirée par leurs racines. Enfin, il est

[1] *Économie rurale*, t. II; et *Annales de chimie et de physique*, t. LXIX, p. 366 (1837).

possible, comme le pensent quelques physiciens[1], qu'il existe dans l'air une infiniment petite quantité de vapeurs ammoniacales. » Si un udomètre placé au milieu des champs où se faisaient les expériences capitales de M. Boussingault eût recueilli l'eau des pluies, si cette eau eût été analysée, on aurait pu savoir laquelle de ces trois hypothèses devait être adoptée, et une question encore pendante aujourd'hui serait probablement résolue.

§ IV.

MÉTHODE D'ANALYSE EMPLOYÉE.

Dans une recherche de la nature de celle que nous avons entreprise, alors qu'il s'agit de doser des matières qui sont tellement diluées dans une grande masse d'eau qu'elles ne peuvent devenir perceptibles qu'à l'aide de la concentration, il y a deux écueils à éviter. On doit s'arranger de manière à ne faire aucune perte, et aussi de manière à n'introduire dans la matière à analyser aucune substance étrangère provenant, soit d'accidents, soit des réactifs employés.

Les eaux que nous avons analysées nous ont été remises, avec un soin religieux dont nous lui sommes très-reconnaissant, par M. Charles Mathieu, astronome attaché à l'Observatoire de Paris, telles qu'elles ont été reçues dans les deux udomètres situés dans la cour et sur la plate-forme de cet établissement. Nous n'avons pas cru, avant d'avoir reconnu toutes les difficultés de la question par l'étude préliminaire que nous soumettons aujourd'hui au jugement de l'Académie, devoir solliciter de la bienveillance de M. Arago et du zèle si éclairé de cet illustre savant pour l'avancement des sciences, aucune modification aux udomètres servant de récipient pour les eaux météoriques. Nous avons pensé d'ailleurs que la Commission dont nous demandons à l'Académie la nomination jugera mieux que nous des modifications qui pourraient être faites à ces appareils dans l'intérêt de la science.

Ces udomètres se composent chacun d'une vaste cuvette cir-

[1] Saussure, *Recherches chimiques sur la végétation.*

culaire en fer ayant $0^{m},76$ de diamètre et $0^{m.carré},4536$ de surface. Un rebord de $0^{m},09$ de hauteur circonscrit les cuvettes, qui au centre présentent une profondeur de $0^{m},17$ mesurée à partir du plan supérieur de la circonférence du rebord. Les deux cuvettes ont été recouvertes d'une couche de peinture. Cette couche a complétement disparu de l'udomètre de la plate-forme; elle existe encore en partie sur la cuvette de l'udomètre de la cour. Les eaux tombent par le centre des cuvettes à travers quelques petits trous dans un tuyau en cuivre qui les amène dans un réservoir en zinc pour la plate-forme, dans un réservoir en cuivre pour la cour. C'est de ces réservoirs que l'on tire l'eau pour mesurer les hauteurs qui figurent dans les tableaux météorologiques mensuels publiés par l'Observatoire. L'eau mesurée est ensuite versée dans de grands flacons de verre qui nous sont aussitôt livrés.

Nous avons reçu, durant les 6 mois de juillet à décembre 1851, les eaux de l'udomètre de la plate-forme, durant 5 mois, d'août à décembre 1851, les eaux de l'udomètre de la cour; un accident nous a privé des eaux de la cour tombées en juillet.

Aussitôt que nous recevons les eaux de pluie, nous les filtrons sur des filtres de papier préalablement bien lavés, pour débarrasser les eaux d'un certain nombre d'insectes et d'une assez grande quantité de poussière grisâtre qui y est tenue en suspension et que nous n'avons pas encore dosée. Nous avons pris des mesures pour que ce dosage qualitatif et quantitatif s'effectuât à partir de janvier 1852. Nous en ferons donc mention l'an prochain dans le mémoire que nous soumettrons alors à l'Académie.

Les eaux sont versées, pour effectuer leur concentration, dans une cornue de verre tubulée ayant 4 à 5 litres de capacité. Dans la cornue est mis à l'avance un centimètre cube d'acide sulfurique très-pur et concentré. La cornue est chauffée par un bain d'huile. Les eaux nouvelles sont introduites au fur et à mesure des besoins, à l'aide d'un entonnoir fixé à demeure dans la tubulure de la cornue, entonnoir descendant presque jusqu'au fond et toujours couvert. Il va sans dire que deux opérations distinctes sont

menées de front pour les eaux de la cour et pour celles de la plate-forme de l'Observatoire.

La vapeur d'eau est condensée à l'aide d'un courant d'eau froide dans un réfrigérant constitué par un tube de verre entouré d'un manchon. Les eaux condensées tombent, au sortir de ce réfrigérant de verre, dans un flacon de verre bouché, mais mis en communication avec l'atmosphère par un petit tube recourbé ayant une ouverture très-effilée.

Les eaux de condensation, afin de ne rien perdre, soit en acide azotique, soit en iode ou autres matières volatiles non retenues par l'acide sulfurique, sont à leur tour distillées, avec les mêmes précautions, en présence de deux grammes de carbonate de potasse bien pur. Cette dernière précaution ne nous a pas été suggérée immédiatement. Elle est employée rigoureusement à partir du 1^er^ janvier 1852.

Lorsque les eaux de pluie de tout un mois sont ramenées au volume de 1/2 litre à 1 litre, nous arrêtons la concentration. Ce moment arrive plus ou moins rapidement, car nous avons eu à évaporer des eaux dont la quantité était comprise entre 7 litres environ pour le mois de décembre et 34 litres pour le mois de juillet. Les eaux concentrées ont pris une couleur jaune paille. On les sature par une dissolution étendue de bicarbonate de potasse pur. La liqueur saturée est évaporée jusqu'à consistance d'une trentaine de centimètres cubes environ dans une petite cornue de verre chauffée doucement et circulairement. Les vapeurs sont encore condensées comme précédemment et recueillies dans un flacon où l'on a mis 10 centimètres cubes d'acide chlorhydrique pur, afin de retenir quelques traces d'ammoniaque qui s'échapperaient dans le cas où l'on aurait mis un léger excès de bicarbonate de potasse pour la saturation.

Les 30 centimètres cubes restants dans la cornue et qui donnent déjà une cristallisation abondante sont évaporés à sec dans une capsule de platine, à l'aide d'une étuve à eau bouillante. Le résidu salin sec ainsi obtenu est pesé, puis bien pulvérisé. Il pèse de 3 à 4 grammes. Il contient les matières à doser, étendues dans du

sulfate de potasse, ce qui est un avantage, car il est facile de les fractionner et d'en prendre des quantités déterminées pour les diverses analyses à effectuer.

Les eaux condensées de la première distillation sont amenées, comme nous l'avons dit, à concentration sur du carbonate de potasse; nous employons les mêmes précautions dans cette opération que dans la première; nous condensons la vapeur produite, et elle forme l'eau distillée que nous employons dans notre laboratoire pour tout ce qui concerne les recherches actuelles.

L'eau condensée provenant de la concentration de la liqueur acide réduite à moins d'un litre, puis saturée par de la potasse, est évaporée avec de l'acide chlorhydrique et du bichlorure de platine; nous obtenons ainsi une petite quantité de chloroplatinate d'ammoniaque, dont le poids nous fournit quelques milligrammes d'azote à ajouter à la quantité déterminée par les dosages effectués sur le résidu salin principal. Ainsi, en résumé, notre procédé analytique est le suivant :

1° On évapore en vase clos et à part toute l'eau d'un mois, soit de la terrasse, soit de la plate-forme, de manière à avoir toujours une vérification des résultats obtenus; cette évaporation, faite avec un seul centimètre cube d'acide sulfurique bouilli, donne une liqueur concentrée A et une liqueur condensée B.

2° La liqueur A, qui a un volume de 500 centimètres cubes à un litre, est neutralisée par une dissolution étendue de bicarbonate de potasse, et alors amenée lentement en vase clos à ne plus avoir que 40 à 50 centimètres cubes, ce qui donne une nouvelle liqueur concentrée A′ et une liqueur condensée C.

3° La liqueur concentrée A′ est ramenée à siccité dans une étuve à eau bouillante, et donne un résidu principal R.

Dans ce résidu R se trouvent presque toutes les matières existantes dans les eaux de pluie, et il forme le sujet de la plupart des recherches analytiques de notre travail.

On y dose l'azote total par la combustion d'une fraction déterminée dans l'oxyde de cuivre, l'azote à l'état d'ammoniaque par

la calcination avec la chaux sodée et le tébrage par la méthode de M. Péligot; la différence donne l'azote à l'état d'acide azotique.

On dose dans un poids connu de ce résidu R : le chlore, par une dissolution normale d'azotate d'argent; la chaux, par la précipitation à l'aide de l'oxalate d'ammoniaque; la magnésie par la calcination, avec du carbonate de soude, de la liqueur filtrée ramenée à siccité.

4° La liqueur C, évaporée avec de l'acide chlorhydrique et du chlorure de platine, puis reprise par de l'alcool éthéré, fournit quelques traces d'ammoniaque échappées par la concentration de la liqueur A'.

5° La liqueur B, distillée avec 100 centimètres cubes d'une dissolution de bicarbonate de potasse, donne quelques traces d'acide azotique et d'iode échappées à l'évaporation de l'eau pluviale avec de l'acide sulfurique.

§ V.

VÉRIFICATIONS DU PROCÉDÉ ANALYTIQUE EMPLOYÉ.

Afin de connaître le degré de précision présenté par nos recherches, nous avons fait quelques vérifications au double point de vue de savoir, 1° si nos réactifs ne contiendraient pas quelques-uns des éléments retrouvés dans les eaux de pluie; et 2° si, ayant introduit intentionnellement un poids connu de ces éléments dans de l'eau pure, on obtiendrait, par la méthode précédemment indiquée, les matériaux ajoutés.

Les conséquences les plus importantes à retirer de l'analyse de l'eau de pluie sont relatives à la dose de l'azote qui y est contenu, soit à l'état d'ammoniaque, soit à l'état d'acide azotique; c'est sur ces éléments qu'ont porté particulièrement nos recherches.

L'acide sulfurique concentré que nous employons a été distillé par nous dans une cornue de verre, et nous avons eu soin de rejeter la première partie des vapeurs condensées et de ne pas pousser la distillation jusqu'à ses dernières limites. Cet acide sulfurique n'exerce aucune action pour décolorer l'indigo ou pour colorer la

dissolution du proto-sulfate de fer dans de l'acide sulfurique étendu de son volume d'eau, et en présence d'une lame de fer décapée.

Le bicarbonate de potasse qui nous sert à saturer nos liqueurs concentrées a été par nous obtenu à l'aide de la calcination du bitartrate de potasse, de la reprise de la matière par l'eau pure, d'un passage d'acide carbonique à travers la liqueur, et de la cristallisation. Nous dissolvons 50 grammes de bicarbonate de potasse dans un litre d'eau pure.

Pour neutraliser 1 centimètre cube de notre acide sulfurique normal, il nous faut 76 centimètres cubes de la dissolution potassique. Ce sont là les seuls matériaux étrangers que nous introduisons dans nos eaux de pluie, et les doses *maxima* que nous en employons. Or, en faisant ainsi du sulfate de potasse, et en en analysant 1 gramme tant par la chaux sodée que par l'oxyde de cuivre, nous n'avons pas obtenu la *moindre trace d'azote.*

D'un autre côté, nous avons pris 140 milligrammes d'azotate d'ammoniaque pur du commerce, et nous les avons dissous dans $5^{k},370$ d'eau distillée du commerce; nous avons ajouté à la liqueur 1 centimètre cube d'acide sulfurique normal, nous avons évaporé, comme nous avons dit, jusqu'à consistance de 750 centimètres cubes, et alors nous avons saturé par 65 centimètres cubes de la dissolution potassique. La liqueur neutre, concentrée d'abord jusqu'à 60 centimètres cubes dans une cornue de verre en condensant les vapeurs produites, puis ramenée alors à sec dans une petite capsule de platine chauffée dans une étuve à eau chaude, nous a fourni un résidu salin pesant $3^{g},493$. Ce résidu (n° 1), bien pulvérisé, a été soumis à l'analyse.

Dans la même quantité $5^{k},370$ de la même eau distillée, nous n'avons pas mis d'azotate d'ammoniaque; mais, sauf cette différence, nous l'avons traitée comme la dernière. Il a fallu 75 centimètres cubes de la dissolution potassique pour la saturation, et nous avons obtenu un résidu sec (n° 2) pesant $3^{g},545$.

Une portion de l'azotate d'ammoniaque employé a été soumise à l'analyse. Voici les résultats obtenus :

I. Par la chaux sodée et le saccharate de chaux, deux opérations ont été faites :

D'abord 10 centimètres cubes d'acide sulfurique correspondants à $0^{g},175$ d'azote exigeaient 910 divisions de la burette pour la neutralisation.

Or, avec $0^{g},584$ d'azotate d'ammoniaque, il n'en a plus fallu que 355, et pour $0^{g},654$ de ce même sel, 290 divisions. Le calcul donne alors

	Azote pour 100.
1°	18,27
2°	18,23
Moyenne	18,25

Si l'azotate d'ammoniaque employé avait été pur, il n'eût contenu que 17,50 pour 100 d'azote à l'état d'ammoniaque.

II. Par l'oxyde de cuivre nous avons traité $0^{g},246$ d'azotate d'ammoniaque, qui nous a fourni 71,5 centimètres cubes d'azote à la température de 12°, le baromètre marquant $758^{mil.},2$ à 17°,25. On déduit de là une quantité totale d'azote égale à 34,30 pour 100 d'azotate d'ammoniaque.

En conséquence, on déduit de là que l'azotate d'ammoniaque employé contenait pour 140 milligrammes

	Milligr.
Azote à l'état d'ammoniaque	25,6
Azote à l'état d'acide azotique	22,4
Azote total	48,0

Comme on pourrait supposer que la calcination d'un azotate avec de la chaux sodée serait peut-être susceptible de fournir de l'ammoniaque en petite quantité, nous avons pris 1 gramme d'azotate de potasse bien pur que nous avons fait cristalliser trois fois et ensuite dessécher dans une étuve, et nous l'avons traité comme pour une analyse organique. La dissolution d'acide sulfurique a exigé pour la saturation 910 divisions de la burette, nombre exigé directement; nous n'avons donc pu mettre ainsi en évidence aucune trace d'ammoniaque.

Maintenant nous avons soumis à l'analyse le résidu n° 1 provenant du traitement de l'eau contenant les 140 milligrammes d'azotate d'ammoniaque. Voici les résultats obtenus :

1° *Par la chaux sodée.* Nous avons fait deux analyses : dans l'une, avec 0ᵍ,534 de matière, il a fallu 901 divisions de la burette, et dans l'autre, avec 0ᵍ,766 de matière, 890, l'acide seul exigeant 925 divisions de saccharate de chaux; en conséquence, nous avons obtenu les résultats suivants rapportés à 3ᵍ,493 de résidu salin :

	Milligr.
Expérience I	29,4
Expérience II	29,2
Moyenne	29,3

2° *Par l'oxyde de cuivre.* Nous avons fait également deux analyses. Dans l'une nous avons obtenu, avec 0ᵍ,525 de matière employée, 6ᶜᶜ,25 d'azote à la température de 15°, le baromètre marquant 746ᵐⁱˡˡ.,1 à 18°; dans l'autre, avec 0ᵍ,733 de matière employée, 9ᶜᶜ,25 d'azote à 14°, le baromètre marquant 748ᵐⁱˡˡ.,3 à 17°,5. De ces chiffres nous concluons, en rapportant à 3ᵍ,493 de résidu salin :

	Milligr.
Expérience I	47,4
Expérience II	50,5
Moyenne	48,9

L'eau provenant de la distillation de la liqueur saturée, étant évaporée avec de l'acide chlorhydrique et du chlorure de platine, n'a fourni qu'une trace impondérable de chloroplatinate d'ammoniaque.

Quant à l'eau condensée provenant de la distillation de la masse totale de l'eau, elle formait 4ᵏ,451 et elle a été distillée de nouveau avec 100 centimètres cubes de la dissolution normale de bicarbonate de potasse. Nous avons ainsi obtenu un résidu pesant 5ᵍ,066. Nous en avons dosé deux fois l'azote par la combustion dans l'oxyde de cuivre; ces deux analyses nous ont fourni :

I. Avec 1ᵍ,004 de matière, 2ᶜᶜ,25 d'azote à 10°, le baromètre marquant 762ᵐⁱˡˡ,7 à 14°,5;

II. Avec 2ᵍ,030 de matière, 4ᶜᶜ,5 d'azote à 11°,25, le baromètre marquant 761ᵐⁱˡˡ,4 à 15°.

De là nous concluons en rapportant au résidu entier :

	Milligr.
Expérience I	13,47
Expérience II	13,22
Moyenne	13,34

Le résidu salin ne nous donnait d'ailleurs aucune trace d'ammoniaque.

En conséquence, nous trouvons donc dans l'eau distillée où nous avons introduit 140 milligrammes d'azotate d'ammoniaque :

	Milligr.
Azote total	62,2
—— à l'état d'ammoniaque	29,3
—— à l'état d'acide azotique	32,9

Comme nous l'avons dit, nous avons mené parallèlement, avec la même quantité d'eau distillée, une opération identique, mais sans rien ajouter. Le résidu (n° 2) que nous avons obtenu, ayant été soumis à l'analyse, nous a fourni les résultats suivants :

1° *Par la chaux sodique.* Nous avons employé 0ᵍ,258 de matière; il a fallu 735 divisions de la burette, l'acide sulfurique seul exigeant 736 divisions. Nous concluons de cette analyse, en rapportant à la totalité du résidu salin obtenu (3ᵍ,545):

Azote à l'état d'ammoniaque, 3ᵐⁱˡˡ,1.

L'absence de matière nous a empêché de recommencer cette expérience; mais le résidu salin n'indiquait bien, par les réactifs, que des traces très-faibles d'ammoniaque.

2° *Par l'oxyde de cuivre.* Nous avons fait deux analyses de la manière suivante :

I. Avec 0ᵍ,857 de matière employée, nous avons obtenu 2ᶜᶜ,25 d'azote à 11°,5, le baromètre marquant 762ᵐⁱˡˡ,7 à 16°.

II. Avec $1^{g},066$ de matière employée, nous avons obtenu $2^{cc},25$ d'azote à $11°,5$, le baromètre marquant $760^{mill.},5$ à $15°,8$.

De ces analyses, nous concluons les quantités d'azote suivantes, rapportées à tout le résidu salin :

Analyse I	9,5
Analyse II	8,6
Moyenne	9,1

Les eaux condensées de la distillation étaient complétement pures; nous n'avons rien pu en retirer. Par conséquent, l'expérience faite parallèlement à celle où nous avions introduit 140 milligrammes d'azotate d'ammoniaque nous indique qu'il faut retrancher 9 milligrammes de l'azote total et $3^{mill.},1$ de l'azote à l'état d'ammoniaque. Notre procédé d'analyse nous fournit donc :

	Milligr.
Azote total	53,1
—— à l'état d'ammoniaque	26,2
—— à l'état d'acide azotique	26,9

Nous avions introduit, d'après les analyses rapportées plus haut, dans 140 milligrammes d'azotate d'ammoniaque du commerce :

	Milligr.		Milligr.
Azote total	48,0	d'où erreur	5,1
—— à l'état d'ammoniaque	25,6	d'où erreur	0,6
—— à l'état d'acide azotique	22,4	d'où erreur	4,5

On voit donc que nous pouvons répondre de 5 milligrammes d'azote dans chacune de nos expériences mensuelles. Cela correspond à 110 grammes par hectare pour un mois, ou 660 grammes pour six mois. Devant les 15 kilogrammes que nous trouvons plus loin, cette erreur est complétement négligeable.

Avant de passer aux détails de nos recherches sur chaque élément constitutif des matériaux contenus dans les eaux de pluie, nous demanderons la permission de faire une dernière observation. La méthode que nous venons d'exposer diffère essentiellement de celle qui a été suivie par Zimmermann, Brandes et

M. Liebig pour des essais qualitatifs, et de celle qui a ensuite été adoptée par M. Isidore Pierre et par M. de Gasparin pour des analyses quantitatives. Ces savants ont évaporé jusqu'à siccité les eaux de pluie pures ou bien les eaux de pluie auxquelles ils avaient ajouté de l'acide sulfurique; nous n'évaporons qu'à consistance de moins d'un litre l'eau de chaque mois, et nous neutralisons alors la liqueur. Dans la méthode de nos devanciers, il se fait une perte considérable d'acide azotique, si l'on évapore à sec les eaux auxquelles on a ajouté de l'acide sulfurique. C'est ce qui explique pourquoi, nous le pensons, M. Liebig a pu regarder l'acide azotique des eaux de pluie comme n'étant pas susceptible d'être dosé. Brandes a évaporé les eaux de pluie de Salzuflen, et M. Isidore Pierre celles de Caen, sans prendre aucune précaution pour empêcher les pertes des sels ammoniacaux ou de l'acide azotique. Aussi Brandes a-t-il laissé en doute la question de savoir s'il avait bien réellement obtenu de l'azotate d'ammoniaque en faisant suivre cette substance dans l'énumération des substances dosées par lui *qualitativement* seulement, d'un point d'interrogation.

§ VI.

OBSERVATIONS SUR LES QUANTITÉS D'EAU RECUEILLIES.

Les eaux qui nous ont été remises contenaient toutes une certaine quantité de matières diverses en suspension, que nous avons séparées par la filtration sur du papier Berzélius sans essayer de les doser pour les six mois sur lesquels portent les recherches contenues dans ce mémoire. Lorsqu'elles ont été réduites à la concentration moyenne d'environ 3/4 de litre, elles présentaient toutes une coloration jaunâtre très-sensible, et le résidu salin provenant de la dessiccation après saturation s'est toujours trouvé grisâtre. Dans les tableaux suivants, nous inscrivons les poids de l'eau soumise à l'évaporation et ceux des résidus salins obtenus après saturation.

MOIS.	POIDS DE L'EAU soumise à l'analyse.	POIDS DU RÉSIDU salin sec obtenu.
EAUX DE LA TERRASSE.		
	kil.	gr.
Juillet 1851	34,000	3,862
Août	8,130	3,657
Septembre	10,440	3,702
Octobre	20,300	3,698
Novembre	15,830	3,914
Décembre	6,970	3,953
TOTAL	95,670	
EAUX DE LA COUR.		
Août 1851	9,560	3,641
Septembre	11,940	3,690
Octobre	22,810	3,809
Novembre	17,860	3,855
Décembre	8,240	3,300
TOTAL	70,410	

Par suite de circonstances indépendantes de notre volonté et de celle de M. Charles Mathieu, qui, comme nous l'avons dit, a bien voulu se charger de nous fournir les eaux de l'Observatoire, nous n'avons pu recevoir les eaux tombées dans la cour en juillet. D'un autre côté, il ne nous a pas été remis :

POUR LA TERRASSE.

	Hauteur de pluie en centimètres.		Poids d'eau en kilogrammes.
En juillet	0,9	correspondant à...	3,920
En août	0,4	correspondant à...	1,814
En novembre	0,4	correspondant à...	1,814
TOTAL			7,548

POUR LA COUR.

	Hauteur de pluie en centimètres.		Poids d'eau en kilogrammes
En août	0,5	correspondant à...	2,269
En octobre	0,3	correspondant à...	1,361
En novembre	0,5	correspondant à...	2,269
TOTAL			5,899

Ces quantités d'eau de pluie étant ajoutées à celles que nous avons analysées augmenteraient les doses des divers éléments que nous avons trouvés. Il est impossible de dire, dans l'état actuel de nos connaissances, comment varient ces éléments d'une pluie à une autre. Seulement il nous paraît qu'en admettant que dans chacun des mois ci-dessus il faudra augmenter les éléments trouvés dans la proportion des eaux réellement analysées à celle des eaux qui eussent pu nous être remises, nous aurons une approximation suffisante.

Dans tous les cas, pour qu'on puisse comparer les poids d'eau que nous avons analysés à ceux qui se déduisent des hauteurs portées dans les tableaux météorologiques publiés mensuellement par l'Observatoire, nous plaçons ci-après en regard ces hauteurs d'eau et les volumes qui s'en déduisent, en les multipliant par la surface des udomètres (0,4536 mètre carré).

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	HAUTEUR DE PLUIE en centimètres.	VOLUMES D'EAU TOMBÉE calculés.
	cent.	lit.
Juillet	8,127	36,864
Août	2,604	11,812
Septembre	2,305	10,455
Octobre	4,585	20,798
Novembre	3,875	17,577
Décembre	1,625	7,371
TOTAL		104,877

EAUX DE LA COUR.

MOIS.	HAUTEUR DE PLUIE en centimètres.	VOLUMES D'EAU TOMBÉE calculés.
	cent.	lit.
Août	2,824	12,810
Septembre	2,931	13,095
Octobre	5,279	23,918
Novembre	4,347	19,268
Décembre	1,790	8,099
TOTAL		77,190

Si l'on ajoute aux $95^{k},670$ d'eau de pluie de la terrasse qui nous ont été fournis les $7^{k},548$ qui ont été jetés par accident, on trouve $103^{k},218$; et si l'on ajoute aux $70^{k},410$ d'eau de la cour les $5^{k},899$ également jetés par accident, on obtient $76^{k},309$. Les deux nombres $103^{k},218$ et $76^{k},309$ ne diffèrent de ceux déduits des mesures des hauteurs $104^{k},877$ et $77^{k},190$ que dans les limites d'erreur provenant d'un mesurage au poids qui est toujours constant, et d'un mesurage au volume qui ne donne pas les mêmes quantités lorsqu'il est effectué à diverses températures.

Pour se faire une juste idée des causes des variations que l'on trouvera dans les doses des matériaux déterminés dans les eaux des pluies de chaque mois, il est nécessaire de connaître les directions des vents qui amènent ces pluies. De pareilles données, rapprochées de l'analyse des eaux de chaque mois, deviendront, nous le pensons, au bout de quelques années, des éléments météorologiques d'une haute valeur. En conséquence, nous avons réuni dans les tableaux suivants tous les renseignements que nous ont fournis sur la question les registres de l'Observatoire.

DATES des jours de pluie.	OBSERVATIONS sur les pluies.	HAUTEURS d'eau tombée mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS sur la direction des vents de pluie.
	MOIS DE JUILLET.			
1	Pluie à 10h 40m matin..... Tonnerre et pluie à 3h 30m soir... Pluie à 9h soir.....	mill. 20,40	mill. 19,00	E. à 10h 40m. S. E. à 3h.
2	Pluie à peu près toute la journée..	3,50	2,40	O.
3	Pluie violente à 10h soir..... Tonnerre à minuit..... Pluie abondante pendant la nuit..	11,67	10,05	N.
8	Quelques gouttes de pluie vers 3h soir	" "	" "	O. N. O.
9	Pluie à partir de 3h..... Pluie dans la nuit du 9 au 10....	2,98	2,91	O.
10	Pluie abondante à 2h soir..... Autre pluie entre 8 et 11h soir...	2,00	2,60	O. S. O. O. N. O.
14	Pluie dans la nuit et vers midi....	2,48	1,60	S. S. O.
15	Pluie dans la soirée.....	" "	" "	O. S. O.
16	Pluie à 4h 5m matin..... Pluie à 2h 30m soir.....	5,35	5,20	E. N. E.
18	Pluie de midi à 2h.....	" "	" "	Vent variant du N. au N. N. O.

DATES des jours de pluie.	OBSERVATIONS sur les pluies.	HAUTEURS d'eau tombée mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS sur la direction des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS DE JUILLET.			
		mill.	mill.	
19	Quelques gouttes de pluie à 4^{h} soir. Quelques gouttes de pluie à 10^{h}30^{m}s.	// //	// //	S.
20	Pluie dans la nuit du 19 au 20...	2,45	2,15	S.
23	Orage dans la nuit du 22 au 23.. Pluie de 1^{h} 30^{m} soir à 4^{h}.....	9,50	9,40	Vent E. à 9^{h} soir le 22 et S. à 9^{h} matin le 23.
24	Pluie à 9^{h} matin.....	// //	// //	S. O.
26	Pluie à 11^{h} matin.....	10,70	9,00	O. N. O.
29	Pluie dans la nuit du 28 au 29.... Pluie et éclairs à 9^{h} soir.....	// //	// //	S. à S. S. O. S. S. O.
30	Pluie dans la nuit du 29 au 30...	13,95	14,95	S. S. O.
	MOIS D'AOÛT.			
1	Pluie dans la nuit du 31 juillet au 1er août.....	0,60	0,50	N. N. O.
7	Pluie et tonnerre à 3^{h} soir..... Pluie très-forte et orage de 4 à 5^{h} soir.	5,00	4,27	N. E. S.

DATES DES JOURS de pluie.	OBSERVATIONS SUR LES PLUIES.	HAUTEURS D'EAU TOMBÉE mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS SUR LA DIRECTION des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS D'AOÛT.			
		mill.	mill.	
15	Pluie dans la nuit du 14 au 15...	1,60	1,50	O.
17	Pluie de $6^h\ 45^m$ soir à 7^h.....	// //	// //	O.
28	Pluie abondante à $7^h\ 30^m$ matin...	15,95	15,80	O. N. O.
	Pluie à 9^h matin.....			O. N. O.
29	Pluie à midi et de 8^h à $8^h\ 50^m$.....	4,65	3,67	N. O.
30	Pluie à 3^h et à $8^h\ 45^m$ soir.....	0,44	0,30	N. O.
	MOIS DE SEPTEMBRE.			
1	Quelques gouttes de pluie à 9^h soir.	// //	// //	O. N. O.
2	Pluie abondante à 9^h matin.....	4,30	4,00	O.
	Pluie continue de midi à 3^h soir..			O.
18	Pluie à 3^h soir.....	11,98	9,00	N.
21	Pluie à 9^h matin.....	3,58	2,98	N. O.

DATES des jours de pluie.	OBSERVATIONS sur les pluies.	HAUTEURS d'eau tombée mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS sur la direction des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS DE SEPTEMBRE.			
22	Quelques gouttes de pluie à 3^h soir. Pluie de 6^h à 8^h 30^m soir.....	mill. 2,46 6,54	mill. 2,05 4,97	N. O. N. O.
26	Petite pluie.....	0,45	0,05	O. S. O.
	MOIS D'OCTOBRE.			
1	Pluie à midi 30^m..... Pluie abondante à 8^h 15^m soir....	// //	// //	S. S. violent.
2	Pluie abondante à 10^h 30^m matin. Pluie à midi.....	// //	// //	S. S. O. S. S. O.
3	Pluie à midi.....	// //	// //	S. O. fort.
4	Pluie abondante à 8^h 30^m matin... Forte pluie de 1^h à 2^h 45^m soir....	35,30	31,32	S. O. — S. S. O.
6	Pluie dans la soirée.....	// //	// //	S. O.
8	Pluie à 10^h 30^m matin.....	2,42	1,97	O.
14	Pluie de 3^h à 5^h.....	// //	// //	S. O.

DATES des jours de pluie.	OBSERVATIONS sur les pluies.	HAUTEURS d'eau tombée mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS sur la direction des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS D'OCTOBRE.			
		mill.	mill.	
15	Pluie à 9^h soir	4,80	4,00	S. S. O.
19	Pluie à 9^h matin	2,27	1,78	S. S. O.
29	Pluie à midi et de 3^h à 8^h 30^m	8,00	6,78	O.
	MOIS DE NOVEMBRE.			
2	Pluie à midi Pluie à 3^h soir	"	"	S. S. O.
3	Pluie à 9^h matin Pluie de 1^h à 3^h soir	"	"	O. N. O. — O.
4	Quelques gouttes de pluie à midi, et pluie continue de 1^h à 3^h soir.	0,05	8,83	S. O.
6	Pluie à 9^h matin, et par intervalles de midi à 3^h	9,40	8,80	O.
7	Pluie dans la nuit du 7 au 8	1,40	1,15	O. — N. O.
10	Pluie dans la matinée	"	"	S.

DATES des jours de pluie.	OBSERVATIONS sur les pluies.	HAUTEURS d'eau tombée mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS sur la direction des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS DE NOVEMBRE.			
		mill.	mill.	
17	Neige dans la nuit du 16 au 17...	// //	// //	N. O.
18	Neige à midi.....	// //	// //	O. N. O.
21	Pluie à 9^{h} soir.....	3,47	2,34	S. O.
24	Neige dans la nuit du 23 au 24... Pluie à 2^{h} et à 8^{h} soir.....	// //	// //	N. — N. O. N. O.
25	Pluie abondante à 3^{h} soir.....	17,15	15,00	S. O.
26	Pluie à 9^{h} matin..... Pluie à 4^{h}	// // 3,00	// // 2,63	S. O.
	MOIS DE DÉCEMBRE.			
5	Petite pluie fine à 9^{h} mat. et 3^{h} soir. Bruine à 10^{h} soir.....	// //	// //	O. O.
6	Pluie fine à midi 10^{m}.....	// //	// //	S. O.
8	Pluie fine de 3^{h} à 11^{h} soir.....	// //	// //	S. O. — O. S. O.

DATES DES JOURS de pluie.	OBSERVATIONS SUR LES PLUIES.	HAUTEURS D'EAU TOMBÉE, mesurées le lendemain matin. Cour.	Terrasse.	OBSERVATIONS SUR LA DIRECTION des vents de pluie.
	SUITE DU MOIS DE DÉCEMBRE.			
		mill.	mill.	
21	Pluie à 9h soir.....	// //	// //	S.
22	Pluie à 9h soir.....	// //	// //	O. S. O. fort.
23	Pluie à 3h soir.....	15,00	14,60	N. N. O.
28	Neige.....	2,90	1,65	N. E.

Comme, durant le semestre qui fait le sujet de ce mémoire, les eaux n'ont pas été recueillies immédiatement après chaque jour de pluie, il est impossible de rapporter exactement à chacun des points de la rose des vents la quantité de pluie qui lui correspond. Cependant les chiffres précédents peuvent servir pour définir la pluie de chaque mois par la direction générale des vents qui l'a principalement apportée. Ainsi, nous trouvons que :

Durant *juillet*, le vent de pluie dominant a été celui du *sud*, car les vents ESE, SSE, S, SSO, OSO, ont apporté ensemble $50^{mill},78$ de pluie sur $81^{mill},27$ qui sont tombés;

Durant *août*, le vent de pluie dominant a été aussi celui du *nord-ouest*, car les vents NNO, NO, ONO, O, ont apporté ensemble $23^{mill},24$ de pluie sur $28^{mill},24$;

Durant *septembre*, le vent de pluie dominant a été celui du *nord-ouest*, car les vents N, NO, ONO, O, ont apporté ensemble $22^{mill},59$ sur $29^{mill},31$;

Durant *octobre*, le vent de pluie dominant a été celui du *sud-ouest*, car les vents S, SSO, SO, ont apporté ensemble $37^{mill},85$ de pluie sur $52^{mill},79$;

Durant *novembre*, le vent de pluie dominant a été celui de l'*ouest*, car les vents SO, O et NO ont apporté ensemble 37 millimètres de pluie sur $43^{mill},47$;

Enfin, durant *décembre*, le vent de pluie dominant a été celui du *nord-est*, car les vents NNO, NE et S ont apporté 12 millimètres sur $17^{mill},90$.

§ VII.

DÉTERMINATION DE L'AZOTE.

Nous avons résolu de doser l'azote contenu dans nos résidus salins principaux par la combustion à l'aide de l'oxyde de cuivre et par la mesure des volumes, afin d'avoir l'azote total renfermé dans ces résidus indépendamment de toute hypothèse sur son mode de combinaison dans les eaux de pluie. Nous dirons seulement que la potasse signalait dans tous les résidus salins, avec une grande facilité, la présence de l'ammoniaque, et que la dissolution du protosulfate de fer dans l'acide sulfurique y décelait également dans tous, sans aucune exception, la présence d'azotates.

Nous avons fait deux dosages sur chaque résidu salin, afin d'éviter toute chance d'erreur, et nous avons pris la moyenne des deux résultats obtenus. Voici les détails de nos expériences :

MOIS auxquels appartiennent LES MATIÈRES ANALYSÉES.		MATIÈRE EMPLOYÉE.	AZOTE TROUVÉ.	PRESSION.
EAUX DE LA TERRASSE.				
		gr.	cc.	mill.
Juillet	I....	0,504	18,0 à + 10°	759,3 à + 16°
	II....	0,349	12,5 à + 11°	764,7 à + 12°
Août	I....	0,670	13,5 à + 09°	751,2 à + 16°
	II....	0,257	5,0 à + 12°	759,6 à + 15°

MOIS auxquels appartiennent DES MATIERES EMPLOYÉES.		MATIÈRE EMPLOYÉE.	AZOTE TROUVÉ.	PRESSION.
SUITE DES EAUX DE LA TERRASSE.				
		gr.	cc.	mill.
Septembre	I....	0,463	13,5 à + 09°	755,8 à + 9°5
	II....	0,348	10,0 à + 12°	757,5 à + 12°5
Octobre	I....	0,588	7,0 à + 09°	756,4 à + 13°
	II....	0,534	6,0 à + 11°	753,2 à + 12°
Novembre	I....	0,701	9,0 à + 11°5	759,8 à + 15°5
	II....	0,714	10,0 à + 11°5	751,0 à + 15°
Décembre	I....	0,614	14,0 à + 11°	758,6 à + 13°
	II....	0,561	12,5 à + 9°	751,7 à + 12°
EAUX DE LA COUR.				
Août	I....	0,670	13,5 à + 9°	751,2 à + 16°
	II....	0,559	10,5 à + 12°	757,3 à + 12°5
Septembre	I....	0,405	12,75 à + 11°5	764,4 à + 16°
	II....	0,304	9,75 à + 11°5	764,7 à + 14°5
Octobre	I....	0,467	14,5 à + 9°	756,3 à + 16°8
	II....	0,592	19,0 à + 10°	758,5 à + 12°
Novembre	I....	0,638	12,5 à + 11°	759,8 à + 17°
	II....	0,675	12,5 à + 12°	752,2 à + 14°
Décembre	I....	0,556	13,0 à + 10°	766,5 à + 13°
	II....	0,677	15,25 à + 8°	758,3 à + 9°5

De tous ces éléments fournis par l'analyse, le calcul déduit, pour la quantité totale d'azote de chaque résidu salin mensuel, tant des eaux de la plate-forme que des eaux de la cour de l'Observatoire, les nombres contenus dans les tableaux suivants :

MOIS.	ANALYSES. I.	ANALYSES. II.	MOYENNES.
EAUX DE LA TERRASSE.			
	gr.	gr.	gr.
Juillet	0,1548	0,1633	0,159
Août	0,0867	0,0839	0,085
Septembre	0,1287	0,1255	0,127
Octobre	0,0522	0,0548	0,054
Novembre	0,0597	0,0641	0,062
Décembre	0,1069	0,1056	0,106
EAUX DE LA COUR.			
Août	0,0816	0,0783	0,080
Septembre	0,1384	0,1408	0,140
Octobre	0,1447	0,1411	0,143
Novembre	0,0776	0,0834	0,081
Décembre	0,0926	0,0919	0,092

L'évaporation à sec des liqueurs acides, après la neutralisation par du bicarbonate de potasse, a été faite en vase clos, en condensant, comme nous l'avons dit, les vapeurs pour évaporer l'eau obtenue avec l'acide chlorhydrique et du bichlorure de platine. Cette modification au procédé que nous avions d'abord employé n'a été introduite que pour les eaux de la cour de décembre, et pour celles de la terrasse de novembre et de décembre. Elle nous a été suggérée parce que, malgré les précautions que nous prenions pour ne pas mettre un excès de bicarbonate de potasse dans la neutralisation des liqueurs acides, nous avions constaté quelquefois, au moment d'arriver à siccité sur un bain-marie à l'eau, une légère odeur ammoniacale. Nous avons voulu dès lors éviter cette cause d'erreur.

Nous avons obtenu les quantités suivantes de chloroplatinate d'ammoniaque :

	Grammes.
Terrasse de novembre	0,203
Terrasse de décembre	0,097
Cour de décembre	0,361

D'où l'on déduit les quantités d'azote suivantes :

	Grammes.
Terrasse de novembre	0,013
Terrasse de décembre	0,006
Cour de décembre	0,023

En neutralisant la liqueur avec précaution avant de l'évaporer jusqu'à siccité, on peut annuler à peu près toute perte d'ammoniaque ; cependant nous aurons toujours soin dans nos recherches subséquentes d'aller retrouver les quantités, si faibles qu'elles soient, qui tendront à s'échapper lors de la dernière concentration.

Nous n'avons pas, dans les eaux des six derniers mois de 1851, fait d'une manière régulière la seconde distillation, sur du carbonate de potasse, des eaux déjà distillées sur de l'acide sulfurique. Nous avons constaté précédemment, en vérifiant nos procédés d'analyse, qu'on retrouverait ainsi quelques milligrammes d'azote échappés à l'état d'acide azotique. Afin de n'enregistrer à l'avenir que les résultats météorologiques aussi parfaits que possible, nous faisons régulièrement les doubles distillations à partir de janvier 1852. Les chiffres contenus dans le présent mémoire ne sont à cet égard que des *minima* qui pourraient être augmentés pour chaque mois de 10 milligrammes d'azote, sans que nous ayons à craindre de dépasser la vérité. Nous ne ferons pas toutefois cette augmentation, afin de ne donner que les résultats déduits *directement* de nos analyses. Nous tenons seulement à faire remarquer que, bien que l'on puisse trouver peut-être que leur grandeur est tout à fait inattendue, les nombres constatés sont *au-dessous de la vérité* et que la limite de l'erreur est de 10 pour 100.

Cela posé, et en tenant compte seulement des rectifications nécessaires pour les petites quantités d'eau qui ne nous ont pas été livrées, quantités qui ne s'élèvent du reste qu'à 7 p. 0/0 des eaux analysées, nous obtenons les chiffres suivants pour représenter l'azote total trouvé dans les eaux de pluie de chaque mois :

AZOTE TOTAL DES EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,177	3,902	4,668
Août	0,094	2,072	10,509
Septembre	0,127	2,800	12,165
Octobre	0,054	1,190	2,660
Novembre	0,084	1,852	4,761
Décembre	0,112	2,469	16,069
Totaux pour six mois	0,648	14,285	50,832
Moyenne			8,472

Si, au lieu de prendre la moyenne des 6 doses mensuelles d'azote contenues dans chaque mètre cube d'eau, on calculait d'après les $0^{g},648$ renfermés dans $103^{k},218$ d'eau de pluie totale, on aurait $6^{g},397$ pour la dose d'azote renfermée dans un mètre cube de toutes les eaux mélangées.

D'un autre côté, s'il était permis de doubler la quantité totale d'azote amené dans le sol tant à l'état d'ammoniaque que d'acide azotique, pour les eaux de pluie d'un semestre, on trouverait $28^{k},570$ sur un hectare pour toute l'année 1851.

AZOTE DES EAUX DE LA COUR.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau.
	gr.	kil.	gr.
Août	0,099	2,182	8,369
Septembre	0,140	3,086	11,725
Octobre	0,151	3,329	6,247
Novembre	0,091	2,006	4,527
Décembre	0,115	2,535	13,956
Totaux par mois	0,596	13,138	44,824
Moyenne			8,965

Si, au lieu de prendre la moyenne des six doses d'azote contenues dans le mètre cube d'eau de chaque mois, on calcule d'après la somme totale de tout l'azote trouvé et d'après les $76^{k},309$ d'eau analysés, on obtient une quantité d'azote représentée par $7^{g},939$ par mètre cube ou par 1,000 kilogrammes d'eau de pluie.

En admettant, d'un autre côté, que l'on puisse passer du chiffre obtenu pour cinq mois pour un hectare à celui que donnerait une année entière, on trouve $31^{k},531$ pour l'azote amené par les eaux de pluie, tant à l'état d'ammoniaque que d'acide azotique, sur un hectare de terrain à la hauteur de la cour de l'Observatoire de Paris.

D'après les chiffres précédents constatés pour les deux udomètres de cet Observatoire, on peut regarder comme parfaitement démontré que les eaux de pluie, celles au moins qui ont traversé l'atmosphère de Paris, ont jeté sur le sol au *minimum* 31 kilogrammes d'azote par hectare. Ce chiffre n'est point exagéré, puisque les expériences qui ont servi à le constater ne sauraient présenter qu'une erreur *en moins* de 10 p. o/o, soit de 3 kilogrammes.

Dans nos recherches commencées sur les eaux de 1852, cette erreur est réduite à 1 p. o/o, et dès lors des comparaisons intéressantes pourront être faites sur les changements que présenteront les eaux suivant les saisons et suivant les lieux. Quant à présent, le résultat obtenu nous paraît toutefois d'une importance que nous essayerons de faire ressortir par quelques rapprochements.

M. Boussingault, en étudiant comparativement six assolements différents sur son domaine de Bechelbroum, a trouvé constamment dans les récoltes un excédant d'azote par rapport à celui introduit par les engrais. Voici les chiffres qui résultent de son travail, qui sert aujourd'hui de base à toutes les supputations de l'agriculture[1] :

[1] *Économie rurale*, t. II, p. 190.

ASSOLEMENTS.	DURÉE DES ASSOLEMENTS.	DANS L'ENGRAIS.	DANS LA RÉCOLTE.	GAIN EN AZOTE EN UN AN sur un hectare.
		kil.	kil.	kil.
N° 1.....	5 ans.....	40,6	50,1	9,5
— 2.....	5 *idem*.....	40,6	50,8	10,2
— 3.....	6 *idem*.....	40,6	58,9	18,4
— 4.....	3 *idem*.....	25,8	29,1	3,3
— 5.....	1 *idem*.....	94,1	137,1	43,0
— 6.....	4 *idem*.....	45,5	76,1	30,6
	TOTAL pour six ans.....			115,0
	GAIN moyen en un an et par hectare.....			19,1

Ne voit-on pas, puisque le chiffre moyen de l'excédant obtenu par M. Boussingault ne s'élève qu'à 19 kilogrammes par an et par hectare, qu'il n'est peut-être pas présomptueux d'admettre que ce gain d'azote a pu être fourni aux récoltes par la pluie qui, à Paris, en 1851, a donné au sol une quantité d'azote qu'on peut estimer à 31 kilogrammes?

Il est certainement évident qu'il doit y avoir une perte des sels ammoniacaux et des nitrates que les eaux de pluie amènent sur le sol. Mais si l'on fait attention que, d'après les chiffres rappelés par M. Boussingault[1] et d'après les expériences de Hales[2], un hectare de choux peut transpirer en 12 heures 20,000 kilogrammes d'eau, et un hectare de houblon 2,440 kilogrammes, on conviendra qu'on doit tenir compte des matières azotées apportées aux récoltes par les eaux de pluie.

D'un autre côté, la théorie des jachères serait éclairée d'un jour nouveau, si l'on connaissait en plusieurs lieux les quantités d'azote données au sol par la pluie durant chaque saison. On sait que le résultat moyen de la jachère en France est une récolte de 10 hectolitres de blé tous les deux ans. Or, cette récolte ne correspond qu'à 19 kilogrammes d'azote. Les pluies ayant pu fournir durant ce temps 60 kilogrammes d'azote, on voit qu'il suffit

[1] *Économie rurale*, t. I, p. 28 et 29.

[2] *Statique des végétaux*, expériences II et IX.

d'admettre que les plantes auront pu utiliser seulement le tiers de l'azote apporté par les pluies pour que les phénomènes de la jachère reçoivent une explication tout à fait plausible. Comme on estime[1] seulement au quart environ de la pluie la quantité d'eau qui sert à l'entretien des rivières et des fleuves, on ne peut élever aucune objection contre la source que nous attribuons aux substances réparatrices de la fertilité du sol. La jachère, en donnant le repos à la terre, lui fournit seulement le moyen d'attendre que les pluies lui apportent les engrais disséminés dans l'atmosphère.

Récemment, MM. Lawes et Gilbert ont publié un mémoire sur les récoltes successives que donne un même terrain constamment ensemencé de céréales et recevant divers engrais[2]; ils ont trouvé que, durant sept années successives, le même sol, qui n'avait reçu la première année et une fois pour toutes que du phosphate et du sulfate de chaux, ainsi que du silicate de potasse, avait continué à fournir des récoltes assez considérables en froment de la manière suivante :

ANNÉES.	GRAIN.	PAILLE.
	kil.	kil.
1844	1,035,4	1,256,4
1845	1,616,5	3,042,3
1846	1,354,0	1,697,3
1847	1,259,8	2,133,7
1848	1,067,9	1,920,5
1849	1,376,5	1,810,6
1850	1,121,8	1,930,8
TOTAUX	8,832,9	13,791,6
MOYENNES	1,261,8	1,970,2

[1] *Cours d'agriculture*, par M. de Gasparin, t. II, p. 270 (2e édition).

[2] *The journal of the Royal agricultural society of England*, t. XII, p. 1; et *Journal d'agriculture pratique*, 3e série, t. IV, p. 167.

Ce fait peut paraître étonnant au premier abord; mais si l'on calcule la quantité d'azote totale enlevée chaque année tant par le grain que par la paille de froment, azote que, d'après les expériences de M. Boussingault, nous supposons être de 1.96 p. o/o dans le grain et de 0.29 p. o/o dans la paille, on verra que nos expériences sur l'eau de pluie peuvent en rendre parfaitement compte. En effet, les récoltes de MM. Lawes et Gilbert contenaient les quantités suivantes d'azote :

ANNÉES.	AZOTE DU GRAIN.	AZOTE DE LA PAILLE.	AZOTE TOTAL.
	kil.	kil.	kil.
1844	20,3	3,6	23,9
1845	30,8	8,8	39,6
1846	26,6	4,9	31,5
1847	24,7	6,2	30,9
1848	21,1	5,6	26,7
1849	27,0	5,2	32,2
1850	22,0	5,6	27,6
TOTAUX	172,5	39,9	212,4
MOYENNES	24,7	5,7	30,4

Si ce sol renfermait une certaine quantité d'azote, ce que les cultivateurs appellent de la *vieille force*, n'est-il pas évident que l'on peut admettre que les 30 kilogrammes d'azote enlevés chaque année moyenne ont été rendus par la pluie, puisque, à Paris, nous avons trouvé dans les eaux météoriques une quantité d'azote s'élevant au delà de ce même chiffre de 30 kilogrammes.

Ce n'est pas que nous voulions prétendre que les résultats de l'analyse des eaux de pluie tombées à l'Observatoire de Paris soient applicables à d'autres contrées. Notre but est seulement de montrer l'importance de la question et de faire voir combien il serait intéressant que des recherches de la nature de celles sur lesquelles nous insistons, fussent faites avec tout le soin désirable en différents lieux. Les agriculteurs admettent que dans les

régions méridionales il faut moins d'engrais que dans les contrées du nord. Cette pensée est exprimée de la manière suivante par M. de Gasparin dans son Cours d'agriculture[1] : « L'atmosphère restitue à la terre une partie des sucs fécondants qu'elle perd par les productions. Cette propriété rend l'usage des engrais de moins en moins indispensable en avançant vers le midi. Ce fait est incontestable. » N'est-il pas, en conséquence, possible, nous dirions volontiers probable, que dans des pays voisins de l'équateur on trouverait, par l'analyse, que les eaux de pluie contiennent des quantités plus considérables d'azote que dans notre climat?

Dans tous les cas, il résulte des analyses rapportées plus haut que l'eau est inégalement chargée de matières azotées selon les divers mois, et que les matières azotées qui sont amenées par les pluies sur un hectare ne sont nullement proportionnelles aux quantités d'eau tombées. Ainsi, en juillet, une hauteur d'eau de $8^{mill},127$ a apporté $3^{k},902$ d'azote, et, en août, une hauteur d'eau de $2^{mill},604$, c'est-à-dire trois fois moindre, a versé sur le sol $2^{k},072$ d'azote, c'est-à-dire une dose seulement moitié moindre. La somme des quantités d'azote des trois mois de juillet, août et septembre, est à celle des trois mois d'octobre, novembre et décembre, comme 8 est à 5.

§ VIII.

DÉTERMINATION DE L'AMMONIAQUE ET DE L'ACIDE AZOTIQUE.

Nous avons déjà dit que les réactifs décelaient avec la plus grande évidence tant de l'ammoniaque que de l'acide azotique dans les résidus salins à l'analyse desquels nous avons ramené l'étude des eaux de pluie. Mais quel est dans l'azote total que nous avons dosé celui qui est à l'état d'ammoniaque et celui qui est à l'état d'acide azotique? Pour résoudre cette question, nous avons soumis à un double dosage d'azote chacun de nos résidus salins à l'aide de la calcination avec de la chaux sodée, en absorbant l'ammoniaque dégagée par de l'acide sulfurique titré et en

[1] T. II, p. 315 (2e édition).

saturant ensuite celui-ci par une dissolution normale de saccharate de chaux, suivant le procédé de M. Péligot. Nous avons ainsi obtenu constamment des quantités d'azote fort inférieures à celles que nous avait fournies la combustion par l'oxyde de cuivre; or, on sait que le procédé de M. Péligot n'indique pas l'azote qui est à l'état d'acide azotique. Une soustraction nous donnera donc ce dernier. Quant à l'azote existant à l'état d'ammoniaque, nous le confondrons avec celui qui peut-être existe dans la très-petite quantité de matière organique indéterminée que l'eau de pluie renferme. Nous n'avons pas trouvé, quant à présent, de procédé susceptible de séparer cette matière organique.

Nous avons vu précédemment, dans le paragraphe V de ce mémoire consacré aux recherches de vérification de nos procédés d'analyse, que de l'azotate de potasse pur ne fournit aucune trace d'azote par la calcination avec la chaux sodée. Aucune portion de l'azote de l'acide azotique ne se transforme en ammoniaque dans les conditions où se fait cette expérience.

Les nouveaux dosages d'azote que nous avons effectués par le procédé de M. Péligot nous ont fourni les résultats suivants :

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.		MATIÈRE EMPLOYÉE.	AZOTE TROUVÉ.
		gr.	gr.
Juillet	I.....	0,572	0,0148
	II.....	0,583	0,0169
Août	I.....	0,558	0,0063
	II.....	0,737	0,0084
Septembre	I.....	0,927	0,0042
	II.....	1,061	0,0042
Octobre	I.....	0,855	0,0042
	II.....	1,236	0,0063
Novembre	I.....	0,694	0,0065
	II.....	0,784	0,0074
Décembre	I.....	0,440	0,0028
	II.....	0,448	0,0028

EAUX DE LA COUR.

MOIS.		MATIÈRE employée.	AZOTE trouvé.
		gr.	gr.
Août	I.....	0,604	0,0042
	II.....	0,858	0,0063
Septembre	I.....	0,734	0,0084
	II.....	0,937	0,0105
Octobre	I.....	0,872	0,0048
	II.....	1,377	0,0072
Novembre	I.....	0,966	0,0046
	II.....	1,095	0,0046
Décembre	I.....	0,546	0,0055
	II.....	0,538	0,0055

De ces expériences nous concluons, en rapportant les quantités trouvées au poids total de chaque résidu salin, les résultats suivants :

MOIS	ANALYSES. I.	ANALYSES. II.	MOYENNES.
DOSAGE DE L'AZOTE DES EAUX DE LA TERRASSE PAR LA CHAUX SODIQUE.			
	gr.	gr.	gr.
Juillet	0,0999	0,1116	0,106
Août	0,0413	0,0417	0,042
Septembre	0,0166	0,0147	0,016
Octobre	0,0182	0,0189	0,019
Novembre	0,0366	0,0369	0,037
Décembre	0,0252	0,0247	0,025
DOSAGE DE L'AZOTE DES EAUX DE LA COUR PAR LA CHAUX SODIQUE.			
Août	0,0253	0,0267	0,026
Septembre	0,0422	0,0413	0,042
Octobre	0,0210	0,0199	0,020
Novembre	0,0183	0,0162	0,017
Décembre	0,0332	0,0337	0,033

En tenant compte de la petite quantité d'azote échappée à l'état de carbonate d'ammoniaque et dosée à l'état de chloroplatinate d'ammoniaque, et en rapportant les résultats trouvés aux quantités totales d'eau de pluie de chaque mois, nous faisons la séparation de l'azote sous ses deux formes, résultat auquel nous voulions arriver.

MOIS.	AZOTE TOTAL.	AZOTE à l'état D'AMMONIAQUE.	AZOTE à l'état D'ACIDE AZOTIQUE.
AZOTE DES EAUX DE LA TERRASSE.			
	gr.	gr.	gr.
Juillet	0,177	0,118	0,059
Août	0,094	0,046	0,048
Septembre	0,127	0,016	0,111
Octobre	0,054	0,018	0,036
Novembre	0,084	0,056	0,028
Décembre	0,112	0,031	0,081
TOTAUX	0,648	0,285	0,363
En rapportant à l'hectare, on trouve:			
	kil.	kil.	kil.
Pour six mois	14,285	6,283	8,002
Pour un an	28,570	12,566	16,004
AZOTE DES EAUX DE LA COUR.			
	gr.	gr.	gr.
Août	0,099	0,032	0,067
Septembre	0,140	0,042	0,098
Octobre	0,151	0,021	0,030
Novembre	0,091	0,019	0,072
Décembre	0,115	0,056	0,059
TOTAUX	0,596	0,170	0,426
En rapportant à l'hectare, on trouve:			
	k.	kil.	kil.
Pour cinq mois	13,138	3,748	9,390
Pour un an	31,531	8,995	22,536

En examinant les chiffres précédents donnés pour chaque mois, on reconnaît que, tandis qu'il y a pour ceux qui représentent l'azote total des eaux de la terrasse et des eaux de la cour une concordance parfaite, à l'exception toutefois du mois d'octobre, qui pour la terrasse paraît un peu faible, cette concordance disparaît pour les nombres qui regardent l'ammoniaque ou l'acide azotique. Nous ne chercherons pas à expliquer ce fait quant à présent. Nous remarquerons toutefois que les récipients métalliques sur lesquels sont reçues les pluies dans les deux udomètres peuvent exercer une influence bien connue pour la transformation de l'acide azotique en ammoniaque, équivalent à équivalent. Mais cette transformation se fait, comme on sait, sans changer en rien la quantité d'azote total. D'un autre côté, on n'a pas encore constaté que la transformation inverse de l'ammoniaque en acide azotique puisse avoir lieu dans de pareilles circonstances. Conséquemment, quand même on voudrait faire jouer un rôle quelconque au fer, au cuivre et au zinc des udomètres, ce rôle ne pourrait infirmer en rien ce fait remarquable d'une dose considérable d'azote apporté à la végétation par les eaux de pluie, et sur cet autre fait qu'une grande portion de cet azote est dans les eaux de pluie, à coup sûr, à l'état d'acide azotique.

Ce dernier fait n'était pas prévu dans l'état actuel de la science; car on admettait que l'acide azotique ne devait se rencontrer que dans les pluies accompagnées d'orages. M. Liebig est même allé plus loin, comme nous l'avons vu, en soutenant que cet acide n'existait dans les pluies orageuses qu'en quantités impondérables. M. Liebig attribuait une forte prépondérance à l'ammoniaque; le contraire résulte de nos recherches. Nous rappellerons seulement, comme nous l'avons dit plus haut, que M. Jones a constaté de son côté la présence de l'acide azotique dans des pluies recueillies en des localités très-éloignées les unes des autres de la Grande-Bretagne, durant janvier 1851. Les deux questions des doses d'ammoniaque et des doses d'acide azotique des pluies doivent donc être étudiées séparément et devenir des éléments météoro-

logiques importants, et rien n'autorise à négliger l'un au détriment de l'autre.

D'après les analyses précédemment rapportées, on calcule les doses d'ammoniaque suivantes pour le second semestre de 1851 :

AMMONIAQUE DES EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,143	3,153	3,771
Août	0,056	1,234	5,631
Septembre	0,019	0,419	1,820
Octobre	0,022	0,485	1,083
Novembre	0,068	1,499	3,855
Décembre	0,038	0,842	5,452
TOTAUX	0,346	7,632	21,612
MOYENNE			3,602

Si, au lieu de prendre la moyenne des six doses obtenues par mètre cube d'eau pour chaque mois, on calcule d'après la dose totale d'ammoniaque contenue dans $103^{k},218$ d'eau, on trouve $3^{g},352$ pour le chiffre de la proportion de ce corps contenue dans le mètre cube moyen d'eau d'un semestre.

Si l'on suppose qu'on puisse, par approximation, doubler la quantité d'ammoniaque tombée en six mois seulement par hectare, afin d'avoir la restitution annuelle ainsi faite au sol, on trouve $15^{k},264$, à la hauteur de la terrasse de l'Observatoire de Paris.

AMMONIAQUE DES EAUX DE LA COUR.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Août	0,038	0,842	3,212
Septembre	0,051	1,124	4,271
Octobre	0,026	0,573	1,076
Novembre	0,023	0,507	1,142
Décembre	0,068	1,499	8,252
TOTAUX	0,206	4,545	17,953
MOYENNE			3,591

Si, au lieu de prendre la moyenne des cinq doses obtenues par mètre cube d'eau pour chaque mois, on calcule d'après la dose totale d'ammoniaque contenue dans $76^{k},309$ d'eau, on trouve $2^{g},700$ pour le chiffre représentant la proportion d'ammoniaque que renferme le mètre cube d'eau moyen.

Si l'on suppose que l'on puisse, par approximation, passer de cinq mois à une année entière, on obtient $10^{k},908$ pour la restitution annuelle ainsi faite au sol par les eaux de pluie à la hauteur de la cour de l'Observatoire de Paris.

L'infériorité relative de la quantité d'ammoniaque que donne le calcul pour les eaux de la cour comparées à celles de la terrasse provient de ce que les eaux du mois de juillet, qui se sont montrées pour la terrasse très-riches en ammoniaque, n'ont pu être analysées pour la cour.

L'influence, sur la végétation, des sels ammoniacaux qui se trouvent dans l'atmosphère a été regardée depuis longtemps comme une chose probable. Voici sur ce point comment s'exprime Théodore de Saussure[1] : « Si l'azote est un être simple, s'il n'est pas un élément de l'eau, on doit être forcé de reconnaître que les

[1] *Recherches chimiques sur la végétation*, p. 207 (1804).

plantes ne se l'assimilent que dans les extraits végétaux et animaux et dans les vapeurs ammoniacales ou d'autres composés solubles dans l'eau qu'elles peuvent absorber dans le sol et dans l'*atmosphère*. On ne peut douter de la présence des vapeurs ammoniacales dans l'atmosphère, lorsqu'on voit que le sulfate d'alumine pur finit par se changer, à l'air libre, en sulfate ammoniacal d'alumine. La supériorité des engrais animaux sur les engrais végétaux ne semble tenir en grande partie qu'à une plus grande proportion d'azote dans les premiers. »

L'opinion de Théodore de Saussure a chaque jour gagné de nouveaux partisans. Cependant la très-petite proportion de carbonate d'ammoniaque que les recherches successives de MM. Gräger, Kemp et Fresenius ont seulement pu mettre en évidence, est devenue, entre les mains de quelques chimistes, un argument contre cette manière de voir. L'analyse régulière d'un certain nombre de pluies devra faire cesser tous les doutes à cet égard. Déjà nos analyses démontrent que dans les eaux il existe assez de composés azotés en dissolution pour n'avoir pas besoin de recourir à l'hypothèse de l'absorption directe de l'azote gazeux de l'air, ou même à celle de l'absorption dans le végétal du gaz azote simplement dissous dans les eaux que la séve charrie dans tous les organes des plantes.

Les chiffres obtenus par MM. Gräger, Kemp et Fresenius sont tellement différents les uns des autres, qu'on a eu recours, pour expliquer les différences constatées, à l'idée que peut-être, dans les réactifs des deux premiers de ces chimistes, il se trouvait à l'avance une certaine quantité d'ammoniaque. Mais il ne nous paraît pas qu'on doive nécessairement rejeter leurs déterminations, à cause de ce doute; car il est très-probable que l'ammoniaque contenue dans l'air doit varier beaucoup, non-seulement d'un lieu à un autre, mais encore avec le temps dans un même lieu.

M. Gräger a fait ses recherches à Mulhouse, pendant quatre journées pluvieuses de mai 1845. M. Kemp a recherché l'ammo-

niaque contenue dans l'air pris à 91 mètres au-dessus de la mer d'Irlande. M. Fresenius a opéré pendant quarante jours d'août et septembre 1848 sur l'air pris sur une hauteur située à l'extrémité de la ville de Wiesbaden. Rien ne peut, *a priori*, porter à penser que ces trois déterminations devaient donner les mêmes résultats. Voici d'ailleurs les 3 chiffres obtenus :

Sur 1 million de kilogrammes d'air,

M. Grāger		333 gr. d'ammoniaque.
M. Kemp		3,880 *idem.*
M. Fresenius	Air diurne	98 *idem.*
	Air nocturne	169 *idem.*
	En moyenne	134 *idem.*

D'après le poids de la couche d'air qui pèse sur un hectare, poids que l'on peut évaluer à 102,600,000 kilogrammes, en admettant la pression uniforme de 760 millimètres de mercure, si l'on suppose d'ailleurs à l'air atmosphérique une composition uniforme, on calcule que l'air situé au-dessus d'un hectare contiendrait les quantités suivantes d'ammoniaque :

		kil.
D'après les analyses de M. Grāger		34,2
——— de M. Kemp		398,1
——— de M. Fresenius	Jour	10,1
	Nuit	17,3
	En moyenne	13,7

M. Fresenius[1] pense que l'on peut expliquer la plus grande richesse en ammoniaque de l'air nocturne « par les phénomènes qu'offre la nutrition des plantes et par cette circonstance que l'ammoniaque qui s'accumule dans l'air pendant le jour et pendant la nuit est dissous, puis précipité par la rosée au lever du soleil. »

Les chiffres précédents sont beaucoup plus considérables qu'il n'est nécessaire pour rendre compte des quantités d'ammoniaque que la pluie ramène sur le sol, d'après nos analyses. Mais il faut remarquer que les analyses de MM. Grāger, Kemp et Fresenius

[1] *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. XXVI, p. 214.

n'ont porté que sur de l'air en contact avec la terre; or, il n'est pas démontré que la dose d'ammoniaque n'y est pas plus forte que dans les hautes régions atmosphériques.

Mais quelle est la cause de la présence tant de l'ammoniaque que de l'acide azotique dans les eaux de pluie? Nous nous rangeons volontiers sur ce sujet à l'opinion de M. Boussingault[1]. « La supposition la plus vraisemblable, dans l'état actuel de la science, dit ce savant chimiste et agriculteur, est de considérer comme l'origine des substances azotées des végétaux, et par suite des animaux, soit les vapeurs ammoniacales de l'atmosphère, soit l'ammoniaque formée aux dépens de l'azote de l'air, pendant la combustion lente des matières hydrogénées. Une des conséquences de cette supposition, c'est d'admettre que le carbonate d'ammoniaque préexistait déjà dans l'atmosphère avant l'apparition des êtres vivants sur le globe. Le phénomène de la constance des orages tend à justifier cette opinion. On sait, en effet, que toutes les fois qu'une série d'étincelles électriques passe dans de l'air humide, il y a production et combinaison d'acide nitrique et d'ammoniaque; le nitrate d'ammoniaque accompagne d'ailleurs constamment l'eau des pluies d'orage; mais ce nitrate, étant fixe de sa nature, ne saurait se maintenir à l'état de vapeur : c'est d'ailleurs du carbonate ammoniacal que l'on a signalé dans l'air. En rappelant les réactions que j'ai fait connaître, on conçoit aisément que l'ammoniaque du nitrate amenée sur la terre par la pluie, mise en contact avec les roches calcaires, se volatilise ensuite à l'état de carbonate lors de la prochaine dessiccation du sol. Ainsi, en définitive, ce serait une action électrique, la foudre, qui disposerait le gaz azote de l'atmosphère à s'assimiler aux êtres organisés. En Europe, où les orages sont rares, on accordera peut-être difficilement autant d'importance à l'électricité des nuages. Cependant, en négligeant ce qui se passe en dehors des tropiques, en considérant uniquement la zone équinoxiale, il est

[1] *Annales de chimie et de physique*, t. LXXI (1839); et *Économie rurale*, 2e édit., t. II, p. 725.

possible de prouver que, pendant l'année entière, tous les jours, probablement à tous les instants, il se fait dans l'air une continuité de décharges électriques. Un observateur placé à l'équateur, s'il était doué d'organes assez sensibles, y entendrait continuellement le bruit du tonnerre. »

La présence de l'acide azotique dans les eaux de chacun des six mois que nous avons analysées ne saurait être un argument contre l'hypothèse que cet acide ait une origine électrique. Avant de se résoudre en nuages, puis en pluie, la vapeur d'eau a parcouru des régions atmosphériques assez diverses pour qu'on puisse admettre que la zone équinoxiale, foyer constant de production d'acide azotique, exerce de l'influence sur les eaux qui tombent en tous lieux.

D'après le tableau des directions des vents de chaque pluie des six derniers mois de 1851, que nous avons donné précédemment, il n'y a pas lieu de s'étonner de ce que nous avons toujours trouvé de l'acide azotique dans les eaux de pluie mensuelles, puisque tous les mois il est tombé de la pluie par les vents du sud et du sud-ouest. Il y aurait à voir, par l'analyse des eaux de pluie de différents climats, et, dans un même lieu, en séparant les pluies suivant la rose des vents, si réellement les contrées méridionales, où les orages sont plus fréquents, fournissent une plus grande quantité d'acide azotique. Peut-être aussi la présence d'une grande ville, présentant un grand nombre de foyers en ignition constante, peut exercer de l'influence sur les matériaux dissous dans les eaux de pluie. Des expériences comparatives peuvent seules résoudre toutes les questions que ce sujet soulève, non-seulement au point de vue agricole ou météorologique pur, mais encore au point de vue de l'hygiène publique.

Les quantités d'acide azotique anhydre ou réel que nous avons trouvées durant le second semestre de 1851 dans les eaux de pluie de chaque mois sont ainsi réparties :

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,228	5,026	6,012
Août	0,185	4,078	18,604
Septembre	0,428	9,435	40,996
Octobre	0,139	3,064	6,847
Novembre	0,108	2,381	6,121
Décembre	0,312	6,879	44,763
TOTAUX	1,400	30,863	123,343
MOYENNE			20,557

En admettant qu'il soit possible de passer de six mois seulement à une année, on obtiendra $61^{k},726$ pour représenter la quantité d'acide azotique réel versé sur un hectare de terre en un an, à la hauteur de la plate-forme de l'Observatoire de Paris.

Si, au lieu de prendre la moyenne des six doses contenues dans le mètre cube d'eau de chaque mois, nous rapportons toute la quantité d'acide azotique trouvée pour six mois à l'eau totale recueillie, nous obtenons $13^{g},563$ pour représenter la quantité d'acide azotique existant dans le mètre cube d'eau moyen.

EAUX DE LA COUR.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Août	0,258	5,687	21,811
Septembre	0,378	8,333	31,658
Octobre	0,116	2,557	4,799
Novembre	0,278	6,129	13,860
Décembre	0,228	5,026	27,669
TOTAUX	1,258	27,732	99,797
MOYENNE			19,959

En admettant qu'il soit possible de passer de cinq mois seulement à une année entière, on obtiendra $74^{k},071$ pour représenter la quantité d'acide azotique réel versé sur un hectare en un an, à la hauteur de la cour de l'Observatoire de Paris.

Si, au lieu de prendre la moyenne des cinq doses contenues dans le mètre cube d'eau de chaque mois, nous rapportons toute la quantité d'acide azotique trouvée pour cinq mois à l'eau totale recueillie, nous obtenons $16^{g},297$ pour représenter la quantité d'acide azotique existant dans le mètre cube d'eau moyen.

Il serait, selon nous, prématuré de chercher à discuter, pour l'acide azotique aussi bien que pour l'ammoniaque, les variations mensuelles que nous avons constatées; nous voulons poursuivre nos expériences durant plusieurs années, afin de faire disparaître toutes les influences accidentelles. Mais, dès à présent, un fait d'une haute importance est démontré : c'est la quantité considérable de l'acide azotique déterminée ci-dessus. Les nombres que nous donnons sont des *minima*, différant peu de la vérité. Ils sont peut-être de nature à ramener l'attention sur le rôle que cet acide joue sans doute dans un grand nombre de phénomènes encore très-obscurs; nous voulons parler de la nitrification.

Tout le monde connaît les expériences faites par Cavendish et décrites dans un mémoire lu, en 1784, à la Société royale de Londres. Cet illustre savant a fait voir que, si l'on ajoute à de l'air atmosphérique assez d'oxygène pour porter sa proportion du 1/5 aux 3/7, qu'on introduise le mélange dans un appareil convenable, et qu'on tire un grand nombre d'étincelles électriques à travers le gaz, on observe à chaque étincelle une très-petite diminution dans le volume des deux gaz. En continuant longtemps l'expérience, on parvient à absorber complétement les deux gaz dans de l'eau de chaux ou une dissolution de potasse, et on obtient de l'azotate de chaux ou de l'azotate de potasse. Cavendish et Lavoisier ont aussi obtenu de l'acide azotique en brûlant de l'hydrogène avec de l'oxygène mélangé d'azote. Plus récemment,

M. Kulhmann[1] a fait voir que l'ammoniaque se transforme en acide azotique au contact de l'oxygène et de l'éponge de platine, à une température de 300 degrés. Des faits bien positifs démontrent donc que l'existence de l'acide azotique dans l'atmosphère n'a rien qui doive étonner.

Mais les quantités d'acide contenues dans l'air ont-elles quelque influence sur la production naturelle des azotates, non pas dans les lieux bas et habités, où des matières animales jouent certainement un rôle, mais dans quelques localités où les efflorescences salpêtrées se rencontrent d'une manière aussi curieuse qu'inexpliquée jusqu'à ce jour. Quand on parcourt la belle collection de mémoires publiés par l'Académie des sciences à l'occasion du concours ouvert en 1775 pour un prix proposé sur la formation du salpêtre[2], on reconnaît que, dans l'opinion de Lavoisier, les matières animales n'auront une action bien nette que dans la formation de l'azotate de potasse, mais que l'azotate de chaux se produit dans des terrains crayeux, à la surface qui est en contact avec l'air, sans qu'il y ait des matières organiques en quantité bien appréciable. Lavoisier dit expressément que « le tuffeau de la Touraine étant une pierre fort poreuse, fort susceptible d'imbiber l'humidité, d'être pénétrée jusqu'à un *certain point par l'air et par les substances gazeuses qu'il charrie,* elle réunit toutes les circonstances favorables *à la formation du salpêtre* terreux. » Dans un mémoire qui suit celui de Lavoisier et Clouet, sur les terres naturellement salpêtrées existantes en France, le duc de la Rochefoucauld, en parlant de la génération du salpêtre dans la craie des environs de la Roche-Guyon, regarde comme très-probable « que l'action seule de l'air suffit pour imprégner la craie d'acide nitreux, et que l'état de division de la craie favorise cette imprégnation; que l'action de l'air augmente aussi sensiblement la quantité d'acide marin que contenait la craie, et vraisemblablement aussi la quantité d'acide vitriolique : peut-être, pour déterminer

[1] *Expériences chimiques et agronomiques*, p. 19.
[2] *Mémoires des Savants étrangers*, t. XI, 1786.

ces faits avec toute l'exactitude que mérite leur importance, serait-il bon de répéter ces expériences à différentes élévations et d'y joindre des observations sur l'état de l'air ambiant. »

Dans la description que le docteur John Davy donne des nombreuses grottes salpêtrées de l'île de Ceylan, ce savant attribue[1] la production du nitre à la décomposition du feldspath contenu dans une roche calcaire et magnésienne et à l'action de l'oxygène et de l'azote de l'air. Ces derniers se combineraient sous des influences encore inexpliquées et donneraient de l'acide azotique qui se combinerait à son tour avec la potasse, la chaux et la magnésie. Dans les analyses que John Davy donne des roches salpêtrées, il n'y en a qu'une qui indique la présence de matières animales. Aussi Davy réfute-t-il énergiquement l'opinion de ceux qui veulent absolument que la production du nitre soit due à la présence de ces matières. L'humidité et l'action de l'air, tels sont, selon lui, les agents qui produisent du nitre dans un mélange convenable de terres alcalines.

Si les pluies contiennent constamment de l'azotate d'ammoniaque, si les quantités qu'on y rencontre sont plus considérables en de certains lieux, il n'est peut-être pas téméraire de penser que cet azotate d'ammoniaque serait pour quelque chose dans la formation de quelques nitrières. Tous les observateurs sont d'accord sur ce fait, que ce n'est qu'à la surface des terrains contenant des carbonates de potasse, soude, chaux, magnésie, que la présence du nitre se manifeste. L'azotate d'ammoniaque des pluies, en arrivant en contact avec ces carbonates dans des lieux où l'eau ne séjourne pas, mais suffisamment humides, doit donner lieu à une double décomposition d'où résultent des azotates de potasse, soude, chaux, magnésie, et du carbonate d'ammoniaque qui se produit à cause de sa volatilité. Cette réaction est conforme aux lois générales de la chimie; et sans rien affirmer absolument, il est peut-être permis d'incliner à croire qu'il n'y a rien d'impossible à ce qu'elle se produise dans plusieurs nitrières naturelles.

[1] *Travels in Ceylon*, p. 31.

§ IX.

DÉTERMINATION DU CHLORE.

Pour déterminer la quantité de chlore existant dans les eaux de pluie, nous avons pris 500 milligrammes de chacun des résidus salins obtenus comme il a été dit précédemment, et nous les avons dissous dans l'eau pure. Une portion de la matière qui ne s'est pas dissoute a été séparée de la liqueur par la filtration. Cette liqueur a été ensuite acidulée avec de l'acide azotique, et à l'aide d'une dissolution titrée d'azotate d'argent contenant un milligramme d'argent par centimètre cube, nous avons pu arriver, avec une grande précision, à doser le chlore des chlorures de nos eaux de pluie. Nous avons obtenu les résultats suivants :

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,147	3,240	3,876
Août	0,029	0,641	2,916
Septembre	0,029	0,641	2,777
Octobre	0,044	0,970	2,167
Novembre	0,043	0,948	2,437
Décembre	// //	// //	// //
TOTAUX	0,292	6,440	14,173
MOYENNE			2,362

En doublant pour passer, par approximation, de six mois à une année entière, on trouverait $12^{k},880$ de chlore apportés par les pluies sur un hectare.

En rapportant tout le chlore trouvé à toute l'eau recueillie, au lieu de prendre la moyenne des six doses ci-dessus, on obtient $2^{g},829$ de chlore par mètre cube d'eau moyen.

EAUX DE LA COUR.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Août	0,034	0,749	2,874
Septembre	0,024	0,529	2,010
Octobre	0,036	0,793	1,489
Novembre	0,057	1,256	2,831
Décembre	"	"	"
TOTAUX	0,151	3,327	9,204
MOYENNE			1,841

En passant par une proportion de cinq mois à une année entière, on trouve le chiffre approximatif de $7^{k},985$ pour représenter le chlore apporté par les pluies sur un hectare.

En rapportant tout le chlore trouvé à toute l'eau recueillie, au lieu de prendre la moyenne des cinq doses ci-dessus, on obtient $1^{g},956$ de chlore par mètre cube d'eau moyen.

Un fait remarquable s'est présenté dans nos recherches, c'est l'absence du chlore dans les eaux de pluie de décembre, tant de la cour que de la plate-forme de l'Observatoire. Il est peut-être permis d'attribuer cette circonstance au peu d'influence qu'ont eue sur les pluies de ce mois les vents venant de l'ouest.

Il y aurait lieu de rechercher à quel état se trouve le chlore dans les eaux de pluie. On sait toute la difficulté que présente le problème d'attribuer, dans un mélange, à telle ou telle base tel ou tel acide. Cette difficulté est bien plus grande lorsque l'exiguïté des quantités de matières sur lesquelles on peut opérer limite le nombre des expériences. La nécessité de faire avec un soin extrême les recherches que nous avons précédemment décrites sur l'azote, et de répéter plusieurs fois nos analyses sur un point que nous regardions comme capital, nous a d'ailleurs empêché de conserver

assez de matière pour que nous pussions doser la soude. Mais, quoiqu'il y ait certainement dans les eaux de pluie une portion de chlore à l'état de chlorure de calcium et de chlorure de magnésium, nous pouvons, par une approximation qu'a faite sur ce point M. Isidore Pierre dans les analyses que nous avons citées précédemment, admettre que tout le chlore était à l'état de chlorure de sodium, afin de rechercher combien au maximum il peut se rencontrer de sel marin dans les eaux de pluie à Paris. Le calcul nous donne les résultats suivants :

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,242	5,339	6,387
Août	0,048	1,056	4,806
Septembre	0,048	1,056	4,576
Octobre	0,073	1,599	3,571
Novembre	0,071	1,562	4,016
Décembre	// //	// //	// //
TOTAUX	0,482	10,612	23,356
MOYENNE			3,726

En doublant pour passer de six mois à une année entière, on trouve le chiffre approximatif de $21^{k},224$ pour représenter le sel marin apporté par les pluies sur un hectare à la hauteur de la plate-forme de l'Observatoire de Paris.

En rapportant tout le sel trouvé à toute l'eau recueillie, on obtient $4^{g},662$ de sel par mètre cube d'eau moyen.

EAUX DE LA COUR.

MOIS.	SUR L'UDOMÈTRE.	PAR HECTARE.	PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Août	0,056	1,234	4,736
Septembre	0,039	0,872	3,313
Octobre	0,059	1,307	2,454
Novembre	0,094	2,070	4,665
Décembre	" "	" "	" "
Totaux	0,257	5,483	15,168
Moyenne			3,036

En passant par une proportion de cinq mois à une année entière, on trouve le chiffre approximatif de $13^{k},159$ de sel apporté par les pluies sur un hectare.

En rapportant tout le sel trouvé à toute l'eau recueillie, au lieu de prendre la moyenne des cinq doses ci-dessus, on obtient $3^{g},223$ de sel par mètre cube d'eau moyen.

Les deux nombres obtenus par mètre cube d'eau moyen,

	gr.
Pour la terrasse	4,662
Pour la cour	3,223
Fournissent une moyenne de	3,942

Ce nombre est très-inférieur à celui de 133 grammes trouvé par Dalton dans les eaux de pluie de Manchester, mais il se rapproche beaucoup de celui de $5^{g},768$ obtenu par M. Isidore Pierre pour les eaux de pluie de Caen. L'éloignement de Paris des bords de la mer explique suffisamment la différence que nous trouvons pour que nous n'ayons pas besoin d'insister à cet égard. Le chiffre par nous obtenu devait être nécessairement plus faible que celui constaté beaucoup plus près de l'Océan.

Il y a bien longtemps que l'on a signalé l'influence des pluies sur l'état de salure des rivières et même sur les récoltes. Nous n'en citerons comme exemple que ce qu'en a dit Pline : « Les pluies même font changer le goût des eaux de quelques rivières. Il est arrivé trois fois, au Bosphore, que des pluies salées ont fait mourir les céréales; trois fois aussi les pluies ont répandu sur les champs arrosés par le Nil une amertume qui a causé un désastre en Égypte[1]. »

Mais si de pareils accidents constatés non loin de la mer sont regardés comme naturels par tout le monde, quelques personnes n'accepteront peut-être pas sans contestation la possibilité du transport de particules salines à plus de 160 kilomètres dans l'intérieur des terres. Aussi rappellerons-nous quelques faits de nature à faire évanouir toutes les objections. Dans les Annales de chimie et de physique[2], nous trouvons la note suivante : *Sur la distance à laquelle les ouragans transportent les molécules salines de la mer.* « Le 5 septembre 1821, il s'éleva vers midi, à Newhaven (Amérique), une tempête du sud-est qui alla toujours en augmentant, et acquit, à la tombée de la nuit, une violence extraordinaire. Le lendemain matin, les fenêtres de la ville étaient couvertes de sel, les feuilles des arbres situées du côté du vent tombèrent desséchées en peu d'heures. A Hébron, distant de 30 milles (40 kilomètres environ) de la côte, les feuilles de tous les végétaux, le matin du 4 septembre, étaient salées. On assure même avoir fait cette remarque à Northampton, qui est placé à 60 milles (80 kilomètres) dans les terres. »

Dans le même recueil, nous lisons encore une note ainsi conçue[3] : *Transport de poussières à de grandes distances par le vent.* « Le 19 janvier 1825, dans la nuit, le vaisseau anglais *le Clyde*

[1] « Aliqui vero et imbre mutantur amnes. Ter accidit in Bosporo, ut salsi deciderent, necarentque frumenta : toties et Nili rigua pluviæ amara fuere, magna pestilentia Ægypti. » (Lib. XXXI, cap. XXIX.)

[2] 2e série, t. XX, p. 101 (1822).

[3] T. XXX, p. 430.

faisait route du sud au nord, en face de la partie de la côte d'Afrique comprise entre la rivière Gambie et le cap Vert, mais à une distance de cette côte qui surpassait 200 lieues; le matin, l'équipage fut fort surpris de trouver que les voiles étaient couvertes d'un sable de couleur brune et composé de parties très-fines. Le vent avait soufflé avec assez de force, la nuit précédente, dans les directions comprises entre le N E. et l'E. »

« Le journal auquel nous empruntons ce fait, remarque M. Arago, qui a inséré cette note dans les Annales, ne dit pas si le sable a été recueilli et analysé chimiquement. » — M. Arago ajoute ensuite : « Voici quelques détails relatifs à un phénomène analogue; ils m'ont été communiqués par M. Schabelski, voyageur russe extrêmement distingué :

« Lorsque le bâtiment se trouvait par 23 degrés de latitude nord et 21°,20′ de longitude ouest de Greenwich, nous fûmes témoins d'un phénomène très-remarquable : le matin du 22 janvier 1822 (nous étions alors à 275 milles nautiques (370 kilom.) des côtes de l'Afrique), nous aperçûmes que tous les cordages du navire étaient couverts d'une matière pulvérulente dont la couleur rougeâtre approchait de celle de l'ocre. Ces cordages, vus au microscope, offraient de longues files de globules qui semblaient se toucher. Les seules parties qui avaient été exposées à l'action du vent du nord-est présentaient ce phénomène; il n'y avait aucune trace de poussière sur les faces opposées. La poussière en question était très-douce au toucher et colorait la peau en rouge. »

Ainsi le transport de particules salines et de poussières de diverses natures à de grandes distances est un phénomène qui ne peut être révoqué en doute, et Leuwenhoek, en Hollande, et Falber, dans le Sussex, avaient fait, dès 1703, de justes remarques en disant que le vent devait porter au loin les sels de la mer.

Au point de vue de la nutrition des plantes, ce transport a une grande importance; car les chiffres que nous avons donnés précédemment démontrent que les quantités de chlorure de sodium ainsi fournies aux récoltes sont loin d'être négligeables. Ces quan-

tités peuvent rendre compte de la soude et du chlore que l'on trouve dans les récoltes, lors même que l'analyse n'indique pas dans le sol des traces perceptibles de ces substances. S'il est vrai, comme semblent l'indiquer les très-curieuses expériences de M. le prince de Salm-Hortsmar sur la végétation de l'avoine[1], que le chlore et la soude jouent un rôle déterminant dans la fructification, on comprendra toute l'importance que les pluies venues à propos doivent avoir sous ce rapport en agriculture.

§ X.

DE L'IODE, DE LA POTASSE, DE L'ACIDE SULFURIQUE, DE LA MATIÈRE ORGANIQUE DES EAUX DE PLUIE.

La présence de l'iode signalée dans les eaux de pluie par MM. Chatin et Marchand, comme nous l'avons dit plus haut, a attiré notre attention. Nous avons constaté que ce corps s'échappait dans la distillation de l'eau de pluie avec l'acide sulfurique, qu'on en retrouvait des traces en distillant de nouveau les eaux avec du carbonate de potasse. Mais tous les procédés connus jusqu'à présent ne nous ont pas rendu les quantités que nous introduisions directement dans les eaux avec une exactitude qui permette de comparer les résultats obtenus. Il nous a été démontré qu'on ne peut pas répondre d'une fraction de milligramme d'iode dans les eaux d'un mois, et la quantité qui y existe ne paraît pas même s'élever à ce chiffre.

La recherche de la potasse, dont l'existence dans les eaux de pluie a été indiquée par les uns, mais aussi a été contestée par les autres, ne nous a pas paru pouvoir être entreprise par nos procédés analytiques. Le verre des vases récipients et des cornues de distillation cède des quantités de cet alcali tout à fait comparables à celles que l'on retrouve par l'analyse. Dans de pareilles conditions, alors que nous ne pouvions monter des appareils complétement en platine ou en autre métal suffisamment inattaquable, nous n'avons pas cru devoir consacrer à une recherche

[1] *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. XXXII, p. 461.

qui a toujours laissé des doutes une portion de la petite quantité de matière que nous pouvions soumettre à nos opérations analytiques.

Quant à l'acide sulfurique, nous n'avons pas essayé non plus de le doser. Il nous eût fallu distraire dans ce but une portion des eaux qui nous étaient livrées, et diminuer la probabilité du succès de nos investigations sur des substances plus importantes à connaître dans l'état actuel de la science. Dans les années qui vont suivre, et pour lesquelles nous avons l'intention de continuer notre travail, nous serons en mesure de combler cette lacune.

Nous n'avons pas essayé de doser la matière organique contenue dans les eaux de pluie, matière signalée par Zimmermann et Brandes, comme nous l'avons dit dans l'historique qui est à la tête de ce mémoire. Cette matière est complexe; Brandes la regardait comme formée de mucus, de résine et d'une matière végéto-animale. Nous avons pensé que nous devions d'abord chercher à l'isoler et à en étudier les propriétés, avant d'essayer des dosages, qui laisseraient trop à désirer.

§ XI.

DÉTERMINATION DE LA CHAUX.

Tous les résidus salins que nous avons obtenus contenaient de la chaux en quantités notables. Pour doser cette base, nous avons précipité par du chlorure de sodium les traces d'argent existant dans les liqueurs qui nous avaient servi à doser le chlore; nous avons ensuite ajouté aux liqueurs filtrées du chlorhydrate d'ammoniaque, de l'ammoniaque et enfin de l'oxalate d'ammoniaque. Ce dernier sel a produit des précipités qui ont été recueillis sur des filtres, puis ces filtres ont été incinérés, et la chaux a été pesée à l'état de carbonate. Nous sommes arrivé aux résultats suivants :

EAUX DE LA TERRASSE.

MOIS.	CHAUX DE L'EAU de l'udomètre.	CHAUX PAR HECTARE.	CHAUX PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	kil.	gr.
Juillet	0,342	7,539	9,019
Août	0,071	1,565	7,139
Septembre	0 041	0,903	3,927
Octobre	0,066	1,454	3,251
Novembre	0,069	1,521	3,910
Décembre	0,062	1,367	8,898
TOTAUX	0,651	14,349	36,144
MOYENNE			6,024

En doublant pour passer de six mois à une année entière, on trouve $28^{k},698$ pour représenter la quantité de chaux apportée par les pluies sur un hectare de terrain.

En rapportant toute la chaux trouvée à toute l'eau recueillie, on obtient $6^{g},307$ par mètre cube d'eau moyen.

EAUX DE LA COUR.

MOIS.	CHAUX DE L'EAU de l'udomètre.	CHAUX PAR HECTARE.	CHAUX PAR MÈTRE CUBE d'eau de pluie.
	gr.	l.	gr.
Août	0,121	2,667	10,228
Septembre	0,124	2,732	10,385
Octobre	0,039	0,859	1,613
Novembre	0,093	2,050	4,620
Décembre	0,048	1,082	5,825
TOTAUX	0,425	9,390	32,671
MOYENNE			6,534

En passant, par une proportion, de cinq mois à une année entière, on trouve $22^{k},536$ de chaux apportée par les pluies sur un hectare de terrain.

En rapportant toute la chaux trouvée à toute l'eau recueillie, on obtient $5^{g},506$ par mètre cube d'eau moyen.

La moyenne des deux déterminations de la chaux des eaux de la plate-forme et de la cour de l'Observatoire donne $5^{g},906$. Ce nombre est plus considérable que celui de $2^{g},6$ trouvé par M. Isidore Pierre pour les eaux de pluie recueillies à Caen en mars 1851. Faut-il attribuer la différence obtenue à la différence des époques, ou bien le bassin calcaire au centre duquel se trouve Paris exerce-t-il une influence sur le phénomène? La suite de nos recherches pourra seule résoudre cette question, que nous ne faisons que poser aujourd'hui.

§ XII.

DÉTERMINATION DE LA MAGNÉSIE.

Les liqueurs qui ont fourni la chaux ont été évaporées jusqu'à siccité; alors on leur a ajouté un peu de carbonate de soude, et l'on a chauffé le résidu salin au rouge sombre. En prenant la matière saline par l'eau, on a eu un dépôt de magnésie, qui a été recueilli sur un filtre; le filtre a été incinéré, et la magnésie a été dosée à l'état de carbonate. Les opérations ont fourni les résultats suivants, rapportés au poids total de chacun de nos résidus salins :

MOIS.	EAUX DE LA TERRASSE.	EAUX DE LA COUR.
	gr.	gr.
Juillet	0,016	" "
Août	0,013	0,013
Septembre	0,009	0,011
Octobre	0,009	0,012
Novembre	0,017	0,015
Décembre	0,008	0,009
TOTAUX	0,072	0,060

Mais la matière insoluble dans l'eau que nous avons obtenue, comme nous l'avons dit précédemment en parlant de la détermination du chlore, se trouvait composée de matière organique, d'un peu de carbonate de zinc, d'un peu de phosphate ammoniaco-magnésien, et de phosphates de fer et de cuivre. Chacun des filtres qui avaient recueilli les matières insolubles ayant été incinéré, nous avons obtenu, en effet, les cendres du filtre réduites, des résidus pesant les poids suivants :

MOIS.	EAUX DE LA TERRASSE.	EAUX DE LA COUR.
	gr.	gr.
Juillet	0,015	// //
Août	0,020	0,026
Septembre	0,022	0,017
Octobre	0,036	0,053
Novembre	0,018	0,028
Décembre	0,009	0,008
TOTAUX	0,120	0,132
TOTAL GÉNÉRAL	gr. 0,252	

Or, une quantité égale à $0^g,097$ de l'ensemble de tous ces résidus mélangés ayant été traitée par l'acide azotique, puis par l'ammoniaque et le succinate d'ammoniaque, a fourni une belle coloration bleue à cause du cuivre, puis un précipité de succinate de fer. On a alors ajouté un peu de sulfhydrate d'ammoniaque pour précipiter le zinc et le cuivre. Après la filtration, la liqueur, évaporée avec du carbonate de soude, a fourni un poids de $0^g,027$ de carbonate de magnésie, correspondant à $0^g,013$ de magnésie, soit pour la totalité $0^g,252$, une quantité de magnésie égale à $0^g,033$. Cette quantité de magnésie existant dans $5^g,500$ des résidus salins, et ceux-ci pesant en tout $41^g,081$, on voit qu'en totalité nous retrouvons ainsi $0^g,246$ de magnésie que nous par-

tageons dans le rapport de 6 à 5, de manière à reporter $0^{g},1134$ sur la terrasse et $0^{g},1113$ sur la cour. Nous avons alors pour la magnésie :

		Par hectare.	Par mètre cube.
Terrasse (6 mois).	$0^{g},206$	$4^{k},541$	$2^{g},000$
Cour (5 mois)....	0,173	3,813	2,240

La présence du fer, du cuivre et du zinc n'a rien qui doive surprendre, et il est impossible d'en tirer aucune conséquence, puisque les cuvettes des udomètres de l'Observatoire sont en fer, et les tuyaux de déversement ainsi que les réservoirs, en cuivre. Quant à la présence de l'acide phosphorique, elle n'a pas encore été signalée dans l'eau de pluie; comme nous n'avions plus assez de matière pour faire quantitativement un dosage très-délicat, nous nous sommes contenté de constater la présence de ce corps, sauf à prendre à l'avenir des mesures pour le déterminer.

§ XIII.

CONCLUSIONS.

Les recherches qui sont détaillées dans ce mémoire ne résolvent pas encore toutes les questions que l'on peut poser sur la composition des matières contenues dans les eaux de pluie d'un même lieu. En les continuant, on verra comment ces matières se modifient avec les saisons et avec les vents régnants. Ainsi, on pourra déterminer une partie du rôle que les pluies doivent jouer dans les phénomènes géologiques qui se passent dans l'écorce de notre globe. La comparaison des résultats obtenus à Paris avec ceux que donneront des expériences faites en d'autres localités, mettra sur la voie de l'explication de beaucoup de faits obscurs.

L'atmosphère peut être considérée comme un vaste laboratoire encore inexploré. L'analyse des eaux de pluie est un moyen de se rendre compte d'une partie des phénomènes qui s'y produisent et qui doivent exercer une si grande influence sur la vie de tous les êtres végétaux ou animaux qui peuplent la surface de la terre.

En attendant de nouvelles expériences, un fait nous semble bien constaté, c'est la présence dans les eaux de pluie de grandes quantités d'azote, tant à l'état d'ammoniaque qu'à l'état d'acide azotique. Cet azote, rapporté par les pluies sur le sol de nos champs cultivés, rend compte d'un grand nombre de faits agricoles de la plus haute importance. La jachère devient une pratique rationnelle. Le moins d'importance des engrais dans les contrées méridionales s'explique parfaitement, et peut-être certains cas de nitrification naturelle cessent de rester relégués parmi les phénomènes dont l'obscurité n'est pas diminuée quand on les attribue à une *force catalytique*.

Mais il est nécessaire que notre travail soit continué pour lever tous les doutes; nous tâcherons de ne pas rester au-dessous de l'engagement que nous contractons de le poursuivre, et de perfectionner nos méthodes d'investigation, en demandant à l'Académie de vouloir bien juger ce mémoire comme un premier essai sur une matière très-délicate.

RECHERCHES

SUR

LA SÉRIE DE LAGRANGE,

PAR M. FÉLIX CHIO.

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES À L'ACADÉMIE ROYALE MILITAIRE,
ET DOCTEUR AGRÉGÉ À L'UNIVERSITÉ DE TURIN.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE LE 8 JUIN 1846.)

PREMIER MÉMOIRE.

De toutes les formules qui servent à déterminer les racines des équations, ou à développer en série une fonction quelconque de ces racines, celle de Lagrange, appelée ainsi du nom de son illustre auteur, est, sans contredit, l'une des plus connues et des plus intéressantes. Sous sa forme générale, elle s'exprime, comme on sait, de la manière suivante :

Soit l'équation

$$u - x + fx = 0, \tag{1}$$

et soit α une de ses racines, et $F\alpha$ une fonction quelconque de α, on aura

$$F\alpha = Fu + F'u.fu + \frac{1}{1.2}\frac{d}{du}(F'u.f^2u) + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2}{du^2}(F'u.f^3u) + \text{etc...} \tag{2}$$

en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{dFu}{du} = F'u$.

La discussion de cette série embrasse deux points différents, selon qu'on cherche, soit la condition de sa convergence, soit le caractère qui distingue la racine qu'elle représente, de toutes les autres de l'équation dont la même série a été tirée. Ce sont ces deux points qui vont former l'objet de ce travail. Le premier a déjà été traité, d'abord par Lagrange lui-même, et ensuite par M. Cauchy, qui a obtenu à ce sujet des résultats très-remarquables. Mais, en ce qui concerne le second point, nous avons la confiance d'être dans la vérité en disant que ce qu'on connaît sur ce sujet laisse encore beaucoup à désirer, et l'on nous pardonnera d'affirmer que le plus important des résultats obtenus à cet égard demande à être rectifié. Aussi avons-nous pensé que c'était la partie de notre travail qui se rapporte à ce dernier point qu'il fallait faire paraître la première.

L'objet de ce premier mémoire est donc de faire connaître la nature et les propriétés caractéristiques de la racine donnée par la série de Lagrange, et de montrer de quelle manière il faut faire usage de cette série, pour obtenir séparément toutes les racines de l'équation proposée.

Nous ne pouvions, pourtant, aborder cette question sans la faire précéder d'une considération très-importante, tendante à signaler certains systèmes de valeurs du paramètre u, qui entre dans la formule (1) ci-dessus, lesquels, sous certaines conditions très-simples, rendent la série (2) nécessairement convergente. D'ailleurs, il va sans dire que les propriétés que nous avons reconnues à la racine donnée par la série (2) reposent sur l'hypothèse que cette série soit convergente. Or cette hypothèse entraîne des conséquences indispensables pour faire ressortir toutes les propriétés de la racine en question, conséquences que nous n'eussions jamais été à même d'en tirer, sans l'emploi d'un théorème très-fécond sur la convergence des séries en général, dont le célèbre savant de France, déjà nommé, a récemment enrichi l'analyse. C'est donc à ce théorème, qui réduit la loi de convergence du développement d'une fonction d'une variable suivant les puissances entières de

cette variable à la simple loi de continuité de la même fonction, et de sa première dérivée, que nous devons la satisfaction d'avoir surmonté certaines difficultés qui nous avaient longtemps arrêté. C'est aussi pour nous un devoir qui nous est imposé par la gratitude, d'ajouter que, si notre travail est jamais digne de l'indulgence des géomètres, c'est dans la bienveillance dont M. Cauchy nous a honoré que nous avons puisé la persévérance et le courage avec lesquels nous avons supporté tout ce qu'une pareille matière avait pour nous de pénible et de laborieux.

Mais avant d'entrer en matière essayons de rappeler sommairement l'état où la question faisant l'objet de ce mémoire se trouvait au moment où nous avons entrepris de l'étudier. Tout ce qui était connu à cet égard se résume dans les résultats consignés par Lagrange dans deux de ses écrits très-célèbres. L'un est le mémoire qu'il a publié en 1768 dans les volumes de l'Académie de Berlin, sous le titre : *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*; l'autre est la note XI de sa résolution des équations numériques. Ce n'est point notre dessein de donner ici une analyse entière du premier de ces écrits, qui, d'ailleurs, embrasse plusieurs points. Mais, de tous les résultats remarquables qui s'y trouvent, nous tenons à signaler celui-ci : c'est que toute équation proposée peut se ramener à la forme (1) ci-dessus de plusieurs manières, et que la manière de réduction choisie à cet effet contribue à déterminer l'ordre de la racine donnée par la série. Cependant nous oserons dire que ce travail, admirable à certains égards, nous semble incomplet par rapport à la question qui nous occupe, par deux raisons principales :

1° En ce qu'il ne donne pas un caractère propre et suffisant pour distinguer chaque racine de toutes les autres, lorsque la proposée a tous ses coefficients déterminés,

2° En ce qu'il n'indique pas de quelle manière il convient de réduire l'équation proposée à la forme (1), pour obtenir, à l'aide de la série (2), chaque racine en particulier; ce qui, à nos yeux, est incontestablement le point essentiel de la question.

Dans le second des écrits que nous venons de citer, Lagrange a présenté la question sous une forme qui nous semble plus nette, et peut-être plus précise. Il l'a présentée à peu près ainsi qu'il suit : Supposons que l'équation proposée ait ses coefficients tous déterminés, et rangeons dans l'ordre de leur grandeur ses diverses racines réelles; l'on demande laquelle de ces racines on obtient par la série (2). Les résultats obtenus par Lagrange, à ce sujet, sont compris dans le théorème suivant.

Supposons que la proposée ait été réduite à la forme (1) ci-dessus, de telle manière que $f(x)$ soit de la forme

$$(3) \qquad f(x) = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \ldots$$

Si α est la racine la plus petite, ou, autrement, la plus approchée de zéro, on aura

$$(4) \qquad \alpha = u + f\,u + \frac{1}{1.2}\frac{d\,f^2\,u}{d\,u} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2\,f^3\,u}{d\,u^2} + \ldots$$

(Voir page 223 de la note citée.)

Mais, après avoir examiné ce théorème avec toute l'attention qui nous était commandée par l'autorité si imposante de Lagrange, nous oserons affirmer qu'il n'est point généralement vrai. Pour s'en convaincre sur-le-champ, il suffit de considérer ces deux exemples

$$(5) \qquad \begin{cases} 6{,}01 - x + (0{,}1)\,x^2\,(x-5)\,(x-6)\,(x-6{,}1) = 0 \\ 5{,}01 - x + (0{,}1)\,x^2\,(x-5)^2 = 0 \end{cases}$$

qui se trouvent discutés au § II de ce mémoire.

Le respect profond que nous portons au nom du grand géomètre italien nous a imposé la tâche d'examiner, sous toutes ses faces, la démonstration du théorème dont il s'agit; et nous avons trouvé (§ III) qu'elle est absolument insuffisante par plusieurs rai-

sons, dont la plus saillante est la manière meme de réduction de l'équation proposée à la forme (1), qui a été prise pour fondement de la même démonstration. En effet, cette manière revient à supposer que la proposée étant

$$F(x) = 0, \tag{6}$$

elle est ramenée à la forme (1) ainsi qu'il suit:

$$u - x + (x - u + kF(x)) = 0, \tag{7}$$

en sorte qu'on a

$$f(x) = x - u + kF(x), \tag{8}$$

où, remarquons-le bien, u et k sont deux quantités indéterminées qui, d'après l'esprit de l'analyse de Lagrange, peuvent être choisies *à volonté*.

Or, par cela même, nous démontrons au § III que la série de Lagrange tirée de l'équation (7), loin de donner constamment une même racine, quels que soient u et k, comme l'indique le théorème de Lagrange, est susceptible, au contraire, de fournir une quelconque des racines *simples* de la proposée, pourvu qu'on choisisse d'une manière convenable les valeurs de u et k. Il y a plus : nous indiquons encore quelles valeurs il faut attribuer à ces quantités u et k, afin d'atteindre ce double but, que la série de Lagrange soit convergente, et que la racine qu'elle donne soit précisément celle des racines de la proposée qu'on aura désignée d'avance.

Ce qui précède suffit pour donner une idée sommaire de l'état où se trouvait la question au moment où nous l'avons entreprise. Au reste, il nous a paru que cette question demandait à être considérée sous deux points de vue. L'un consiste à montrer de quelle manière il faut ramener toute équation proposée à la

forme (1), pour que la série de Lagrange soit convergente, et puisse nous fournir telle racine de la proposée qu'il nous plaira d'obtenir. C'est ce qui forme, comme nous l'avons déjà dit, l'un des objets du § III, et d'où il résulte une méthode pour résoudre les équations numériques. Quoiqu'elle suppose, comme celle de Newton, que l'on ait déjà la valeur de la racine qu'on cherche, avec un certain degré d'approximation; elle sera pourtant, nous l'espérons, jugée digne de l'attention des géomètres. L'autre point de vue, sous lequel nous avons considéré la question, consiste à déterminer *a priori* l'ordre de la racine donnée par la série de Lagrange, en supposant que la proposée ait été réduite à la forme (1) d'une manière quelconque convenue d'avance. Mais nous ne pouvions résoudre ce dernier problème sans établir auparavant un mode quelconque de distinguer et de ranger entre elles les diverses racines de toute équation donnée. Ainsi l'on nous pardonnera d'avoir exposé, au § IV, avec d'assez longs détails, celui des divers modes de distinction et d'arrangement des racines de toute équation proposée, que nous avons cru devoir choisir de préférence, comme le plus propre à nous conduire à une solution satisfaisante du problème indiqué tout à l'heure. Nous croyons inutile d'entrer dans de plus grands détails sur l'objet de ce mémoire, car un simple coup d'œil, jeté sur chacun des paragraphes qui le composent, suffira pour en montrer, d'une manière complète, l'esprit et la portée.

§ I.

Soit l'équation

$$u - x + f(x) = 0, \tag{1}$$

et soient

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots\ldots, u_n$$

les différentes racines réelles, ou imaginaires, de l'équation

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

en sorte qu'on ait, pour la plus grande généralité possible,

$$f(x) = \psi(x).(x - u_1)(x - u_2)\ldots(x - u_n), \tag{3}$$

$\psi(x)$ étant une fonction quelconque de x, réelle ou imaginaire, algébrique ou transcendante, et seulement assujettie à ne pas devenir infinie, pour x égal à une quelconque des racines ci-dessus de l'équation (2).

La formule de Lagrange tirée de l'équation (1) sera

$$u + fu + \frac{1}{1.2}\frac{df^2u}{du} + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2f^2u}{du^2} + \ldots \tag{4}$$

Cela posé, regardons, dans cette série, u comme un paramètre variable, et cherchons la condition de sa convergence dans le cas où l'on attribue à u des valeurs situées dans le voisinage de la quantité u_i, u_i étant une quelconque des racines de l'équation (2) que nous venons d'appeler u_1, u_2, u_3, ... u_n.

A cet effet, commençons par considérer la valeur particulière $u = u_i$, ou, mieux, une valeur de u infiniment rapprochée de u_i. Dans ce cas, le terme général de la série (4), savoir:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}f^m(u)}{du^{m-1}}$$

se réduit à zéro, ou, mieux, devient infiniment petit, comme on peut s'en convaincre eu égard à la nature de la valeur assignée précédemment à $f(x)$. Mais ce n'est pas là encore une preuve sûre de la convergence de la série. Car la loi de convergence de toute série ne dépend pas, comme on sait, de la valeur absolue de ses termes, mais de la limite vers laquelle converge le rapport de deux termes consécutifs quelconques, à mesure que les indices

de ces termes tendent vers l'infini. Cherchons donc cette limite par rapport à la série qui nous occupe. Pour cela faisons

$$f(x) = (x - u_i)\,\theta(x), \tag{5}$$

où $\theta(x)$, d'après l'équation (3), est certainement une fonction qui ne peut devenir infinie pour $u = u_i$.

En ayant recours à la formule connue

$$d^p(u.v) = u\,d^pv + p\,du d^{p-1}v + \frac{p(p-1)}{1.2}\,d^2u d^{p-2}v + \text{etc.}\ldots\ldots \tag{6}$$

l'on en tire

$$\begin{aligned} d^{m-1}f(u)^m &= d^{m-1}\left[(u-u_i)^m.\theta(u)^m\right] \\ &= d^{m-1}(u-u_i)^m.\theta(u)^m + (m-1)\,d\theta(u)^m\,d^{m-2}(u-u_i)^m \\ &\quad + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\,d^2\theta(u)^m.d^{m-3}(u-u_i)^m + \text{etc.}\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3.4\ldots m}\,\frac{d^{m-1}f(u)^m}{du^{m-1}} &= \theta(u)^m.(u-u_i) \\ &\quad + (m-1)\,\frac{d\theta(u)^m}{du}.\frac{(u-u_i)^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (m-1)\,\frac{d^{m-2}\theta(u)^m}{du^{m-2}}.\frac{(u-u_i)^{m-1}}{1.2.3..(m-1)} \\ &\quad + \frac{d^{m-1}\theta(u)^m}{du^{m-1}}.\frac{(u-u_i)^m}{1.2.3\ldots m}, \end{aligned} \tag{8}$$

laquelle formule, en y changeant m en $m+1$, nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3.4\ldots(m+1)}\,\frac{d^m f(u)^{m+1}}{du^m} &= \theta(u)^{m+1}(u-u_i) \\ &\quad + m\,\frac{d\theta(u)^{m+1}}{du}\,\frac{(u-u_i)^2}{1.2} + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Or, en désignant par R la limite qu'on cherche, limite qui est

la même vers laquelle converge le rapport du premier membre de la dernière équation, divisé par le premier membre de celle qui la précède, à mesure que m tend vers l'infini, on aura

$$(10) \qquad R = \theta(u) + A\,\omega + B\,\omega^2 + C\,\omega^3 + \ldots$$

où, pour abréger, l'on a fait $u - u_i = \omega$, et où les coefficients A, B, C, etc., sont des fonctions de u et de l'indice m, indice qui doit être ici regardé comme infini.

A la vérité, la forme sous laquelle nous venons d'obtenir R ne serait d'aucune utilité, s'il fallait calculer R pour une valeur finie quelconque attribuée à ω. Car les coefficients A, B, C deviennent infinis à cause de la valeur infinie qu'il faut attribuer à m, comme on peut le voir en essayant le calcul du seul coefficient A, pour lequel on trouve, toute réduction faite,

$$(11) \qquad A = m\,\frac{d\theta(u)}{du}.$$

Mais la formule (10) est sans doute suffisante pour déterminer la valeur de R dans le cas particulier où $u = u_i$, ou, autrement, dans le cas où l'on a $\omega = 0$. Car, dans cette hypothèse, les termes de cette formule renfermant les coefficients A, B, C, etc. s'évanouissent tous, et l'on a simplement

$$(12) \qquad R = \theta(u_i);$$

ou bien

$$(13) \qquad R = f'(u_i).$$

Car en différentiant l'équation (5) par rapport à x, et faisant après la différentiation $x = u_i$, on trouve $\theta(u_i) = f'(u_i)$, où par $f'(u_i)$ nous entendons le premier coefficient différentiel de $f(u_i)$ par rapport à u_i.

De l'équation (13) nous tirons d'abord cette conséquence : que la série (4) est convergente ou divergente pour $u=u_i$, ou, plus rigoureusement parlant, pour u infiniment rapproché de u_i suivant qu'on aura

$$\text{mod. } f'(u_i) < \text{ou} > 1 ; \tag{14}$$

en désignant par mod. $f'(u_i)$ le module de la quantité $f'(u_i)$.

Mais il y a plus : l'équation (13) entraîne encore une conséquence autrement importante à signaler. En effet, la limite R, savoir celle vers laquelle converge le rapport de deux termes consécutifs quelconques de la série (4), à mesure que les indices de ces termes tendent vers l'infini, est certainement une fonction continue de u, ou elle est, au moins, telle, pour des valeurs de u voisines de u_i. Il résulte de là qu'il existera nécessairement un système de valeurs de u, situées dans le voisinage de u_i, qui, tout en différant de u_i d'une quantité finie, s'en approcheront toutefois tellement, que la valeur correspondante de R différera de $f'(u_i)$ si peu, qu'elle sera plus grande ou plus petite que l'unité, en même temps que ceci aura lieu pour $f'(u_i)$. D'où vient le théorème que nous allons établir.

Théorème (A). — La série (4) est convergente, ou divergente pour toutes les valeurs de u en nombre infini, renfermées entre deux certaines limites l_i et l'_i, comprenant entre elles la quantité u_i, selon que mod. $f'(u_i)$ sera $<$ ou $>$ 1.

Mais cette proposition étant fondamentale, il est bon de la démontrer d'une manière plus rigoureuse. Pour cela nous nous appuierons sur le beau théorème de M. Cauchy, au moyen duquel ce grand géomètre ramène la loi de convergence du développement de toute fonction d'une variable t suivant les puissances entières de cette variable, à la simple loi de continuité de la même fonction, et de sa première dérivée. Ce théorème a été énoncé par M. Cauchy de plusieurs manières, dans ses exercices de physique et d'analyse, et dans plusieurs de ses mémoires. Nous en rapporterons ici l'énoncé, qu'on trouve dans les comptes rendus

des séances de l'Institut de France, année 1844 (deuxième semestre).

Théorème de M. Cauchy. — Supposons que $f(t)$ et $f'(t)$ restent fonctions continues de la variable $t = r\,e^{p\sqrt{-1}}$ pour toutes les valeurs du module r de cette variable inférieures à une certaine limite k; supposons encore que la fonction $f(t)$, ou l'une quelconque de ses dérivées devienne infinie pour $r = k$, et pour une valeur convenablement choisie de l'argument p; alors k sera la limite extrême et supérieure au-dessous de laquelle le module r pourra varier arbitrairement, sans que la fonction $f(t)$ cesse d'être développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances *entières* et ascendantes de t.

Pour faire usage de ce théorème, nous remplacerons l'équation (1) par la suivante:

$$u - x + tf(x) = 0, \tag{15}$$

où t est un paramètre variable.

Ce qui nous conduit à remplacer la série (4) par la suivante:

$$u + t\,f(u) + \frac{t^2}{1.2}\frac{df^2(u)}{du} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^2f^3(u)}{du^2} + \frac{t^4}{1.2.3.4}\frac{d^3f^4(u)}{du^3} + \text{etc.} \tag{16}$$

Ainsi, la condition de convergence de la série (4) se réduit à ce que la série que nous venons d'écrire soit convergente pour un module de t égal ou supérieur à l'unité. Cela posé, désignons par S (t) cette série (16). La série (4) devra être désignée en conséquence par S (1), car elle se déduit de S (t) en y faisant $t = 1$. Or, pour trouver la condition de convergence de la série S (t), appelons α celle des racines de l'équation (15) qui est donnée par cette série. Cette racine, eu égard à un autre théorème de M. Cauchy, devra être regardée comme une fonction continue de t. Pour qu'elle soit donc développable en série convergente sui-

vant les puissances ascendantes de t, il suffit, en vertu du théorème rappelé plus haut, de considérer $\frac{d\alpha}{dt}$, dont la valeur, tirée de la différentiation de l'équation (15), est

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{f(\alpha)}{1 - t f'(\alpha)}; \tag{17}$$

et il faudra chercher le plus petit module τ de t, par rapport auquel le second membre de cette dernière équation devient discontinu. Pour cela il faudrait établir l'équation

$$1 - t f'(\alpha) = 0: \tag{18}$$

où d'abord l'on devrait mettre pour α sa valeur en fonction *finie* de t, si cette valeur nous était connue; et, ensuite, il faudrait chercher le plus petit module des racines t de l'équation en t, dans laquelle se réduirait la dernière après la substitution dont nous venons de parler. Mais la fonction *finie* en t, exprimant la racine α, nous étant inconnue, voici comment nous nous tirerons de cette difficulté, dans le cas où l'on suppose que la valeur de u est égale à u_i, ou prise dans le voisinage de cette quantité. D'abord, si nous supposons u exactement égal à u_i, il est évident que la racine α se réduira alors à u_i, quel que soit t. Par suite l'équation (18) deviendra pour $u = u_i$

$$1 - t f'(u_i) = 0: \tag{19}$$

équation du premier degré par rapport à t, et qui nous donne, pour le module cherché τ de t,

$$\operatorname{mod} t = \tau = \operatorname{mod} \frac{1}{f'(u_i)} = \frac{1}{\operatorname{mod} f'(u_i)}. \tag{20}$$

Par suite, la série S (1), savoir celle qui se rapporte à l'équation (1), sera convergente ou divergente pour $u = u_i$, suivant qu'on aura

$$\operatorname{mod} f'(u_i) < \text{ou} > 1,$$

résultat qui est le même que nous avons déjà obtenu plus haut.

Faisons maintenant $u = u_i + \omega$, ω étant réel ou imaginaire, mais peu différent de zéro. Alors, pour trouver le plus petit des modules des racines qu'acquerrait l'équation (18) résolue par rapport à t, si l'on y mettait, préalablement, pour α sa valeur finie en fonction de t, nous nous y prendrons ainsi qu'il suit.

Nous observons, avant tout, que le module τ de t, qu'on cherche, peut être regardé comme donné par la formule

$$\tau = \operatorname{mod} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\operatorname{mod} f'(x)}, \tag{21}$$

pourvu qu'on y entende par x une des racines de l'équation

$$u_i + \omega - x + \frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \tag{22}$$

résultant de l'élimination de t entre l'équation

$$u_i + \omega - x + t f(x) = 0, \tag{23}$$

et sa première dérivée par rapport à x

$$-1 + t f'(x) = 0. \tag{24}$$

En effet, en réfléchissant avec attention sur l'origine, que nous venons de signaler tout à l'heure, de l'équation (22), on s'aperçoit que les racines de cette équation, d'une part, ne sont que les racines multiples que l'équation (23) peut acquérir par de convenables valeurs attribuées à t; et, d'autre part, représentent toutes les valeurs de x qui, substituées dans l'équation (24), donnent les valeurs qu'il faut attribuer à t pour que l'équation (23) acquière, en conséquence, une ou plusieurs racines multiples. Mais il est facile de se convaincre que toute valeur de t, qu'on obtiendrait de l'équation (18) si l'on y mettait pour α son expression en fonction finie de t, est propre à rendre une racine *double* la même racine α. D'après cela, il est évident que la valeur de t, ou bien son module τ qu'on cherche, peut être regardé comme donné

par la formule (21), pourvu qu'on y entende par x une racine convenable de l'équation (22). La question est ainsi réduite à démêler la racine x, indiquée tout à l'heure, de toutes les autres racines appartenant, de même qu'elle, à l'équation (22). A cet effet, il faut observer que, puisque en faisant $\omega = 0$, la racine de l'équation (22), convenable à notre objet, est $x = u_i$, ce qui donne ce résultat déjà trouvé plus haut

$$\tau = \frac{1}{\text{mod } f'(u_i)},$$

il est évident que pour ω non égal à zéro, mais seulement très-petit, la racine x de l'équation (22), qui convient à notre objet, sera celle, ou, mieux, l'une de celles qui se trouvent dans le voisinage de u_i.

Tâchons donc de déterminer ces racines. Pour cela écrivons l'équation (22) sous cette forme

$$\omega + \frac{1}{f'(x)}\left[(u_i - x) f'(x) + f(x)\right] = 0, \tag{25}$$

et commençons par remarquer que l'équation

$$(u_i - x) f'(x) + f(x) = 0 \tag{26}$$

a toujours, au moins, deux racines égales à u_i; car sa première dérivée, étant

$$(u_i - x) f''(x) = 0, \tag{27}$$

a toujours une de ses racines égale à u_i.

Ajoutons que la même équation (26) pourra acquérir trois racines égales à u_i, ou quatre, ou même davantage, selon qu'on aura ou seulement $f''(u_i) = 0$, ou bien à la fois $f''(u_i) = 0$, et $f'''(u_i) = 0$, etc... comme on peut s'en convaincre tout de suite à l'inspection des dérivées de la même équation, lesquelles sont:

$$(28)\begin{cases} \text{celle du second ordre..} & f''(x) + (x - u_i) f'''(x) = 0, \\ \text{celle du troisième ordre} & 2 f'''(x) + (x - u_i) f^{iv}(x) = 0. \end{cases}$$

Or il est impossible de déterminer celles des racines de l'équation (25) qui se trouvent dans le voisinage de u_i, sans considérer séparément les différents cas que nous venons de signaler par rapport à l'équation (26). Partant, supposons, en premier lieu, que u_i ne soit qu'une racine double de cette même équation (26), en sorte qu'on ait

$$f''(u_i) > \text{ou} < 0;$$

alors son premier membre sera divisible par $(x - u_i)^2$. Nous pourrons ainsi établir l'équation

$$(29) \qquad (x - u_i) f'(x) - f(x) = (x - u_i)^2 \theta(x),$$

$\theta(x)$ étant une fonction qui ne s'évanouit ni ne devient infinie pour $x = u_i$. Par suite l'équation (25) devient

$$(30) \qquad \omega - (x - u_i)^2 \frac{\theta(x)}{f'(x)} = 0,$$

ou bien

$$(31) \qquad (u_i - x)^2 = \frac{\omega f'(x)}{\theta(x)}, \quad u_i - x = \sqrt{\frac{\omega f'(x)}{\theta(x)}}.$$

Et, en appliquant à la dernière de ces équations la formule de Lagrange, on aura

$$(32) \qquad x = u_i + \sqrt{\frac{\omega f'(u_i)}{\theta(u_i)}} + \frac{\omega}{1.2} \frac{d}{du_i} \left(\frac{f'(u_i)}{\theta(u_i)} \right) + \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \frac{d^2}{du_i^2} \left(\frac{f'(u_i)}{\theta(u_i)} \right)^{\frac{3}{2}} + \text{etc...}$$

Telle est l'équation qui donne explicitement, et sous forme de série, les racines de l'équation (22) situées dans le voisinage de u_i, et cela dans le cas où l'on a

$$f''(u_i) > \text{ou} < 0.$$

Mais ces racines sont encore susceptibles d'être exprimées en série

composée de termes tous indépendants de la fonction $\theta(u_i)$ et de ses dérivées, ainsi qu'on va le voir. Posons

$$\chi = \frac{f'(u_i)}{\theta(u_i)}; \tag{33}$$

l'équation (32) deviendra

$$x = u_i + \omega^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega}{1.2} \frac{d\chi}{du_i} + \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \frac{d^2\chi^{\frac{3}{2}}}{du_i^2} + \text{etc.} \ldots \tag{34}$$

Cela posé, en différentiant par rapport à x l'équation (29), et divisant le résultat par $x - u_i$, on trouve

$$(x - u_i)\,\theta'(x) + 2\,\theta(x) = f''(x), \tag{35}$$

ce qui nous donne, en y faisant $x = u_i$,

$$\theta(u_i) = \frac{f''(u_i)}{2}. \tag{36}$$

En différentiant l'équation (35) on obtient

$$(x - u_i)\,\theta''(x) + 3\,\theta'(x) = f'''(x). \tag{37}$$

D'où l'on tire, en faisant $x = u_i$,

$$\theta'(u_i) = \frac{f'''(u_i)}{3}. \tag{38}$$

On trouvera de même

$$\theta''(u_i) = \frac{f^{IV}(u_i)}{4}, \quad \theta'''(u_i) = \frac{f^{V}(u_i)}{5} \text{ etc.} \ldots \tag{39}$$

A l'aide de ces valeurs on pourra facilement calculer les coefficients des termes de la série (34), dont nous nous contenterons ici de déterminer les trois premiers seulement.

En vertu des équations (33) et (36) on a d'abord

$$\chi = \frac{2 f'(u_i)}{f''(u_i)}. \tag{40}$$

Mais la même équation (33) nous donne

$$\frac{d\chi}{du_i} = \frac{f''(u_i)}{\theta(u_i)} - \frac{f'(u_i)\,\theta'(u_i)}{\theta(u_i)^2}, \tag{41}$$

équation qui, en vertu des valeurs de $\theta(u_i)$ et de $\theta'(u_i)$, tirées des équations (36) et (38), nous fournit la suivante :

$$\frac{d\chi}{du_i} = 2 - \frac{4}{3}\frac{f'(u_i)\,f''(u_i)}{f''(u_i)^2}. \tag{42}$$

Partant l'équation (34) deviendra

$$x = u_i + \sqrt{\frac{2\omega f'(u_i)}{f''(u_i)}} + \omega\left[1 - \frac{2}{3}\frac{f'(u_i)\,f'''(u_i)}{f''(u_i)^2}\right] + \text{etc...} \tag{43}$$

Telle est la formule qui représente, en fonction de $f(u_i)$ et de ses dérivées, celles des racines de l'équation (22) qui se trouvent situées dans le voisinage de u_i, et cela dans le cas où l'on a

$$f''(u_i) > \text{ou} < 0.$$

Mais ici il y a une observation importante à faire. C'est que la dernière formule cesserait de servir à la détermination de x, si l'on avait $f'(u_i) = 0$. Pour s'en convaincre, il faut considérer ceux des termes de la série (34) qui sont affectés des puissances fractionnaires $\omega^{\frac{3}{2}}$, $\omega^{\frac{5}{2}}$, etc... En nous bornant au seul terme affecté de $\omega^{\frac{3}{2}}$, on trouve

$$\frac{d^2\chi^{\frac{3}{2}}}{du_i^2} = \frac{3}{4\sqrt{\chi}}(\chi'^2 + 2\chi\chi''), \tag{44}$$

et le second membre de cette équation devient infini, lorsqu'on y fait $x = u_i$, attendu que la valeur de χ, donnée par l'équation (40), se réduit, dans ce cas, à zéro.

Mais on trouve sans peine l'équation qui doit remplacer l'équation (43) dans l'hypothèse actuelle. Posons

$$f'(x) = (x - u_i)\,\pi(x), \quad f(x) = (x - u_i)^2\,\varphi(x), \tag{45}$$

$\pi(x)$, $\varphi(x)$ étant deux fonctions qui ne s'évanouissent ni ne deviennent infinies pour $x = u_i$.

Par suite, le premier membre de l'équation (26) pourra se mettre sous cette forme

$$(46) \qquad (u_i - x) f'(x) + f(x) = (u_i - x)^2 [\varphi(x) - \pi(x)].$$

Ainsi, l'équation (25) deviendra

$$(47) \qquad \omega + (u_i - x) \left\{ \frac{\pi(x) - \varphi(x)}{\pi(x)} \right\} = 0,$$

ou bien

$$(48) \qquad u_i - x + \frac{\omega \pi(x)}{\pi(x) - \varphi(x)} = 0;$$

d'où l'on tire, par la formule de Lagrange,

$$(49) \quad x = u_i + \frac{\omega \pi(u_i)}{\pi(u_i) - \varphi(u_i)} + \frac{\omega^2}{1.2} \frac{d}{du_i} \left\{ \frac{\pi(u_i)}{\pi(u_i) - \varphi(u_i)} \right\}^2 + \text{etc...}$$

Reste à déterminer les termes de cette série en fonction de $f(u_i)$ et de ses dérivées. C'est là un calcul qu'on exécutera sans peine, pourvu qu'on remarque qu'en différentiant par rapport à x, plusieurs fois de suite, les équations (45), on a ces deux suites d'équations

$$(50) \quad \pi(u_i) = f''(u_i), \quad \pi'(u_i) = \frac{f'''(u_i)}{2}, \quad \pi''(u_i) = \frac{f^{iv}(u_i)}{3}, \text{ etc...}$$

$$(51) \quad \varphi(u_i) = \frac{f'(u_i)}{2}, \quad \varphi'(u_i) = \frac{f''(u_i)}{2.3}, \quad \varphi''(u_i) = \frac{f^{iv}(u_i)}{2.3.4}, \text{ etc...}$$

Eu égard à ces valeurs, et à ce qu'on a $f'(u_i) = 0$, l'équation (49), tout calcul fait, se transformera en la suivante:

$$(52) \quad x = u_i + 2\omega - \frac{2}{3} \frac{f'''(u_i)}{f''(u_i)} \omega^2 + \left[\frac{5}{9} \frac{f'''(u_i)^2}{f''(u_i)^2} - \frac{1}{2} \frac{f^{iv}(u_i)}{f''(u_i)} \right] \omega^3 + \text{etc...}$$

Telle est la formule qui donne les racines de l'équation (22) situées dans le voisinage de u_i, lorsqu'on a $f'(u_i) = 0$, et $f''(u_i) > \text{ou} < 0$.

Considérons maintenant le cas où l'on a $f'(u_i) = 0$, $f'''(u_i)$ étant $>$ ou $<$ 0 : alors l'équation (26) aura trois racines égales à u_i, ainsi que nous l'avons déjà observé plus haut. Nous poserons par conséquent

$$(53) \qquad (x - u_i) f'(x) - f(x) = (x - u_i)^3 \psi(x).$$

L'équation (25) devient par là

$$(54) \qquad u_i - x + \sqrt[3]{\frac{\omega f'(x)}{\psi(x)}} = 0;$$

et en y appliquant la formule de Lagrange on a

$$(55) \quad x = u_i + \omega^{\frac{1}{3}} \left(\frac{f'(u_i)}{\psi(u_i)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{1.2} \frac{d}{du_i} \left(\frac{f'(u_i)}{\psi(u_i)}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{\omega}{1.2.3} \frac{d^2}{du_i^2} \left(\frac{f'(u_i)}{\psi(u_i)}\right) + \text{etc...}$$

Or, en exécutant d'abord les différentiations indiquées par les coefficients des termes de cette série, et en observant ensuite que la différentiation de l'équation (53), répétée autant de fois qu'il faut, nous donne, à cause de l'hypothèse $f''(u_i) = 0$,

$$(56) \quad \psi(u_i) = \frac{f'''(u_i)}{3}, \psi'(u_i) = \frac{f^{iv}(u_i)}{8}, \psi''(u_i) = \frac{f^{v}(u_i)}{15}, \text{ etc...}$$

on parviendra à changer l'équation (55) dans la suivante

$$(57) \quad x = u_i + \omega^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3 f'(u_i)}{f'''(u_i)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{8} \frac{f^{iv}(u_i)}{f'''(u_i)} \left(\frac{3 f'(u_i)}{f'''(u_i)}\right)^{\frac{2}{3}} + \omega \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \frac{f'(u_i) f^{v}(u_i)}{f'''(u_i)^2} + \frac{9}{64} \frac{f'(u_i) \cdot f^{iv}(u_i)^2}{f'''(u_i)^3}\right] + \text{etc.}$$

équation, qui donne en fonction de $f(u_i)$ et de ses dérivées les racines x de l'équation (22) situées dans le voisinage de u_i, dans le cas où l'on a $f''(u_i) = 0$, $f'''(u_i)$ étant $>$ ou $<$ 0. L'on voit de plus que ces racines sont au nombre de trois.

Il faut ajouter que cette équation deviendrait illusoire si l'on

avait $f'(u_i) = 0$, comme on s'en apercevrait si l'on poussait plus loin le calcul des termes de la série, qui en compose le second membre. Mais ce fait n'a rien d'étonnant, et il tient à ce que l'équation (22) n'a jamais qu'une seule racine voisine de u_i, lorsqu'on a $f'(u_i) = 0$, les autres dérivées $f''(u_i)$, $f'''(u_i)$ etc... étant quelconques. Cette vérité, facile à démontrer en général, l'a déjà été précédemment, dans l'hypothèse de $f'(u_i) = 0$, et $f'(u_i) > \text{ou} < 0$. Nous la démontrerons encore pour le cas, où l'on suppose $f'(u_i) = 0$, et à la fois $f''(u_i) = 0$, $f'''(u_i)$ étant $> \text{ou} < 0$.

Alors nous poserons l'équation

$$(58) \qquad f'(x) = (x - u_i)^2 \pi_1(x), \quad f(x) = (x - u_i)^3 \varphi_1(x),$$

$\pi_1(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant deux fonctions qui ne s'évanouissent ni ne deviennent infinies pour $x = u_i$.

Ainsi l'équation (25) pourra s'écrire sous cette forme

$$(59) \qquad \omega + (u_i - x)\left\{\frac{\pi_1(x) - \varphi_1(x)}{\pi_1(x)}\right\} = 0,$$

ou bien

$$(60) \qquad u_i - x + \frac{\omega \pi_1(x)}{\pi_1(x) - \varphi_1(x)} = 0.$$

D'où l'on tire par la formule de Lagrange

$$(61) \qquad x = u_i + \frac{\omega \pi_1(u_i)}{\pi_1(u_i) - \varphi_1(u_i)} + \text{etc...}$$

équation qui, d'une part, montre que, dans l'hypothèse actuelle, l'équation (22) n'a qu'une racine située dans le voisinage de u_i; et, de l'autre part, offre le développement de cette racine suivant les puissances entières de ω. Nous ne voulons pas nous arrêter ici à déterminer les coefficients des termes de cette dernière série, en fonction de $f(u_i)$, et de ses dérivées $f'''(u_i)$, $f^{iv}(u_i)$, etc., ce qui, d'ailleurs, ne présente aucune difficulté. Nous ne croyons pas non plus devoir considérer les autres cas qui résultent des autres

hypothèses, qu'on peut encore faire sur les valeurs des dérivées $f'(u_i)$, $f''(u_i)$, etc... L'analyse précédente montre elle-même la marche qu'il faudrait suivre pour déterminer, dans chacun des cas en question, les formules propres à donner celles des racines de l'équation (22) qui se trouvent dans le voisinage de u_i. Mais nous nous hâterons de revenir au véritable objet qui nous a conduit à la discussion de l'équation (22), objet qui consiste, comme on sait, à déterminer le plus petit des modules des racines qu'acquerrait l'équation (18) résolue par rapport à t, si l'on y mettait préalablement pour α sa valeur en fonction finie de t. Ce module τ, d'après les raisonnements déjà exposés, sera donné par l'équation (21), où l'on doit avoir soin de mettre à la place de x une des racines de l'équation (22) situées dans le voisinage de u_i. Or ces racines, qui peuvent, d'ailleurs, être une ou plusieurs, généralement se déterminent sans peine au moyen de l'analyse précédente, et, en particulier, elles sont données par la formule (43) si $f'(u_i)$ et $f''(u_i)$ sont l'un et l'autre $>$ ou $<$ 0; ou par la série (52), si l'on a $f'(u_i) = 0$ et $f''(u_i) >$ ou $<$ 0; ou enfin par la série (55), si l'on a à la fois $f'(u_i) >$ ou $<$ 0, $f''(u_i) = 0$, $f'''(u_i) >$ ou $<$ 0.

Cela posé, puisque la série S(1) est, comme on sait, convergente ou divergente, selon qu'on a $\tau >$ ou $<$ 1, on en conclura que la condition de sa convergence, pour u pris dans le voisinage de u_i, sera

$$\text{mod}\, f'(x) < 1, \tag{62}$$

où il faut faire attention, 1° qu'en général x doit recevoir, pour sa valeur, celle des racines de l'équation (22) qui se trouve dans le voisinage de u_i, ou une de celles qui s'y trouvent, si l'équation (22) en a plus d'une de pareilles; 2° qu'en particulier x doit recevoir la valeur donnée par l'équation (43), ou par l'équation (52), ou bien par (57) lorsqu'on a, ou $f'(u_i)$ et $f''(u_i)$ l'un et l'autre $>$ ou $<$ 0; ou $f'(u_i) = 0$ et $f''(u_i) >$ ou $<$ 0; ou enfin $f''(u_i) = 0$, et $f'(u_i)$ et $f'''(u_i)$ l'un et l'autre $>$ ou $<$ 0.

Partant, si $f'(u_i)$ et $f''(u_i)$ sont tous deux différents de zéro, on aura, tout calcul fait, pour condition de convergence de la série S(1)

$$(63)\quad \text{mod.}\left[f'(u_i) + \sqrt{2\,\omega f'(u_i) f''(u_i)} + \omega\left(f''(u_i) + \frac{1}{3}\frac{f'(u_i) f'''(u_i)}{f''(u_i)}\right) + \ldots\right] < 1.$$

Si l'on a $f'(u_i) = 0$, et $f''(u_i) >$ ou < 0, la condition de convergence dont il s'agit sera

$$(64)\quad \text{mod.}\left[2 f''(u_i)\,\omega + \frac{4}{3} f'''(u_i)\,\omega^2 - \left(\frac{7}{3}\frac{f'''(u_i)}{f''(u_i)} - \frac{13}{2} f^{iv}(u_i)\right)\omega^3 + \ldots\right] < 1;$$

et si $f''(u_i) = 0$, $f'(u_i)$ et $f'''(u_i)$ étant tous deux différents de zéro, la condition de convergence de la série S(1) deviendra

$$(65)\quad \text{mod.}\left[f'(u_i) + \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{2}\sqrt[3]{9\, f'(u_i)^2 f'''(u_i)} + \frac{\omega}{8}\frac{f^{iv}(u_i) f'(u_i)}{f'''(u_i)} + \ldots\right] < 1.$$

Il serait facile de former explicitement en fonction de ω, et des dérivées de $f(u_i)$, la condition de convergence de la série S(1), pour toutes les autres hypothèses qu'on pourrait encore faire sur les valeurs des dérivées de $f(u_i)$. Mais les premiers membres des inégalités précédentes (63), (64), (65), eu égard notamment à ce qu'elles ne contiennent que des puissances positives de ω, suffisent, 1° pour montrer que les conditions de convergence qu'elles expriment ne manqueront pas d'être satisfaites, si l'on a mod. $f'(u_i) < 1$, et si, en même temps, ω est très-petit; 2° pour nous convaincre qu'il en sera de même des conditions de convergence de la même série S(1), correspondantes à des hypothèses autres que les précédentes, qu'on pourrait encore faire sur les valeurs des dérivées de $f(u_i)$. Car, certainement, ces conditions s'expri-

meraient de manière à ne contenir que des puissances positives de ω, entières ou fractionnaires; et si elles doivent avoir un terme indépendant de ω, ce terme ne pourra être que $f'(u_i)$, tout aussi bien que cela a lieu pour les inégalités ci-dessus (63), (64), (65). Nous avons donc dans ces inégalités, ou, pour mieux dire, dans l'inégalité (62), une confirmation de la vérité du théorème (A). Au reste, nous nous bornons aux développements que nous venons de donner de la démonstration de ce théorème, en nous réservant de revenir sur cette matière dans le second mémoire faisant suite à celui-ci, et que nous espérons publier bientôt.

En général, étant donnée une série, dont les termes soient des fonctions d'un paramètre u, on pourrait appeler période de convergence de la même série, considérée comme une fonction de ce paramètre, le système de toutes les valeurs de u, comprises entre deux limites quelconques l et l', pour lesquelles valeurs la série est toujours convergente; en sorte qu'en faisant varier u insensiblement depuis $u = l$, jusqu'à $u = l'$, la somme de la série demeure constamment une quantité finie.

Cette dénomination une fois adoptée, si nous supposons qu'on ait mod. $f'(u_i) < 1$; il résulte du théorème (A) que la série (4) jouit, par rapport à u, d'une période de convergence, dont les limites l_i et l'_i comprennent entre elles la quantité u_i. Mais remarquons bien qu'il pourrait se faire (et il ne serait pas d'ailleurs difficile d'en citer des exemples) que la série (4) fût continuement convergente pour toutes les valeurs de u renfermées entre deux limites comprenant entre elles plus d'une racine réelle de l'équation $f(x) = 0$. Aussi, par période de convergence relative au paramètre u, et renfermant la racine réelle u_i de $f(x) = 0$, nous n'entendons pas une période telle que ses deux limites ne comprennent jamais que la seule racine u_i. Mais, au contraire, rien ne s'oppose à ce qu'en certains cas les mêmes limites, outre la racine u_i, indiquée dans l'énoncé même de la période, renferment encore d'autres racines de la même équation $f(x) = 0$, inférieures ou supérieures à cette même quantité u_i. D'après la

dénomination que nous venons d'adopter, on dira encore que les périodes de convergence de la série (4) relatives à u, et dont les limites renferment quelques-unes des racines de l'équation $f(x) = 0$, peuvent être en certain nombre, et chacune d'elles se distinguera des autres par celle ou celles des racines de $f(x) = 0$, dans le voisinage de laquelle ou desquelles seront situées, de part et d'autre, les valeurs de u composant la même période.

§ II.

Soit l'équation

$$u - x + t f(x) = 0, \tag{1}$$

laquelle est la même que l'équation (15) du paragraphe précédent, mais où nous regarderons u comme une quantité réelle et constante, et t comme un paramètre variable et toujours réel. En outre, nous y regarderons $f(x)$ comme une fonction réelle quelconque de x, continue, ainsi que sa dérivée, pour toute valeur de x, ou, du moins, pour celles que nous aurons à considérer dans ce paragraphe. Ajoutons que, sans nuire à la généralité de la question, nous pouvons supposer que $f(x)$ ne s'évanouit, ni devient infini pour $x = u$, en sorte que cette fonction ne renferme, ni au numérateur, ni au dénominateur, le facteur $u - x$ élevé à quelque puissance que ce soit.

Cela posé, reprenons la série $S(t)$, qui a été considérée dans le paragraphe précédent, savoir:

$$u + t f(u) + \frac{t^2}{1.2}\frac{df^2(u)}{du} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^2 f^3(u)}{du^2} + \text{etc...} \tag{2}$$

résultant de l'application de la formule de Lagrange à l'équation (1) ci-dessus. Supposons que cette série soit convergente pour toute valeur réelle de t, comprise entre les limites $-l$ et $+l$, et appelons toujours α la racine qu'elle représente.

D'après les hypothèses que nous venons de faire, il est évident

que cette racine α est une racine réelle pour toute valeur de t comprise entre les limites $-l$ et $+l$ indiquées tout à l'heure. Mais elle jouit d'autres propriétés qu'il importe de faire connaître, et que nous allons énoncer dans les théorèmes suivants.

Théorème I. — Nous disons, d'abord, que cette racine α est toujours croissante ou toujours décroissante, par rapport à t, pour toute valeur de t renfermée entre les limites de convergence $-l$ et $+l$ de la même série. Nous disons, de plus, qu'elle est croissante ou décroissante, selon que la quantité réelle $f(u)$ est positive ou négative.

En effet, en différentiant l'équation (1) par rapport à x et à t, et changeant ensuite x en α, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{f(\alpha)}{1 - t f'(\alpha)}, \tag{3}$$

en désignant par $f'(\alpha)$ le coefficient différentiel $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$.

Or, le théorème de M. Cauchy, rappelé au paragraphe précédent, et relatif à la loi de convergence du développement de toute fonction d'une variable, montre que toute valeur de t, comprise entre les limites de convergence $-l$ et $+l$, sera toujours inférieure à celle qui, conjointement avec la valeur correspondante de α, tirée de la série S (t), rendrait le dénominateur ci-dessus $1 - t f'(\alpha)$ égal à zéro. Par suite, ce même dénominateur, pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites $-l$ et $+l$, doit toujours conserver le même signe. Mais il est facile de voir que pour $t = 0$, et pour t très-approché de zéro, valeurs pour lesquelles la série S (t) est évidemment convergente, le dénominateur dont il s'agit demeure toujours positif. Car le produit $t f'(\alpha)$, pour t très-petit, devient lui-même très-petit; à cause de la présence du facteur t, et à cause de ce qu'à mesure que t converge vers zéro; α converge vers u, et par suite $f'(\alpha)$ converge vers $f'(u)$. Il résulte de là que, tant que la série S (t) est convergente, le dénominateur $1 - t f'(\alpha)$ est toujours positif.

Considérons maintenant le numérateur $f(\alpha)$. D'abord il conserve, lui aussi, le même signe pour toutes les valeurs que prend α dépendamment des valeurs que peut acquérir t entre les limites $-l$ et $+l$. En effet, si, pour de pareilles valeurs de t, $f(\alpha)$ pouvait changer de signe, il faudrait que, parmi elles, il y en eût une de nature à rendre $f(\alpha)$ égal à zéro, ce qui ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait $\alpha = u$, et $f(u) = 0$; résultat contraire à l'une des hypothèses établies sur la nature de $f(x)$ au commencement de ce paragraphe.

D'ailleurs, ce même numérateur $f(\alpha)$ devient égal à $f(u)$ lorsque $t = 0$, car α se réduit alors à u. De ceci, et de tout ce qui précède, nous concluons que la valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$, donnée par l'équation (3), conserve toujours le même signe pour toute valeur de t, pour laquelle la série $S(t)$ est convergente, et, de plus, qu'elle est toujours positive ou toujours négative, selon que $f(u)$ est, lui-même, ou positif ou négatif : ce qui démontre le théorème en question.

Corollaire. — Supposons que la série $S(t)$ reste convergente en faisant $t = 1$; en d'autres termes, supposons que la limite l soit supérieure à l'unité; alors la série $S(1)$ sera convergente. Cela étant, on conclura du théorème précédent que la racine de l'équation

$$u - x + f(x) = 0, \tag{4}$$

donnée par la série $S(1)$, sera plus grande ou plus petite que u, suivant que $f(u)$ sera positif ou négatif.

En effet, si $f(u)$ est positif, la racine donnée par la série $S(1)$ est, en vertu du théorème précédent, croissante par rapport à t; et puisque en faisant $t = 0$, cette racine se réduit à u, il faut qu'en faisant $t = 1$, elle soit plus grande que u. On démontrera de même que, si $f(u)$ est négatif, la racine donnée par la série $S(1)$ sera plus petite que u.

Théorème 2. — Soit toujours l'équation (1). Partageons ses racines réelles en deux classes, en rangeant, dans la première,

toutes les racines plus grandes que le terme u, et, dans la seconde, les autres racines, savoir celles qui sont plus petites que u. Nous disons que la racine α, donnée par la série $S(t)$, est toujours, parmi toutes celles qui sont de la même classe qu'elle, la racine qui s'approche le plus de la quantité u, premier terme de l'équation (1).

La démonstration de ce théorème est très-simple. D'abord, il est évident que la racine α donnée par la série $S(t)$ converge vers u, à mesure que t converge vers zéro, comme nous l'avons déjà observé. D'ailleurs, cette racine α est toujours une racine simple pour toute valeur de t comprise entre les limites de convergence $-l$ et $+l$; car, pour de pareilles valeurs de t, la fonction dérivée $-1+tf'(\alpha)$ du premier membre de l'équation (1) demeure toujours différente de zéro, comme nous l'avons remarqué au commencement de la démonstration du théorème I. Ainsi, il est certain que, quand t converge vers zéro, la racine α est la seule de toutes les racines de l'équation (1) qui converge vers la limite u. D'où nous pouvons déjà conclure que, pour $t=0$ et pour t très-voisin de zéro, la racine α sera certainement celle des racines de l'équation (1) qui s'approche le plus de u. Cela posé, en faisant varier t depuis $t=0$ jusqu'à $t=\pm l$, il est évident que α, comparée aux seules racines qui sont de la même classe qu'elle, continuera, pour toute valeur de t, à être la racine la plus approchée de u, aussi longtemps qu'aucune racine de l'équation (1) ne viendra à acquérir pour $t=\tau$, une des valeurs, qu'avait déjà acquise la racine α elle-même, pour une valeur de t comprise entre $t=0$ et $t=\tau$. Il suffit donc de faire voir que ce cas est impossible, pour que le théorème qui nous occupe soit complétement démontré. Or admettons, pour un moment, le cas en question comme possible, et concevons, pour fixer les idées, que τ' étant une quantité comprise entre 0 et τ, la racine α acquière la valeur a pour $t=\tau$, et la valeur b pour $t=\tau'$; ce qui revient à supposer que la somme de la série $S(\tau)$ soit a, et celle de la série $S(\tau')$ soit b. Cela admis, supposons que, pour $t=\tau$,

la proposée (1) acquière, outre la racine a, donnée par la série S (τ), une autre racine égale à b et donnée par la série S (τ'). Il en résulterait que l'on aurait à la fois

$$(5) \qquad u - b + \tau' f(b) = 0, \text{ et } u - b + \tau f(b) = 0,$$

ce qui signifie que l'équation

$$(6) \qquad u - b + t f(b) = 0$$

résolue par rapport à t acquerrait deux racines $t = \tau$, et $t = \tau'$; ce qui est absurde; car cette équation est du premier degré par rapport à t.

Le théorème que nous venons de démontrer fait naître cette autre question. Est-ce qu'il ne pourrait pas être généralisé de manière à conclure que la racine α est celle de toutes les racines de la proposée, soit de même classe, soit de classe contraire, qui s'approche le plus de la quantité u? La réponse ne saurait être que négative. Car d'abord la démonstration précédente se résume en ceci, qu'aucune des racines de la proposée ne peut prendre, pour $t = \tau$, une de ces valeurs particulières par lesquelles la série S (t) a dû passer, en faisant varier t insensiblement depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$. Or, cette impossibilité ne suffirait pas à démontrer la proposition générale que nous venons de nous proposer. En effet, il pourrait se faire que, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$, une racine d'autre classe que α s'approchât de u en moins, tandis que α s'en approche en plus, ou *vice versa*, en sorte que, pour $t = \tau$, celle-là finît par s'approcher de u autant, et même plus que α, sans qu'elle doive pour $t = \tau$ acquérir une de ces valeurs par lesquelles doit passer α en vertu de la variation de t entre les limites $t = 0$ et $t = \tau$.

A l'appui de la remarque que nous venons de faire, nous allons produire un exemple.

Soit

$$(7) \qquad 3,76 - x - (0,1)\, x^2 (4,5 - x) = 0.$$

En comparant cette équation à la formule (4), on tire

$$(8) \qquad u = 3{,}76, \quad f(x) = -(0{,}1)\,x^2\,(4{,}5 - x).$$

D'ailleurs elle a ses trois racines réelles, lesquelles étant désignées par x_1, x_2, x_3, ont, pour leurs valeurs approchées,

$$(9) \qquad x_1 = -3, \quad x_2 = 2.507, \quad x_3 = 4{,}995.$$

Or, en calculant quelques-uns des premiers termes de la série S (1), tels qu'ils deviennent en vertu des équations (8), on verra que la même série donne actuellement la racine $x_2 = 2{,}507\ldots$ Mais si on forme les différences $u - x_2$ et $x_3 - u$, l'on trouve

$$(10) \qquad \begin{cases} u - x_2 = 3{,}76 - 2{,}507 = 1{,}253 \\ x_3 - u = 4{,}995 - 3{,}76 = 1{,}235. \end{cases}$$

D'où il suit que la racine x_3 et la racine x_2, données par la série S (1), sont de classes contraires, et la première d'entre elles approche du terme $u = 3{,}76$, plus que la seconde. Cet exemple démontre donc, à la dernière évidence, qu'il est de toute nécessité, pour la vérité de la conclusion du théorème 2, que la racine α, donnée par la série S (t), ne soit comparée qu'à celles qui sont de la même classe qu'elle, ainsi que nous l'avons fait dans l'énoncé du même théorème. Mais venons aux conséquences qui peuvent s'en déduire. Il s'applique certainement aussi à la série S (1), comme celle qui se tire de la série S (t) en y faisant $t = 1$. Par suite, ce théorème et le corollaire du théorème 1, combinés, amènent cette conclusion, qui résume, pour ainsi dire, toutes les propriétés de la racine donnée par la série de Lagrange.

Théorème 3. — Si $f(u)$ est positif, la série S(1) représente une racine de l'équation (4) plus grande que u, et s'approchant de u plus que toute autre racine de la même équation, qui, comme elle, se trouve plus grande que u. Si, au contraire, $f(u)$ est négatif, la racine que la même série S (1) représente, est plus

petite que u, et en approche plus que toute autre racine, qui, comme elle, se trouve plus petite que u.

Ce théorème va nous aider à déterminer l'ordre ou le rang qui convient à la racine donnée par la série S (1), lorsque les racines de l'équation (4) sont supposées rangées entre elles, ou dans l'ordre de leurs respectives grandeurs, ou d'après un autre caractère distinctif quelconque. Mais, à ce sujet, il est nécessaire d'établir les préliminaires suivants.

Préliminaires. — Désignons par ordre de grandeur, à commencer par la plus petite, par

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots\ldots x'_{p-1},\ x'_p,$$

les diverses racines réelles de la première dérivée de l'équation (4)

$$(11) \qquad -1+f'(x)=0,$$

racines que nous supposons être au nombre de p, et qui sont évidemment toutes indépendantes de la quantité u.

Ces p racines, conjointement avec l'infini négatif et positif, nous offrent les limites de $p+1$ intervalles, que nous indiquerons par $(-\infty\,..\,x'_1)$, $(x'_1\,..\,x'_2)\ldots\ldots(x'_p\,..\,\infty)$, en entendant généralement par $(x'_i\,..\,x'_{i+1})$ l'ensemble de tous les nombres compris entre les limites x'_i et x'_{i+1}. Or, par la théorie de la réalité des racines de toute équation, nous savons qu'entre les limites de chacun de ces intervalles, la proposée, savoir l'équation (4), ne peut jamais acquérir plus d'une racine réelle, qui d'ailleurs n'aura effectivement lieu que pour des valeurs convenables de u. Par exemple, pour que la proposée ait une racine comprise entre les limites x'_1 et x'_2, il faudra, comme on sait, que les deux résultats

$$u-x'_1+f(x'_1),\ \text{et}\ u-x'_2+f(x'_2)$$

soient de signe contraire; ce qui entraîne la nécessité que u soit une moyenne entre les quantités

$$x'_1-f(x'_1),\ \text{et}\ x'_2-f(x'_2).$$

Cela posé, désignons par x celle des racines de l'équation proposée qui, lorsqu'elle est réelle, se trouve comprise entre les limites $-\infty$ et x'_1; par x_2, celle qui, étant réelle, sera comprise dans l'intervalle $(x'_1 \ldots x'_2)$, etc. . .

Ces racines x_1, x_2, x_3, $\ldots x_{p+1}$, étant réelles, s'exprimeront par des moyennes de la forme suivante.

$$(12)\quad x_1 = M(-\infty \ldots x'_1),\ x_2 = M(x'_1 \ldots x'_2) \ldots x_{p+1} = M(x'_p \ldots \infty),$$

en désignant M par $(a \ldots b)$ une quantité quelconque comprise entre a et b.

Ainsi, nous appellerons x_1 la racine du premier ordre, x_2 celle du second, etc. . . et, en général, nous appellerons x_i la racine de la proposée de l'ordre i; et nous entendrons par là celle des racines de la proposée qui, étant réelle, se trouve comprise entre les limites x'_{i-1} et x'_i, en sorte qu'on a

$$(13)\qquad x_i = M(x'_{i-1} \ldots x'_i),$$

formule propre à reproduire toutes les précédentes, en attribuant à i les valeurs $1, 2, 3, \ldots p$, et remplaçant l'indice 0 et l'indice $p+1$ par $-\infty$ et $+\infty$.

Ajoutons, ce qui est au reste, par le théorème de Rolle, un résultat bien connu, que les dernières formules entraînent les suivantes.

$$(14)\quad x'_1 = M(x_1 \ldots x_2),\ x'_2 = M(x_2 \ldots x_3), \ldots x'_p = M(x_p \ldots x_{p+1})$$

dont une quelconque est

$$(15)\qquad x'_i = M(x_i \ldots x_{i+1}),$$

laquelle, toutefois, ne subsiste qu'autant que x_i et x_{i+1} sont deux quantités réelles.

Les $p+1$ racines de l'équation (4) que nous venons de signaler et de distinguer, soit entre elles, soit d'avec les autres de la même

équation (4), jouissent de quelques propriétés qu'il importe de faire connaître.

Première propriété. — x_i étant, d'après la notation que nous venons d'adopter, une quelconque de ces racines, nous disons d'abord que, regardée comme une fonction du paramètre u, elle est ou toujours croissante, ou toujours décroissante par rapport à ce même paramètre.

En effet, en différentiant l'équation (4) par rapport à x et à u, et changeant ensuite x en x_i, on aura

$$\frac{dx_i}{du} = \frac{1}{1 - f'(x_i)}. \tag{16}$$

Mais, en vertu de l'équation (13), x_i, tant qu'elle est réelle, est toujours une quantité comprise entre x'_{i-1} et x_i, qui sont, comme on sait, deux racines consécutives de la première dérivée (11). De là il devient évident que le dénominateur $-1 + f'(x)$ doit toujours conserver le même signe pour toute valeur réelle que peut acquérier x_i dépendamment du paramètre u. Pour de pareilles valeurs de x_i la quantité $\frac{dx_i}{du}$ ci-dessus sera donc, ou toujours positive, ou toujours négative : ce qui suffit pour démontrer la propriété en question.

Une seconde propriété des racines de l'équation (4), $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{p-1}$, c'est que, prises dans l'ordre de leurs indices, comme nous venons de les écrire, elles sont, par rapport au paramètre u, alternativement croissantes et décroissantes, ou *vice versa*.

Pour démontrer cette propriété, il suffit de faire voir que, si x_i est une racine croissante par rapport à u, la racine x_{i+1} sera nécessairement une racine décroissante par rapport au même paramètre. Or cela se démontre très-simplement ainsi qu'il suit.

La formule (15) montre que les deux résultats $1 - f'(x_i)$ et $1 - f'(x_{i+1})$, qu'on obtient en substituant dans le premier membre de l'équation (11) x_i et x_{i+1} au lieu de x, doivent être affectés de signe contraire. Par suite, eu égard à la valeur de $\frac{dx_i}{du}$

donnée par l'équation (16), et à celle de $\frac{dx_{i+1}}{du}$ qu'on tirerait de l'équation (16) en y changeant i en $i+1$, on conclura que ces deux quantités $\frac{dx_i}{du}$ et $\frac{dx_{i+1}}{du}$ sont affectées de signe contraire. Ce qui prouve la proposition qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Les racines d'ordre impair, x_1, x_3, x_5....., en vertu de ce qui précède, seront toujours, évidemment, ou toutes à la fois croissantes, ou toutes à la fois décroissantes, et il en sera de même des racines d'ordre pair, x_2, x_4, x_6.....

De plus, si les racines d'ordre impair sont croissantes, celles d'ordre pair seront décroissantes, et *vice versa*. — Il est bon d'ajouter que les deux quantités $1-f'(-\infty)$, et $1-f'(x_1)$ doivent être toujours de même signe. Car si elles étaient de signe contraire, la première dérivée (11) devrait acquérir une racine comprise entre $-\infty$ et x_1 : ce qui est contraire à la signification que nous avons attribuée à x_i.

Au contraire, les deux quantités $1-f'(x_i)$ et $1-f'(x_{i+1})$ doivent être de signe contraire, eu égard à la formule (15). Il s'ensuit qu'on aura les deux suites de signes que nous allons écrire; Savoir : si

$$1-f'(-\infty)=-, \tag{17}$$

on aura

$$1-f'(x_1)=-,\quad 1-f'(x_2)=+,\quad 1-f'(x_3)=-\ 1\ \text{etc...} \tag{18}$$

Partant, on aura, en général

$$\frac{dx_i}{du}=\frac{1}{1-f'(x_i)}=\pm, \tag{19}$$

où le signe $+$ a lieu lorsque i est pair, et le signe $-$ lorsque i est impair.

Ce qui prouve que, dans le cas actuel, les racines de la proposée d'ordre impair sont décroissantes, et les racines d'ordre pair croissantes.

Si, au contraire, l'on a

$$1 - f'(-\infty) = +, \tag{20}$$

il en résultera

$$1 - f'(x_1) = +,\ 1 - f'(x_2) = -,\ 1 - f'(x_3) = +\ \text{etc...} \tag{21}$$

et l'on en conclura que les racines d'ordre impair sont, actuellement, croissantes, et celles d'ordre pair décroissantes.

Tels sont les préliminaires qu'il fallait établir. Essayons maintenant de déterminer l'ordre appartenant à la racine α donnée par la série S(1) tirée de l'équation proposée (4), en suivant toujours le mode de distinction et d'arrangement des racines que nous venons d'adopter.

La question revient à déterminer le rang que la racine α peut, dans tous les cas, occuper dans la suite de termes

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_p,\ x_{p+1} \tag{22}$$

formée par celles des racines de la proposée (4) qui sont indiquées par les formules (12) et (13).

Pour cela, nous remarquerons d'abord que la racine α (celle qui est donnée par la série S(1) appartient toujours au nombre de celles des racines composant la suite (22), qui sont croissantes par rapport au paramètre u. En effet, la valeur de $\frac{d\alpha}{du}$ qu'on tire de l'équation (16) en y changeant x_i en α, étant

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{1 - f'(\alpha)}, \tag{23}$$

doit demeurer toujours positive, attendu que le dénominateur $1 - f'(\alpha)$ reste toujours positif, ainsi que nous l'avons fait voir à l'occasion de la démonstration du théorème 1 de ce paragraphe, et à l'aide du théorème de M. Cauchy, cité dans cet endroit.

Cela posé, supposons, pour fixer les idées, que ce soient les

racines impaires x_1, x_3, x_5... qui se trouvent croissantes, et que, par suite, celles d'ordre pair soient décroissantes (bien entendu par rapport à u); et cherchons, dans cette hypothèse, de quel ordre peut successivement devenir la racine α, donnée par la série S(1), tandis que u varie entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, de manière à prendre toutes les valeurs propres à rendre la série S(1) convergente. Ces valeurs peuvent être partagées en plusieurs groupes, compris chacun dans un des intervalles que nous avons signalés, et indiqués plus haut par $(-\infty .. x'_1)$, $(x'_1 .. x'_2)$, ... $(x'_p .. \infty)$. Supposons, en général, que u reçoive une valeur comprise entre les limites x'_i et x'_{i+1}, en sorte qu'elle soit une certaine moyenne entre ces deux racines de l'équation (11). Alors, pour déterminer l'ordre qui convient à la racine α, il faudra reconnaître, auparavant, les deux racines croissantes de la proposée (4) les plus approchées de u, l'une en plus et l'autre en moins. Pour cela, il convient de distinguer les deux cas de i impair et de i pair.

Si i est impair, les deux racines en question ne peuvent être que x_i et x_{i+2}, pourvu, toutefois, que celles-ci soient réelles. On voit, de plus, que ces deux racines resteront toujours, l'une, savoir x_i plus petite, et l'autre, savoir x_{i+2}, plus grande que u, pour quelque valeur que ce paramètre vienne à prendre entre les limites x'_i et x'_{i+1}. Car, tant que les deux racines x_i et x_{i+2} restent réelles, on a toujours, par les formules (12) et (13),

$$x_i = M(x'_{i-1} .. x'_i), \quad x_{i+2} = M(x'_{i+1} .. x'_{i+2}),$$

quel que soit u, depuis $u = -\infty$, jusqu'à $u = +\infty$.

Ainsi, x_i et x_{i+2} étant réelles, la racine α, donnée par la série S(1), tandis que u varie entre les limites x'_i et x'_{i+1}, sera, en vertu du théorème 3, tantôt celle de l'ordre i, savoir x_i, tantôt celle de l'ordre $i+2$, ou x_{i+2}, selon qu'on aura $f(u) < 0$, ou $f(u) > 0$. Si l'indice i est pair, les deux racines croissantes les plus voisines de u, d'un côté et de l'autre, ne peuvent appartenir, au plus, qu'à l'un de ces deux couples, dont le premier est

x_{i-1} et x_{i+1}, et l'autre x_{i+1} et x_{i+3}, pourvu, cependant, que ces trois racines soient réelles. Ainsi, ces trois racines étant réelles, on peut conclure du théorème 3 que l'une d'entre elles sera, certainement, celle des racines de l'équation (4) que la série S(1) représente, tandis que le paramètre u varie entre les limites x'_i et x'_{i+1}.

Les résultats que nous venons d'établir à l'égard de l'ordre de la racine α, donnée par la série S(1), sont très-importants en ce qu'ils montrent d'une manière très-évidente que l'indice de l'ordre de cette racine, loin de demeurer constant, pour quelque valeur que ce soit de u, peut, au contraire, s'accroître à mesure que u croît lui-même, en sorte que nous pouvons établir ce théorème:

Théorème 4. — Soient les racines de l'équation (4) d'ordre impair, savoir:

$$x_1,\ x_3,\ x_5 \ldots\ldots$$

des racines croissantes; et soit u' une première valeur de u comprise entre les limites x'_i et x'_{i+1}, et pour laquelle la série S(1) est convergente, et les racines croissantes x_i et x_{i+2}, si i est impair, ou bien x_{i-1}, x_{i+1}, et x_{i+3}, si i est pair, acquièrent des valeurs réelles. Concevons que de cette première valeur u' de u, on passe à une seconde valeur u_1 de cette variable, comprise entre les limites $x'_{i'}$ et $x'_{i'+1}$, où i' dépasse i au moins de trois unités, si i est impair, ou de cinq unités, si i est pair; et supposons que cette seconde valeur u_1 soit de nature à rendre convergente la série S(1), et réelles les deux racines de la proposée, $x_{i'}$ et $x_{i'+2}$ si i est impair, ou bien les trois racines de la proposée $x_{i'-1}$, $x_{i'+1}$, x'_{i+3}, si i est pair. Alors l'indice de l'ordre de la racine α est, à coup sûr, plus grand, pour cette dernière valeur u_1, que pour la première $u = u'$.

Nous ne nous arrêterons pas ici à examiner séparément le cas où les racines croissantes de l'équation (4), au lieu d'être celles d'ordre impair, comme nous l'avons supposé précédemment, seraient celles d'ordre pair. Car on voit sans peine comment il faut

modifier les résultats précédents, pour en obtenir ceux qui conviennent à cette dernière hypothèse. Mais nous passerons tout de suite à établir un rapprochement très-important entre les résultats que nous venons d'obtenir, sur l'ordre de la racine donnée par la série S (1), et un théorème devenu très-célèbre par le nom de son auteur. Je veux parler du théorème de Lagrange, cité dans la préface de ce mémoire, et qu'on trouve dans la note XI de la résolution des équations numériques de ce grand géomètre.

Pour mieux voir les conséquences de ce rapprochement, continuons, pour fixer les idées, à admettre l'hypothèse que ce soient les racines d'ordre impair qui sont croissantes. Il sera facile de modifier les raisonnements suivants, de manière à les rendre applicables à l'hypothèse inverse.

Concevons qu'on ait attribué à u une valeur u comprise entre les limites x'_i et x'_{i+1}, et de nature à rendre convergente la série S (1), et réelles la plupart des racines composant la suite (22), d'ordre inférieur à i, et, notamment, les racines x_i et x_{i+2} si i est impair, ou bien x_{i-1}, x_{i+1}, et x_{i+2} si i est pair. Alors en rangeant, pour un moment, les racines réelles de la proposée entre elles, d'après un nouveau caractère distinctif, savoir d'après leurs respectives grandeurs, il est évident que la racine x_i, qui, dans le premier mode d'arrangement précédemment adopté, est celle de l'ordre i, si elle est réelle, occupera dans la suite formée par les racines réelles rangées dans l'ordre de leurs grandeurs, une place dont le rang ne pourrait être qu'égal à i, ou bien inférieur à i d'un petit nombre d'unités. D'ailleurs, il est bon de rappeler que la racine α donnée par la série S (1), pour la valeur $u = u$, que nous venons d'indiquer ci-dessus, comparée aux autres racines d'après le mode d'arrangement adopté, ne peut être que x_i ou x_{i+2} si i est impair, ou bien l'une de ces trois x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3} si i est pair. D'après cela, il est évident que si, pour un moment, on compare la racine α aux autres racines réelles, par rapport à sa grandeur, comme nous venons de le suggérer ci-dessus, elle devra prendre parmi celles-ci un rang qui pourra, sans doute, être

moindre que i, mais qui, en général, sera d'autant plus élevé, que l'indice i et le nombre des racines réelles de la proposée, comprises entre les limites $-\infty$ et u, sont plus grands.

Il résulte de là cette conséquence incontestable que, contrairement au théorème de Lagrange déjà cité, la racine α, donnée par la série S (1), ne peut pas représenter toujours la racine la plus petite de l'équation (4). Mais, tout au contraire, elle représente une racine susceptible de devenir, par rapport aux autres racines réelles, d'un ordre d'autant plus élevé que la quantité u est plus considérable.

Comme, eu égard à la haute autorité justement accordée au nom de Lagrange, la conclusion que nous venons de tirer pourrait rencontrer quelque résistance, pour en mettre la vérité dans tout son jour, nous croyons devoir produire les exemples suivants.

Soit, en premier lieu, l'équation

$$(24) \qquad 6{,}05 - x + (0{,}1)\, x^2 (x-5)(x-6)(x-6{,}1) = 0.$$

Sa première dérivée, très-facile à former, peut s'écrire ainsi :

$$(25) \qquad \begin{aligned} &- 10 + x(x-5)(x-6)(3x-12{,}2) \\ &+ x^2 (x-6{,}1)(2x-11) = 0. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on s'assure aisément qu'elle a ses quatre racines toutes réelles; et en les désignant, d'après la notation introduite dans ce paragraphe, par x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, on trouvera

$$(26) \qquad \begin{aligned} x'_1 &= M(-\infty..0), \quad x'_2 = M(2..3). \\ x'_3 &= M(5..6), \quad x'_4 = M(6{,}1..6{,}2). \end{aligned}$$

Venons, maintenant, aux racines de la proposée elle-même (24).

Par la simple substitution des premiers nombres naturels au lieu de x, on s'assurera sans peine qu'elles sont toutes réelles. Et en les désignant, d'après la notation adoptée, par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, on aura

$$(27)\quad \begin{cases} x_1 = M(-\infty\,..\,0), & x_2 = M(0\,..\,1), & x_3 = M(4\,..\,5), \\ x_4 = M(6\,..\,6{,}1), & x_5 = M(6{,}2\,..\,6{,}3). \end{cases}$$

Cela posé, en comparant cette même équation à la formule (4), on a

$$(28)\quad u = 6{,}05,\ f(x) = (0{,}1)\,x^2\,(x-5)\,(x-6)\,(x-6{,}1).$$

En outre, il est facile de voir que, des deux conditions (17) et (20) établies plus haut, c'est la condition (17) qui se trouve ici satisfaite. Ce qui prouve que les trois racines d'ordre impair, x_1, x_3, x_5, sont décroissantes, et celles d'ordre pair, x_2 et x_4, sont croissantes. Par suite, eu égard à ce que la racine α donnée par la série S (1) est toujours une racine croissante, on voit que cette série, telle qu'elle résulte de l'équation (24), ne peut donner que la racine x_2 ou bien la racine x_4. Mais, d'un autre côté, on a

$$(29)\qquad f(u) = f(6{,}05) = -\,0{,}009608156.$$

De cette valeur négative de $f(u)$, on conclura, eu égard au théorème 3, que la série S (1) doit donner celle des deux racines croissantes de la proposée (24) qui se trouve immédiatement au-dessous de 6,05, laquelle, d'après les formules (27), n'est autre que celle du quatrième ordre, savoir x_4. Tout ce que nous venons de dire est confirmé par les résultats suivants. En calculant les sept premiers termes de la série en question, on trouve

$$(30)\quad \begin{cases} f(u) = -0{,}009608156 \\ \frac{1}{1.2}\frac{df^2(u)}{du} = +0{,}000118438\,5 \\ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2f^3(u)}{du^2} = +0{,}000035303\,37 \\ \frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^3f^4(u)}{du^3} = -0{,}000017463\,7 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{d^4f^5(u)}{du^4} = -0{,}000002560\,84 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\frac{d^5f^6(u)}{du^5} = +0{,}000002304\,2 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{d^6f^7(u)}{du^6} = +0{,}000002304\,5 \end{cases}$$

En nous arrêtant à ces termes, on aura pour somme de la série

$$6{,}040824.$$

Il est facile de vérifier que ce nombre est la valeur approchée de la racine x_4 de l'équation (24) à une unité près du sixième ordre décimal. Il suffit, pour cela, de faire dans le premier membre de cette équation (24), d'abord $x = 6{,}040824$, et puis $x = 6{,}040825$; on obtiendra, de la sorte, deux résultats de signe contraire.

Maintenant, remarquons que la racine de la proposée (24), égale à $6{,}040824$, que nous venons de voir être celle du quatrième ordre, d'après le mode d'arrangement des racines que nous avons adopté dans ce paragraphe, demeure encore celle du même rang, lorsqu'on range les racines de la proposée d'après leurs grandeurs respectives. Ce résultat, auquel vient de nous conduire l'exemple choisi, est donc en parfaite contradiction avec le théorème de Lagrange, qu'il s'agissait d'apprécier.

Nous pourrions multiplier à l'infini les exemples qui offrent des résultats contradictoires avec ce théorème. Mais on comprend que

cela serait parfaitement inutile. Nous nous bornerons donc à ce second exemple.

Soit l'équation

$$(31) \qquad 5{,}001 - x - (0{,}1)\, x^2 (x - 5)^2 = 0.$$

Sa première dérivée est

$$(32) \qquad -1 - (0{,}2)\, x (x - 5)(2x - 5) = 0.$$

On trouvera sans peine que les trois racines de cette équation sont réelles, et qu'en les désignant par x'_1, x'_2, x'_3, elles auront pour leurs valeurs

$$(33) \quad x'_1 = M(-\infty \,..\, 0),\ x'_2 = M(2\,..\,3),\ x'_3 = M(4\,..\,5).$$

En ce qui concerne les racines de la proposée (31), on se convaincra qu'elles sont aussi toutes réelles, et qu'elles peuvent s'exprimer par les moyennes suivantes.

$$(34) \qquad \begin{aligned} x_1 &= M(-\infty\,..\,0), \quad x_2 = (1\,..\,2), \\ x_3 &= M(4\,..\,5), \qquad x_4 = M(5\,..\,5{,}01). \end{aligned}$$

Reste à voir laquelle de ces racines la série S(1) représente. On a dans ce cas

$$(35) \qquad u = 5{,}001,\ f(x) = -(0{,}1)\, x^2 (x - 5)^2;$$

d'où il suit qu'on aura

$$(36) \qquad 1 - f'(-\infty) < 0.$$

Par conséquent les racines x_1 et x_3 seront décroissantes, et x_2 et x_4 croissantes par rapport au paramètre u. La série S (1) appliquée à l'équation (31) ne peut donc donner que x_2 ou x_4. Mais on a

$$(37) \qquad f(u) = f(5{,}001) = -0{,}0000025.$$

De ce résultat négatif et du théorème 3, on conclura que la série S (1) doit donner la racine immédiatement inférieure à 5,001,

laquelle, d'après les formules (34), est x_4. Cette conclusion est confirmée par le calcul des premiers termes de la série. On trouve en effet

$$(38)\quad \begin{cases} f(u) = -\,0{,}0000025010 \\ \frac{1}{1.2}\frac{d f^2(u)}{du} = +\,0{,}000000006256 \\ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2 f^3(u)}{du^2} = -\,0{,}000000000023478. \end{cases}$$

Ces valeurs prouvent d'abord la convergence de la série, convergence qui était d'ailleurs assez démontrée parce que 5,001 est une quantité très-voisine de la racine double, et égale à 5, de l'équation $f(x) = 0$, (§ I.). Ensuite elles donnent, pour somme de la série,

$$5{,}0009975,$$

nombre qui représente la valeur approchée de la racine x_4 à une unité près du septième ordre décimal, ainsi que le confirment les deux résultats, de signe contraire, qu'on obtient en substituant dans le premier membre de la proposée (31) $x = 5{,}0009975$, et $x = 5{,}0009976$.

Mais la racine désignée par x_4, et regardée comme celle du quatrième ordre, d'après le mode d'arrangement des racines ici adopté, demeure encore la racine du même rang, lorsqu'on détermine sa place, en la comparant aux autres par rapport à sa grandeur. Nous avons donc, dans l'exemple que nous venons de considérer, un second résultat contradictoire avec le théorème de Lagrange.

§ III.

Après avoir démontré que le théorème de Lagrange sur l'ordre de la racine donnée par la série de Lagrange, désignée par S (1)

dans les paragraphes précédents, n'est point généralement vrai, on est naturellement porté à se demander quelle est la cause qui a pu entraîner ce grand géomètre dans l'erreur. Pour cela, nous avons à considérer la démonstration que Lagrange a donnée de son théorème. Elle se trouve dans la note XI de sa Résolution des équations numériques. A la vérité, cette démonstration a été rappelée par d'autres géomètres, et notamment par Lacroix dans le tome I de son Calcul différentiel. Mais partout, au fond, elle est restée la même; en sorte qu'on peut dire que nous n'avons du théorème en question qu'une démonstration, celle de Lagrange, dont l'examen va former l'objet de l'analyse suivante.

Mais nous devons faire remarquer tout d'abord que l'objet de ce paragraphe est double. L'un est celui que nous venons de signaler; l'autre consiste à montrer de quelle manière il faut se servir de la série de Lagrange pour en obtenir séparément toutes les racines réelles et simples de toute équation proposée

$$\text{(1)} \qquad F(x) = 0,$$

dont le premier membre $F(x)$ est ici supposé une fonction réelle quelconque de x.

Nous venons de dire racines réelles et simples; réelles, parce que c'est aux seules racines réelles que nous voulons nous borner ici; simples, parce que la série de Lagrange ne saurait être nécessairement convergente lorsque la racine qu'elle devrait donner est multiple, comme nous l'avons déjà remarqué au commencement de la démonstration du théorème I du paragraphe II.

Hâtons-nous de dire que, pour remplir ce second objet, nous avons adopté un mode de réduction de la proposée (1) à la forme nécessaire

$$\text{(2)} \qquad u - x + f(x) = 0,$$

qui rentre dans celui même que Lagrange a suivi comme fondement de son théorème.

Avant tout, rappelons sommairement la démonstration du théorème de Lagrange, telle qu'elle a été donnée dans la note déjà citée.

Lagrange suppose d'abord que l'équation (1) soit réduite à la forme (2), de manière que $f(x)$ soit une fonction de x entière et rationnelle, telle que

$$f(x) = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + \ldots \tag{3}$$

Nous remarquerons en passant que cela revient à mettre l'équation (1) sous la forme

$$u - x + [x - u + k\,F(x)] = 0, \tag{4}$$

u et k étant deux quantités constantes et entièrement arbitraires.

Cela posé, soient, pour employer les notations de Lagrange,

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$$

les diverses racines réelles ou imaginaires de l'équation (1).

Lagrange fait voir d'abord que, $\psi(x)$ étant une autre fonction de x entière et rationnelle, on aura, en général,

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^n} + \frac{\psi(\beta)}{\beta^n} + \frac{\psi(\gamma)}{\gamma^n} + \ldots\ldots = \Psi(u) + \Psi'(u) f(u) + \frac{1}{1.2}\frac{d[\Psi'(u) f^2 u]}{du} + \text{etc}\ldots \tag{5}$$

où $\Psi(u) = \frac{\psi(u)}{u^n}$ et $\Psi'(u) = \frac{d}{du}\left(\frac{\psi(u)}{u^n}\right)$, et observant de plus que n est un nombre entier et positif, et que l'on ne doit retenir que les termes qui contiendront des puissances négatives de u.

Nous ajouterons, de notre part, que la formule (5) subsiste même en supposant que la fonction $\psi(x)$ ait des facteurs en x communs avec le premier membre de l'équation (1), par exemple

$x - \alpha$, $x - \beta$, . . . auquel cas celui des termes de la même formule (5) qui contient α ou β, etc., savoir $\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}$, ou $\frac{\psi\beta}{\beta^n}$, s'évanouirait de lui-même. Cette remarque est, sans doute, de la dernière évidence. Mais nous tenons à la faire explicitement; car, à ce qu'il nous semble, c'est faute d'y avoir eu égard, que Lagrange se trompa dans la conclusion qu'il tira de son analyse, comme nous le verrons plus bas.

Maintenant supposons, avec Lagrange, que dans la formule (5) n soit infiniment grand. On pourra alors regarder la fonction $\Psi(u) = \frac{\psi(u)}{u^n}$ comme ne contenant que des puissances négatives de u. Même chose pour les fonctions $\Psi'(u) \times fu$, $\Psi'(u) \times f^2 u$, etc. Quoique cette hypothèse ne soit pas exacte pour toutes ces dernières fonctions à l'infini, il suffit cependant qu'elle le soit pour les premières d'entre elles en nombre très-grand; car les restantes pourront être négligées en vertu de la convergence tacitement admise de la série composant le second membre de l'équation (5). Nous pouvons ainsi regarder cette série comme allant à l'infini sans aucune interruption.

Mais, d'autre part, Lagrange démontre qu'en désignant par $[\Psi(u)]$ cette dernière série, et par $[\Pi(u)]$ celle qui en résulte par le changement de $\Psi(u)$ en $\Pi(u)$, la fonction $f(u)$ restant la même, on aura

$$(6) \qquad \begin{cases} 1^\circ\ [\Psi(u)] \times [\Pi(u)] = [\Psi(u) \times \Pi(u)]. \\ 2^\circ\ [\Psi(u)] : [\Pi(u)] = [\Psi(u) : \Pi(u)]. \end{cases}$$

D'après la seconde de ces deux formules, et eu égard à la formule (5), si l'on fait

$$\Pi(u) = \frac{\psi(u)}{u^{n+r}}$$

n étant toujours très-grand, et r un nombre quelconque fini, le quotient de la quantité

$$(7) \qquad \frac{\psi\alpha}{\alpha^n} + \frac{\psi\beta}{\beta^n} + \frac{\psi\gamma}{\gamma^n} + \text{etc. . .}$$

divisée par la quantité

$$(8) \qquad \frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}} + \frac{\psi\beta}{\beta^{n+r}} + \frac{\psi\gamma}{\gamma^{n+r}} + \ldots.$$

s'exprimera par la série

$$(9) \qquad u^r + r\,u^{r-1} f u + \frac{r}{1.2}\frac{d}{du}(u^{r-1} f^2 u) + \frac{r}{1.2.3}\frac{d^2}{du^2}(u^{r-1} f^3 u) + \text{etc}\ldots$$

dont les termes sont tous indépendants de la fonction ψ.

Cela étant, Lagrange admet que n étant, par hypothèse, un nombre infiniment grand, les deux quantités ci-dessus (7) et (8) se réduisent à leurs premiers termes $\frac{\psi\alpha}{\alpha^n}$ et $\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}}$, α étant la plus petite des racines réelles de l'équation (1). Cette hypothèse admise, le quotient de la quantité (7) divisée par (8) se réduirait à α^r, et le théorème faisant l'objet de cette discussion se trouverait par là démontré.

Mais l'hypothèse précédente, sur laquelle s'appuie Lagrange, à savoir que le quotient mentionné tout à l'heure se réduise toujours à α^r, n étant infiniment grand, n'est point généralement admissible. En effet, il faudrait pour cela que la proposée n'eût pas de racines imaginaires, et que $\psi\alpha$ ne fût jamais nul pour aucune des valeurs que peut comporter ψx d'après l'esprit de l'analyse de Lagrange. Mais, au contraire, aucune de ces deux conditions n'est exigée par l'analyse mentionnée. Bien plus : la seconde de ces deux conditions, loin d'être exigée par cette analyse, y est absolument contraire. Car, d'après cette même analyse, et notamment eu égard à la remarque faite plus haut à propos de la formule (5), la fonction $\psi(x)$ est entièrement arbitraire, et seulement astreinte à être une fonction de x entière et rationnelle.

D'où il s'ensuit qu'il est permis de la regarder comme ayant des facteurs en x, $x-\alpha$, $x-\beta$, etc., communs avec le premier membre de l'équation (1), ce qui rendrait nuls $\psi\alpha$, $\psi\beta$, etc.

Partant, pour faire ressortir la véritable valeur qui convient, d'après l'esprit de l'analyse de Lagrange, au quotient de la quantité (7) divisée par (8), on ne peut s'empêcher de considérer distinctement les différents cas de $\psi\alpha = 0$; ou $\psi\alpha = 0$, et à la fois $\psi\beta = 0$, etc. Pour cela, nous nous y prendrons de la manière suivante.

Supposons toujours (hypothèse conforme à celle sur laquelle s'appuie Lagrange) que le premier membre de l'équation (1) soit une fonction réelle de x. Il s'ensuit que les racines imaginaires de cette équation, s'il y en a, ne peuvent être que conjuguées deux à deux. Ainsi, en désignant par ε_1 et ε'_1, les deux racines imaginaires conjuguées, dont le module commun est π_1, et l'argument φ_1, on aura

$$(10)\quad \varepsilon_1 = \pi_1(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1),\ \varepsilon'_1 = \pi_1(\cos\varphi_1 - \sqrt{-1}\sin\varphi_1),$$

d'où il vient

$$(11)\qquad \frac{\psi\varepsilon_1}{\varepsilon_1^n} + \frac{\psi\varepsilon'_1}{\varepsilon'^n_1} = \frac{2}{\pi_1^n}(A_1\cos n\varphi_1 + B_1\sin n\varphi_1)$$

en faisant, d'après la théorie des quantités imaginaires,

$$(12)\qquad \psi[\pi_1(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\sin\varphi_1)] = A_1 \pm B_1\sqrt{-1}.$$

Une équation analogue à celle (11) aura lieu pour toute autre couple de racines imaginaires.

Cela posé, soient dans leur ordre de grandeur, $\pi_1, \pi_2\ \pi_3 \ldots \pi_i\ \pi_{i+1} \ldots$ les modules des couples des racines imaginaires conjuguées $\varepsilon_1\ \varepsilon'_1$, $\varepsilon_2\ \varepsilon'_2$, etc., et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots$ les racines réelles de l'équation (1).

Nous disons que, quel que soit $\psi(x)$, le quotient de la quantité (7) divisée par la quantité (8) tombera toujours dans l'un de ces deux cas : ou il ne représentera aucun résultat numérique et déterminé (comme étant la limite de quotients qui varient d'une manière vague et discontinue à mesure que n tend vers l'infini);

ou bien il donnera la puissance r d'une d'entre les racines réelles de la proposée. Il y a plus : à l'aide de valeurs convenables données à la même fonction ψx, le quotient dont il s'agit peut être amené à représenter successivement chacune des racines réelles de l'équation (1).

Pour démontrer ce théorème soit α_i la plus petite des racines réelles de la proposée, qui ne sont pas communes à l'équation $\psi x = 0$. Soit encore π_i le plus petit de tous les modules des racines imaginaires de la proposée, qui ne sont pas communes à l'équation $\psi x = 0$. Distinguons de plus ces deux cas : l'un, lorsque α_i est $< \pi_i$, l'autre, où α_i est $> \pi_i$. Dans le premier cas, pour connaître la véritable valeur du quotient de la quantité (7) divisée par (8), nous écrirons ces deux quantités sous la forme suivante, eu égard à l'équation (11).

$$(13)\qquad \frac{1}{\alpha_i^n}\left[\psi\alpha_i + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^n \psi\alpha_1 + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_2}\right)^n \psi\alpha_2 + \text{etc}\ldots + 2\left(\frac{\alpha_i}{\pi_1}\right)^n (A_1 \cos n\varphi_1 + B_1 \sin n\varphi_1) + \text{etc}\ldots\right]$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\alpha_i^{n+r}}\left[\psi\alpha_i + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^{n+r} \psi\alpha_1 + \text{etc}.\ldots + 2\left(\frac{\alpha_i}{\pi_1}\right)^{n+r} (A_1 \cos(n+r)\varphi_1 + B_1 \sin(n+r)\varphi_1) + \ldots\right]$$

Or le quotient de la première de ces quantités divisée par l'autre se réduit évidemment à α_i^r en faisant $n = \infty$. Car, eu égard aux hypothèses faites sur α_i et π_i, et notamment à ce qu'on suppose ici $\alpha_i < \pi_i$, les termes des expressions (13) et (14) qui suivent le premier se réduisent tous à zéro, parce que chacun d'eux est le produit de deux facteurs, dont l'un ou l'autre est égal à zéro. Ainsi, par exemple, le terme $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^n \psi\alpha_1$ est égal à zéro parce que, par hypothèse, ou le facteur $\psi\alpha_1$ est lui-même égal à zéro, ou bien la fraction $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$ est moindre que l'unité, d'où il suit $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^n = 0$ en faisant n infini.

Mais si l'on a $\alpha_i > \pi_i$, alors, eu toujours égard à l'équation (11), il faut écrire les deux quantités (7) et (8) sous la forme

$$(15)\quad \frac{2}{\pi_i^n}\left[A_i \cos n\varphi_i + B_i \sin n\varphi_i + \left(\frac{\pi_i}{\alpha_i}\right)^n \psi\,\alpha_1 + \left(\frac{\pi_i}{\alpha_2}\right)^n \psi\,\alpha_2 + \text{etc...}\right]$$

$$(16)\quad \frac{2}{\pi_i^{n+r}}\left[A_i \cos(n+r)\varphi_i + B_i \sin(n+r)\varphi_i + \ldots + \left(\frac{\pi_i}{\alpha_1}\right)^{n+r} \psi\,\alpha_1 + \left(\frac{\pi_i}{\alpha_2}\right)^{n+r} \psi\,\alpha_2 + \ldots\right]$$

Le quotient de la première de ces quantités divisée par la seconde se réduit, comme on le voit sans peine, à

$$(17)\quad \frac{\pi_i^r (A_i \cos n\varphi_i + B_i \sin n\varphi_i)}{A_i \cos(n+r)\varphi_i + B_i \sin(n+r)\varphi_i}.$$

Or cette dernière quantité a évidemment une valeur vague et indéterminée; car les arcs $n\varphi_i$ et $(n+r)\varphi_i$, dans l'hypothèse de n infini, peuvent indifféremment représenter un nombre entier ou fractionnaire de circonférences. Ainsi cette quantité, analytiquement parlant, n'est autre chose que l'indication de ce fait, que les différentes valeurs que le quotient dont il s'agit acquiert en faisant varier n (nombre entier) à l'infini, sont, dans le cas où α_i est $> \pi_i$, discontinues, ne s'approchant jamais constamment d'aucune limite.

D'après ce qui précède, il est facile de trouver la valeur qu'il faut attribuer à $\psi(x)$ pour amener le quotient qui nous occupe à représenter la puissance r de telle racine réelle que l'on voudra de l'équation (1), par exemple de α_i. On prendra, à cet effet, pour $\psi(x)$ une fonction quelconque, qui ait en commun avec $F(x)$, 1° les facteurs $x - \alpha_1, \ldots x - \alpha_{i-1}$, contenant toutes les racines réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$ qui sont moindres que α_i; 2° les facteurs $x - \varepsilon_1$, $x - \varepsilon'_1$, $x - \varepsilon_2$, $x - \varepsilon'_2, \ldots$ correspondant à toutes les racines imaginaires conjuguées, dont les modules sont aussi moindres que α_i. La valeur de $\psi(x)$, ainsi déterminée, réduira sans doute la valeur du quotient dont il s'agit à la puissance α_i^r.

Il est donc constant que le quotient de la quantité (7) divisée par (8), considéré en lui-même, est, en vertu de la fonction arbitraire ψ, susceptible de plusieurs valeurs, savoir celles que nous venons d'indiquer dans le théorème précédent. Certes, parmi ces valeurs, il y en a une qui est celle de la somme de la série (9). Mais l'analyse de Lagrange ne montre pas, remarquons-le bien, laquelle d'entre elles sera, dans chaque cas, la valeur de la même série. Par conséquent, la démonstration dont il s'agit est insuffisante à prouver le théorème que Lagrange voulait par là établir, et elle n'est propre, au plus, qu'à prouver que la série (9) représente la puissance r d'une des racines réelles de l'équation (1), sans rien indiquer encore de ce qui distingue cette racine des autres.

Mais il est encore un autre point de vue sous lequel la démonstration de Lagrange peut être facilement réfutée. C'est la manière même de ramener toute équation proposée à la forme (2), sur laquelle s'appuie la même démonstration. Cette manière consiste, comme on l'a vu, à réduire toute équation proposée à la forme (2), avec cette seule condition que, dans la formule de réduction, $f(x)$ soit une fonction entière de x de la forme (3). Or si l'équation proposée est (1), la fonction $f(x)$ satisfera à la condition mentionnée si l'on fait

$$f(x) = x - u + k\,\mathrm{F}(x), \tag{18}$$

ce qui revient à écrire l'équation (1) sous la forme

$$u - x + [x - u + k\,\mathrm{F}(x)] = 0, \tag{19}$$

où il faut remarquer avec soin que u et k sont deux quantités constantes qui, d'après l'esprit de l'analyse de Lagrange, restent indéterminées, et qu'on peut, par suite, choisir à volonté. Or, la série de Lagrange tirée de l'équation (19), loin de donner constamment la plus petite racine de l'équation (1) (ce qui devrait être si le théorème de Lagrange était vrai), en disposant con-

venablement de u et k, peut toujours remplir cette double condition : 1° qu'elle soit convergente; 2° qu'elle nous donne telle racine réelle et simple que l'on voudra de toutes les racines de l'équation (1).

Supposons, par exemple, que α soit une des racines réelles et simples de l'équation (1), et qu'il s'agisse de la trouver au moyen de la série de Lagrange appliquée à l'équation (19) : les valeurs de u et k qu'il faudra prendre à cet effet sont les suivantes.

Règle. — Prenons pour u une valeur très-voisine de α, de la forme

$$u = \alpha \pm h \tag{20}$$

h étant très-petit, et tel que la première dérivée

$$F'(x) = 0$$

n'ait pas de racines comprises entre les limites u et α.

La valeur de u étant ainsi fixée, prenons pour k la valeur donnée par la formule

$$k = -\frac{1}{F'(v)}, \tag{21}$$

v étant une quantité quelconque choisie à volonté, égale à u, ou très-approchée de u, et comprise entre les limites α et $u : v$ satisfera à ces conditions s'il est, par exemple, de la forme

$$v = \alpha \pm \theta h, \tag{22}$$

où θ représente un facteur numérique égal ou inférieur à l'unité, qu'on peut choisir arbitrairement.

Ainsi, en mettant dans l'équation (19) au lieu de k sa valeur précédente, on aura la formule de réduction

$$u - x + \left[x - u - \frac{F(x)}{F'(v)}\right] = 0, \tag{23}$$

et à l'aide du théorème (A) du paragraphe I, et du théorème 3

du paragraphe II, il sera facile de prouver que la série de Lagrange tirée de l'équation (23) est convergente, et qu'elle offre précisément la racine α qu'il s'agit de trouver.

Commençons par démontrer la première partie de cette proposition, c'est-à-dire que la série de Lagrange tirée de l'équation précédente est convergente.

Pour cela, nous observerons, avant tout, que lorsque $h = 0$, et par suite $u = v = \alpha$, l'équation

$$x - u - \frac{F(x)}{F'(v)} = 0, \tag{24}$$

qu'on obtient en égalant à zéro la fonction comprise entre parenthèses dans le premier membre de l'équation (23), a une racine multiple égale à u, et partant à α, laquelle est une racine double si $F''(\alpha) > \text{ou} < \overset{*}{0}$, triple si $F''(\alpha) = 0$, et à la fois $F'''(\alpha) > \text{ou} < 0$, etc.

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les diverses dérivées de l'équation (24) sont

$$1 - \frac{F'(x)}{F'(v)} = 0, \quad F''(x) = 0, \quad F'''(x) = 0, \text{ etc.}$$

dont la première est vérifiée par identité lorsque $x = \alpha$, car par hypothèse $v = \alpha$.

Mais en vertu des équations (20) et (22), les racines x de l'équation (24) peuvent être considérées comme des fonctions continues de h. (Voir le Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable, tome II des *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, par M. Cauchy.) Il résulte de là que, pour des valeurs de h très-petites ou de u et v très-approchées de α, l'équation (24) aura deux ou plusieurs racines très-voisines de α.

Soit ω une de ces racines; on pourra l'obtenir en série ordonnée suivant les puissances de $u - \alpha = \pm h$, ainsi qu'il suit.

Substituons dans l'équation (24), au lieu de u sa valeur $\alpha \pm h$, il viendra

$$(25) \qquad \alpha \pm h - x + \frac{F(x)}{F'(v)} = \pm h + \left(\alpha - x + \frac{F(x)}{F'(v)}\right) = 0.$$

Or, en observant que la valeur de v fournie par (22) est supposée maintenant différente de zéro, on conclura que α est une racine simple de l'équation

$$(26) \qquad \alpha - x + \frac{F(x)}{F'(u)} = 0,$$

en sorte qu'on pourra établir la relation

$$(27) \qquad \alpha - x + \frac{F(x)}{F'(v)} = (\alpha - x)\,\pi(x),$$

$\pi(x)$ étant une fonction qui ne s'évanouit ni ne devient infinie pour $x = \alpha$.

L'équation (25) deviendra ainsi

$$(28) \qquad \alpha - x \pm \frac{h}{\pi(x)} = 0;$$

d'où l'on tire, au moyen de la série de Lagrange,

$$(29) \qquad x = \omega = \alpha \pm \frac{h}{\pi(\alpha)} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\pi(\alpha)}\right)^2 \pm \text{etc...}$$

Nous nous dispensons d'exprimer les coefficients des diverses puissances de h en fonction des dérivées de $F(x)$, parce que cela est très-facile, en suivant une marche analogue à celle du paragraphe I.

La valeur de ω donnée par l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$(30) \qquad \omega = \alpha \pm \theta' h,$$

θ' étant un facteur qui, en vertu de l'équation (29), se développe en série suivant les puissances entières et positives de h, ainsi qu'il suit :

$$(31)\quad \theta' = \frac{1}{\pi(\alpha)} \pm \frac{h}{1.2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\pi(\alpha)}\right)^2 + \frac{h^2}{1.2.3}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\pi(\alpha)}\right)^3 \pm \text{etc...}$$

Cela posé, en comparant l'équation (23) à la formule

$$u - x + f(x) = 0,$$

on a

$$f(x) = x - u - \frac{F(x)}{F'(v)};$$

et par suite

$$f'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{F'(v)},$$

$$f'(\omega) = 1 - \frac{F'(\omega)}{F'(v)} = 1 - \frac{F'(\alpha \pm \theta' h)}{F'(\alpha \pm \theta h)},$$

en y mettant pour ω et v leurs valeurs données par les formules (30) et (22). De plus, en développant la fraction $\frac{F'(\alpha \pm \theta' h)}{F'(\alpha \pm \theta h)}$ suivant les puissances de h, on trouvera

$$(32)\qquad f'(\omega) = \pm h(\theta - \theta')\frac{F''(\alpha)}{F'(\alpha)} + \text{etc...}$$

Or en faisant attention que θ est un facteur arbitraire, et que θ', en vertu de l'équation (31), s'exprime en une série de termes proportionnels à des puissances positives de h; en se rappelant, de plus, que α est une racine simple de l'équation (1), en sorte que $F'(\alpha)$ est une quantité différente de zéro, on conclura de la valeur précédente de $f'(\omega)$ que, pour h très-petit, on aura nécessairement

$$(33)\qquad \text{mod}\, f'(\omega) = \text{mod}\left(1 - \frac{F'(\omega)}{F'(v)}\right) < 1.$$

D'ailleurs, nous remarquerons que ω étant une racine de l'équation (24), dont la valeur est, comme nous venons de voir, très-voisine de u, on peut dire inversement que, dans l'équation (23), u représente une quantité très-voisine d'une des racines de l'équation (24). Donc, eu égard au théorème (A) du paragraphe I, nous conclurons de l'inégalité (33) que la série de Lagrange tirée de l'équation (23) est convergente.

Première remarque. — La conclusion précédente subsiste toujours, même lorsqu'on supposerait v égal à α; cependant, dans ce cas, la racine ω et la quantité θ' ne seraient plus données par les séries qui composent les seconds membres des équations (29) et (31); car les coefficients des termes de ces séries deviendraient alors infinis. Mais il est facile de voir que α serait alors une racine multiple de l'équation (26), en sorte qu'en ayant recours à un artifice analogue à celui suivi dans le paragraphe I, on parviendrait à exprimer ω, et par suite θ', en série ordonnée suivant les puissances ou de $h^{\frac{1}{2}}$ ou de $h^{\frac{1}{3}}$, etc., selon qu'on aura $F''(\alpha) > $ ou < 0, ou bien $F''(\alpha) = 0$, et en même temps $F'''(\alpha) > $ ou < 0. Ainsi la valeur de $f'(\omega) = 1 - \frac{F'(u)}{F'(v)}$ pourra toujours s'exprimer en série ordonnée suivant les puissances positives entières ou fractionnaires de h, et l'inégalité (33) sera toujours satisfaite pour h très-petit.

Deuxième remarque. — L'équation (29) offre, sous forme de série, la valeur d'une des racines voisines de α qu'acquiert l'équation (24) lorsqu'on attribue à u et v des valeurs elles-mêmes voisines de α. On peut ajouter, pour surplus, que les racines mentionnées peuvent être toutes développées en séries convergentes à l'aide de la formule de Lagrange. Soit, par exemple, $u = \alpha + h$, et $v = \alpha + h'$, h et h' étant très-petits.

L'équation (24) pourra s'écrire ainsi:

$$h F'(v) + (\alpha - x) F'(v) + F(x) = 0; \tag{34}$$

et observant que l'on a

$$F'(v) = F'(\alpha + h') = F'(\alpha) + h' F''(\alpha + \varepsilon h'),$$

ε étant un nombre compris entre 0 et 1, et faisant, pour plus de simplicité, $i = h' F'(\alpha + \varepsilon h')$, l'équation (34) deviendra

$$h F'(v) + (\alpha - x) F'(\alpha) + (\alpha - x) i + F(x) = 0,$$

ou bien

$$(35) \qquad h F'(v) + (\alpha - x) i + [(\alpha - x) F'(\alpha) + F(x)] = 0.$$

Maintenant, en observant que α est une racine double de l'équation

$$(\alpha - x) F'(\alpha) + F(x) = 0,$$

lorsqu'on suppose $F''(\alpha) >$ ou < 0, hypothèse que nous adopterons ici pour abréger, on pourra poser l'équation

$$(\alpha - x) F'(\alpha) + F(x) = (x - \alpha)^2 \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui ne s'évanouit ni ne devient infinie pour $x = \alpha$.

Ainsi l'équation (35) deviendra

$$h F'(v) + (\alpha - x) i + (\alpha - x)^2 \varphi(x) = 0;$$

d'où l'on tire

$$(\alpha - x)^2 = \frac{(x - \alpha) i - h F'(v)}{\varphi(x)},$$

et par suite

$$(36) \qquad \alpha - x = \sqrt{\frac{(x - \alpha) i - h F'(v)}{\varphi(x)}}.$$

En ayant égard à la double valeur du radical, et en appliquant à l'équation précédente la série de Lagrange, on obtiendra deux séries distinctes, qui représenteront précisément les deux racines voisines de α qu'acquiert l'équation (24), lorsque u et v ont des valeurs voisines elles-mêmes de α, et dans l'hypothèse de $F''(\alpha) > \text{ou} < 0$.

Reste maintenant à prouver que la série de Lagrange tirée de l'équation (23) doit nécessairement offrir la racine α. Pour cela, il faut se rappeler que u est, par hypothèse, une valeur approchée de α. Or, peut-être n'est-il pas inutile de faire remarquer qu'en disant que u est une valeur approchée de α, nous n'entendons pas dire seulement que u s'approche de α, mais par là nous entendons dire encore que si u est $< \alpha$, alors de toutes les racines supérieures à u, α est la plus approchée de ce paramètre, et que si u est $> \alpha$, alors de toutes les racines inférieures à u, α est celle qui s'approche le plus de ce même paramètre.

Cela bien retenu, en ayant égard au théorème 3 du § 2, il est facile de voir que la proposition dont il s'agit sera démontrée, si l'on fait voir que l'on a

$$f(u) = -\frac{F(u)}{F'(v)} > \text{ou} < 0,$$

selon que u est inférieur ou supérieur à α.

A cet effet, nous observons que l'on a

$$\frac{F(u)}{F'(v)} = \frac{F(\alpha \pm h)}{F'(\alpha \pm \theta h)} = \pm \frac{h F'(\alpha \pm \varepsilon h)}{F'(\alpha \pm \theta h)},$$

en mettant pour u et v leurs valeurs données par les formules (20) et (22), et retenant que ε est un nombre compris entre 0 et 1.

Or, comme on suppose que l'équation $F'(x) = 0$ n'a pas de racines comprises entre les limites α et $u = \alpha \pm h$, elle n'en aura pas non plus entre les limites $\alpha \pm \varepsilon h$ et $\alpha \pm \theta h$; car ces deux limites se trouvent comprises entre les premières α et u,

parce que non-seulement ε, mais par hypothèse aussi θ, est compris entre o et 1. On aura donc

$$\frac{F'(\alpha \pm \varepsilon h)}{F'(\alpha \pm \theta h)} > 0,$$

et par suite

$$-\frac{F(u)}{F'(v)} > \text{ou} < 0,$$

selon que h est $<$ ou $>$ o, ou, ce qui revient au même, selon que u est inférieur ou supérieur à α.

On conclura donc, en vertu de la remarque faite plus haut, que la série de Lagrange tirée de l'équation (23) représente précisément la racine α : ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, il résulte de l'analyse qui précède, que l'équation (1) étant donnée, et u étant une valeur approchée d'une de ses racines, par exemple α, on aura la valeur exacte de cette racine en appliquant la série de Lagrange à l'équation (1) ramenée préalablement à la forme (23). Ajoutons que, pour que l'on soit sûr que la racine obtenue de la sorte représente effectivement α, il faut, comme nous l'avons remarqué plus haut, que la première dérivée de (1) n'ait pas de racines comprises entre les limites u et α.

Pour montrer une application de cette règle, soit l'équation

$$(37)\quad F(x) = x^5 - 17{,}1\,x^4 + 97{,}1\,x^3 - 183\,x^2 - 10\,x + 60{,}5 = 0,$$

laquelle rentre dans l'équation (24) du § II. On sait qu'une de ses racines, savoir celle désignée par x, dans l'endroit cité, est comprise entre les limites 6 et 6,1, et a pour valeur 6,040824...

Supposons qu'il s'agisse de trouver cette racine par la règle précédente, et dans l'hypothèse qu'elle soit seulement connue à 0,01 près. Nous prendrons ainsi $u = 6{,}05$, ce qui est une valeur de u suffisante pour notre objet; car, par les formules (26) du § II, on voit que la première dérivée de l'équation don-

née (34) n'a pas de racines entre les limites x_4 et $u = 6{,}05$. Cela posé, prenons, par un premier essai, $v = u = 6{,}05$, ce qui donne $F'(v) = F'(6{,}05) = -10{,}1232$. Pour plus de simplicité, nous pouvons réduire la valeur précédente de $F'(v)$ à celle-ci :

$$F'(v) = -10,$$

laquelle correspond à une valeur de v inférieure à $u = 6{,}05$, mais toujours comprise entre x_4 et u, et qui par suite est conforme à la règle dont il s'agit.

Ainsi l'équation (23), en y mettant pour u, $F(x)$, et $F'(v)$ les valeurs précédentes, deviendra, toute réduction faite,

$$6{,}05 - x + 0{,}1\, x^2 (x-5)(x-6)(x-6{,}1) = 0,$$

équation qui est la même que l'équation (24) du § II, où nous avons en effet reconnu que la série de Lagrange, appliquée à cette équation, donne, conformément à la règle précédente, la racine quatrième de la proposée (34), savoir celle dont la valeur est, comme nous l'avons déjà dit, 6,040824, à moins d'une unité près du sixième ordre décimal.

En terminant ce paragraphe, je ferai remarquer que lorsque dans la formule (23) on fait $v = u$, elle devient

$$u - x + \left(x - u - \frac{F(x)}{F'(u)}\right) = 0; \tag{38}$$

et si l'on y applique la série de Lagrange, on obtient, tout calcul fait,

$$u - \frac{Fu}{F'u} - \frac{1}{2}(Fu)^2 \frac{F''u}{(F'u)^3} + (Fu)^3 \frac{F'''u}{6(F'u)^4} - \frac{(Fu)^3 (F''u)^2}{2(F'u)^5} + \text{etc...}$$

laquelle est la série même qu'Euler a donnée le premier dans la seconde partie de son *Calcul différentiel* (chap. IX, art. 234), et que Lagrange a rapportée à la page 214 de la note XI de sa *Résolution des équations numériques*.

Au reste, il ne sera pas inutile de remarquer que la série d'Euler

précédente pourrait aussi s'obtenir à l'aide de la série de Lagrange appliquée à l'équation (1), après l'avoir préalablement réduite à la forme

$$u - x - \frac{(x-u)\,\mathrm{F}(u)}{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(u)} = 0.$$

C'est là ce dont on peut s'assurer au moyen d'un calcul qui ne présente aucune difficulté.

§ IV.

Revenons aux propriétés caractéristiques de la racine α, savoir de celle des racines que fournit la série de Lagrange, tirée de l'équation proposée

$$\mathrm{F}(x) = 0; \tag{1}$$

celle-ci ayant été réduite préalablement à la forme

$$u - x + f(x) = 0 \tag{2}$$

de quelque manière que ce soit.

En jetant un coup d'œil sur les résultats obtenus à cet égard au § II, on s'apercevra que les propriétés dont il s'agit reposent sur la forme propre de l'équation de réduction (2). Or, il est essentiel de rappeler ce que nous avons déjà remarqué dans la préface, à savoir que toute équation peut se ramener à la forme (2) ci-dessus de plusieurs manières différentes. Il y a plus : le nombre des manières dont cette réduction peut s'effectuer est infini; elles sont toutes comprises dans la formule suivante :

$$u - x + [x - u + k\,\mathrm{F}(x)] = 0, \tag{3}$$

où u est un nombre arbitraire quelconque, et k un facteur quelconque même arbitraire, et qu'on peut supposer, soit dépendant, soit indépendant de x. Ajoutons que les résultats obtenus dans le

paragraphe précédent démontrent que, par un choix convenable des valeurs de u et k, qui entrent dans la formule (3), nous pouvons amener la racine α à devenir une quelconque des racines simples de la proposée. On voit par là que le rang qui convient à la racine α, dans la suite des termes formés par les racines de la proposée, rangées entre elles, d'après un de leurs caractères distinctifs quelconques, dépend nécessairement de la manière dont la proposée a été réduite à la forme (2).

Cela posé, supposons que la proposée (1) ait été réduite à la forme (2) d'une manière quelconque, fixée d'avance : ou, ce qui revient au même, supposons que dans la formule (3) les valeurs du terme u et du facteur k aient été, d'avance, arbitrairement déterminées. Admettons, de plus, que les racines de la proposée aient été préalablement rangées, entre elles, d'après un caractère distinctif quelconque, arbitrairement choisi.

Cela étant, si l'on applique la série de Lagrange à la formule (3), la racine α qu'on obtiendra sera nécessairement d'un ordre déterminé. Or, c'est cet ordre qu'il s'agit de reconnaître *a priori*.

Nous avons déjà donné, au § II, un essai de solution de cette question, en nous fondant sur le mode d'arrangement des racines de la proposée que nous y avons exposé, et qui, d'ailleurs, s'appuie sur la considération des racines réelles de la première dérivée. Nous allons, maintenant, résoudre la même question en partant d'un nouveau mode d'arrangement des racines de la proposée, mode bien préférable à celui que nous venons de rappeler, soit par sa généralité, soit par l'importance des résultats auxquels il conduit.

Le mode d'arrangement dont il s'agit se fonde sur le théorème suivant de l'illustre Fourier, relatif à l'analyse des équations déterminées.

Soit $\mathrm{F}(x)$ [premier membre de la proposée (1)] une fonction de x, réelle et entière, et du degré m; et soient

$$\mathrm{F}'(x),\ \mathrm{F}''(x),\ \mathrm{F}'''(x)\ldots\mathrm{F}^{(m)}(x),$$

ses diverses dérivées, depuis la première jusqu'à celle de l'ordre m, laquelle, comme on sait, est indépendante de x.

A l'aide de ces fonctions, formons la suite que nous allons écrire :

$$(K) \quad F^{(n)}(x),\ F^{(m-1)}(x),\ F^{(m-2)}(x),\ \ldots .F'''(x),\ F''(x),\ F'(x),\ F(x).$$

Soient, en outre, a et b deux nombres réels quelconques, dont b soit $> a$. Si l'on substitue, d'abord, dans les fonctions de la suite (K) au lieu de x la valeur $x = a$, et l'on marque le signe correspondant de chaque fonction, on aura une suite de signes qui présentera un certain nombre de permanences n. Si ensuite on substitue dans les mêmes fonctions, au lieu de x, la valeur $x = b$, on aura une autre suite de signes qui présentera un nombre de permanences n'.

Cela posé, le théorème de Fourier consiste en ce que l'équation (1), savoir :

$$F(x) = 0,$$

a précisément autant de racines réelles ou imaginaires comprises entre a et b, qu'il y a d'unités dans la différence $n - n'$, laquelle d'ailleurs ne peut jamais devenir négative. (Voir l'ouvrage de Fourier, *Analyse des équations déterminées*, livre I, pages 87 et suivantes.)

Ce théorème entraîne évidemment cette conséquence. C'est que toute racine réelle de la proposée, si, après avoir été augmentée d'une quantité positive et infiniment petite ω, on la substitue au lieu de x dans la suite (K), doit nécessairement produire une suite de signes renfermant un certain nombre de permanences qui sera particulier à cette racine, et qui variera nécessairement d'une racine à l'autre. Il résulte de là que ce nombre de permanences offre un caractère distinctif propre à distinguer chaque racine réelle de toutes les autres. Ainsi, c'est précisément d'après ce caractère que nous distinguerons et rangerons entre elles les différentes racines de la proposée. En sorte que nous désignerons par

x_i celle des racines de la proposée qui, étant réelle, si, après avoir été augmentée de la quantité ω ci-dessus, on la substitue au lieu de x dans la suite (K), amène une suite de signes renfermant une seule permanence; et en général nous désignerons par x_i celle des racines qui, étant réelle, si, après avoir été augmentée de ω, était substituée au lieu de x dans la suite (K), produirait une suite de signes renfermant i permanences.

Désignées de la manière que nous venons d'indiquer, et rangées dans l'ordre des indices placés à leurs pieds, les racines de la proposée formeront la suite

$$(R) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots . x_i,\ x_{i+1} \ldots . x_{m-1},\ x_m,$$

où nous appellerons x_i la racine de l'ordre général i, comme étant celle dont on tire toutes les autres, en faisant son indice $i = 1, 2, 3, 4 \ldots . m$.

Si l'on fait attention à ce fait constant, que le nombre des permanences présenté par la suite (k) varie de manière à ne jamais diminuer, mais ou à rester le même, ou à croître jusqu'à ce qu'il devienne égal à m, à mesure que le nombre substitué à x devient de plus en plus grand, on s'apercevra que la racine de l'ordre i étant réelle, elle devra nécessairement être plus grande que toute autre racine d'ordre inférieur, x_{i-p}, par cela seul que ces deux racines, substituées dans la suite (K), donnent par hypothèse, la première i permanences, et la seconde $i-p$ seulement. On voit de là que dans la suite (R) les racines de la proposée sont aussi rangées dans l'ordre de leurs respectives grandeurs, en sorte que si ces racines, par des valeurs convenables des coefficients de l'équation proposée, venaient à être toutes réelles, alors en les ordonnant, pour un moment, par rapport à leurs respectives grandeurs, chacune d'elles acquerrait le même rang ou le même ordre qui lui convient, d'après le mode d'arrangement que nous venons de signaler et d'adopter. Ce mode d'arrangement a donc beaucoup de rapports avec celui qui consisterait à ranger les racines réelles d'après leurs respectives grandeurs, sans tenir aucun compte des

racines imaginaires. Ils diffèrent pourtant entre eux en ce que, selon le premier mode d'arrangement, celui qui se fonde sur le théorème cité de Fourier, et que nous venons d'adopter, l'indice i, marquant l'ordre de la racine x_i, dépend à la fois, soit du nombre des racines réelles qui précèdent la racine x_i, comme étant plus petites que celle-ci, soit du nombre de celles des racines imaginaires qui, d'après le théorème de Fourier, doivent aussi être censées précéder la même racine x_i. Au contraire, si l'on range les racines de la proposée purement et simplement d'après leurs grandeurs, alors la suite résultant de cet arrangement ne peut renfermer que les racines réelles de la proposée, et l'indice i de l'ordre de la racine x_i ne dépend que du nombre seul des racines réelles inférieures à cette même racine. Ainsi, l'indice le plus grand que pourrait acquérir une racine quelconque, serait justement égal au nombre des racines réelles que renferme l'équation proposée. Au reste, si dans la suite (R) on connaissait la nature de la racine que chaque terme représente, on pourrait former sur-le-champ la suite composée des racines réelles, rangées dans l'ordre de leurs grandeurs respectives. Il suffirait, à cet effet, de supprimer dans la suite (R) tous les termes correspondants à des racines imaginaires, et de modifier ensuite les indices des termes restants, conformément à la place que ces termes se trouveraient occuper, après la suppression indiquée tout à l'heure. On aurait ainsi une nouvelle suite, celle précisément qui résulterait de l'arrangement des racines réelles d'après leur ordre de grandeur.

Nous avons cru devoir entrer dans les détails précédents, pour montrer que le mode de distinction et d'arrangement des racines que nous avons adopté, quoique fondé sur une propriété des racines qui, jusqu'ici, n'est pas encore rangée au nombre des propriétés élémentaires, se rattache pourtant à une des premières notions des racines, celle de leur grandeur. Au reste, il s'applique aussi aux racines des diverses dérivées de la proposée. Ainsi, pour la première dérivée

(4) $$F'(x) = 0,$$

nous désignerons par x'_i celle de ses racines qui, étant réelle, si, augmentée de ω, on la substitue au lieu de x dans la suite de fonctions

(K') $$F^{(m)}(x),\ F^{(m-1)}(x),\ \ldots\ldots F''(x),\ F'(x),$$

produirait une suite de signes renfermant i permanences. De cette manière, les racines de la même équation formeront la suite

(R') $$x'_1,\ x'_2,\ x'_3\ \ldots\ldots x'_i,\ x'_{i+1}\ \ldots\ldots x'_{m-2},\ x'_{m-1}.$$

De même les racines de la seconde dérivée

(5) $$F''(x) = 0$$

composeront la suite

(R'') $$x''_1,\ x''_2,\ x''_3\ \ldots\ldots x''_{m-3},\ x''_{m-2},$$

en désignant par x''_i celle des racines de cette équation qui, augmentée de ω, et substituée au lieu de x dans la suite des $m-1$ fonctions

(K'') $$F^{(m)}(x),\ F^{(m-1)}(x)\ \ldots\ldots F'''(x),\ F''(x),$$

amènerait une suite de signes renfermant i permanences.

En général, nous désignerons par $x^{(n)}_i$ la racine de l'ordre i de la dérivée de l'ordre n

(6) $$F^{(n)}(x) = 0,$$

et nous entendrons par cette notation $x^{(n)}_i$ celle des racines de cette équation qui, augmentée de la quantité positive et infiniment petite ω, et substituée dans la suite des $(m-n+1)$ fonctions

(K$^{(n)}$) $$F^{(m)}(x),\ F^{(m-1)}(x)\ \ldots\ldots F^{(n+1)}(x),\ F^{(n)}(x),$$

produit une suite de signes renfermant i permanences.

Avant de venir à la question faisant l'objet principal de ce paragraphe, nous nous arrêterons encore ici à faire connaître certaines formules par lesquelles les racines de la proposée sont liées à celles de ses diverses dérivées. Mais nous ferons, tout d'abord, deux remarques qui nous seront très-utiles pour nous rendre raison des formules que nous avons en vue d'établir.

Première remarque. — La première remarque consiste en ce que, si dans la suite (K) on substitue, au lieu de x, une racine simple quelconque de la proposée (1), augmentée ou diminuée de ω, par exemple $x_i \pm \omega$, x_i étant une racine simple, les deux fonctions consécutives $F'(x)$ et $F(x)$ présentent nécessairement une permanence ou une variation, selon que l'on prend ω avec le signe positif ou négatif.

En effet, on a d'abord sensiblement

$$F(x_i \pm \omega) = \pm F'(x_i)\,\omega. \tag{7}$$

Mais $F'(x)$ dans le voisinage de $x = x_i$ ne change pas de signe, car x_i est une racine, par hypothèse, propre seulement à l'équation $F(x) = 0$. Par suite, eu égard à la dernière équation (7), on conclura que les signes des deux quantités $F(x_i \pm \omega)$ et $F'(x_i \pm \omega)$ présentent une permanence ou une variation, selon qu'on prend ω avec le signe positif ou négatif.

Deuxième remarque. — La seconde remarque que nous tenons à faire, c'est que toute valeur a qui, étant substituée dans les trois fonctions consécutives $F^{(n+1)}(x)$, $F^{(n)}(x)$, $F^{(n-1)}(x)$, faisant partie de la suite (K), rend la fonction intermédiaire $F^{(n)}(x)$ égale à zéro, et donne pour les deux autres deux résultats de même signe, est nécessairement l'indice de l'existence de deux racines imaginaires.

Cette proposition est vraie, que a soit ou ne soit pas une racine de la proposée. Mais nous nous bornerons à la démontrer pour le cas où a n'est pas racine de la proposée. Pour cela nous remarquerons, d'abord, que la suite de signes résultant de la suite (K), en y faisant $x = a + \omega$, renferme nécessairement deux permanences de plus que celle qui résulte en faisant dans la même

suite (K) $x = a - \omega$. Car les trois fonctions $F^{n+1}(x)$, $F^n(x)$, $F^{(n-1)}(x)$, par la remarque précédente, et en vertu de l'hypothèse que nous venons de faire, offrent deux permanences pour $x = a + \omega$, et deux variations pour $x = a - \omega$. De plus, les autres fonctions composant la suite (K) conservent chacune le même signe, pour toutes deux ces dernières valeurs de x.

De là on conclura, eu égard au théorème de Fourier, que la proposée devra avoir deux racines réelles ou imaginaires, entre les limites infiniment resserrées $x = a - \omega$ et $x = a + \omega$. Mais il est essentiel d'ajouter qu'il ne peut rester aucun doute que ces deux racines soient imaginaires. Car, si elles étaient réelles, elles devraient évidemment être toutes deux égales à a, et par suite, a devrait rendre zéro $F(x)$ et $F'(x)$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Théorème 1. — Supposons toutes trois réelles les racines x_i, $x_{i-n}^{(n)}$ et $x_i^{(n)}$, dont la première est, d'après la notation adoptée, celle de l'ordre i de la proposée, et les deux autres sont celles des ordres $i - n$ et i de l'équation dérivée de l'ordre n (6). Ces trois racines seront toujours liées entre elles par l'équation suivante :

$$x_i = M\,(x_{i-n}^{(n)} \ldots x_i^{(n)}), \tag{8}$$

en observant que par la notation $M\,(p \ldots q)$, nous entendons toujours, comme au § II, une moyenne quelconque entre les quantités réelles p et q.

Pour faire voir la vérité de cette formule (8), il suffit de démontrer que la suite (K), pour $x = x_i^{(n)} + \omega$, présente un nombre de permanences toujours égal ou supérieur à i, et pour $x = x_{i-n}^{(n)} + \omega$, elle en présente un nombre toujours inférieur à i. Or, la première partie de cette proposition est évidente, par cela même que $x_i^{(n)}$ est la racine de l'ordre i de la $n^{ième}$ dérivée (6). Quant à la seconde partie, nous la démontrerons ainsi qu'il suit. Supposons, pour un moment, qu'en faisant $x = x_{i-p}^{(n)} + \omega$ dans la suite (K), il en résulte une suite de signes renfermant i perma-

nences. Alors nous observons d'abord que la partie de la suite (K), composée des fonctions

$$(9) \qquad F^m(x),\ F^{m-1}(x)\ldots.F^{n+1}(x),\ F^n(x),$$

présentera nécessairement $i-n$ permanences pour $x=x_{i-n}^{(n)}+\omega$, à cause de ce que $x_{i-n}^{(n)}$ est, par hypothèse, la racine de l'ordre $i-n$ de la dérivée $n^{ième}$ (6). Il résulte de là que la suite entière (K), pour la même valeur $x=x_{i-n}^{(n)}+\omega$, ne peut présenter une suite de signes renfermant i permanences, qu'autant que la partie de la suite (K), composée des $n+1$ fonctions suivantes

$$(10) \qquad F^n(x),\ F^{n-1}(x),\ F^{n-2}(x)\ldots.F''(x),\ F'(x),\ F(x),$$

présentera, pour la valeur de x en question, n permanences. Or, ce dernier cas est impossible. Car alors ces dernières fonctions, pour $x=x_{i-n}^{(n)}+\omega$, devraient acquérir toutes le même signe. D'ailleurs, pour cette même valeur de x, $F^{n+1}(x)$ et $F^n(x)$ seront, elles aussi, affectées de signe semblable, en vertu de la première des deux remarques faites plus haut. Ainsi, les trois fonctions $F^{n+1}(x)$, $F^n(x)$, $F^{n-1}(x)$ offriraient, nécessairement, deux permanences pour la dernière valeur de x signalée tout à l'heure. Mais la fonction $F^n(x)$ change de signe, lorsque de la valeur $x=x_{i-n}^{(n)}+\omega$ on passe à $x=x_{i-n}^{(n)}-\omega$. Il résulte de là que les trois fonctions ci-dessus, $F^{n+1}(x)$, $F^n(x)$, $F^{n-1}(x)$ présenteraient deux variations pour la dernière valeur $x=x_{i-n}^{(n)}-\omega$: en sorte que, pour cette valeur de x, la suite entière n'offrirait plus, en conséquence, que $i-2$ permanences. Par suite, eu égard à la seconde remarque faite plus haut, la proposée aurait deux racines imaginaires, ou, suivant le langage de Fourier, déficientes, entre les limites infiniment resserrées, entre elles, $x=x_{i-n}^{(n)}+\omega$ et $x=x_{i-n}^{(n)}-\omega$. De plus, l'une de ces deux racines serait précisément celle de l'ordre i, savoir x_i : ce qui est contraire à l'hypothèse établie que la racine x_i soit réelle.

Le théorème 1, que nous venons de démontrer, a son réciproque, que nous allons énoncer de la manière suivante :

Théorème 2. — Soient toutes trois réelles les racines x_i, x_{i+n}, et $x_i^{(n)}$, dont les deux premières sont celles des ordres i et $i+n$ de la proposée, et la troisième est celle de l'ordre i de la $n^{ième}$ dérivée. On aura

$$x_i^{(n)} = \mathrm{M}(x_i \ldots x_{i+n}). \tag{11}$$

Pour démontrer ce théorème, considérons en particulier la formule

$$x_i'' = \mathrm{M}(x_i \ldots x_{i+2}), \tag{12}$$

qu'on tire de la formule générale (11) en y faisant $n = 2$.

Le raisonnement que nous emploierons à cet égard sera tel, qu'on pourra l'appliquer à toute autre formule du même genre.

La question se réduit à faire voir que la partie de la suite (K) comprenant les fonctions suivantes au nombre de $m - 1$,

$$\mathrm{F}^{(m)}(x), \mathrm{F}^{(m-1)}(x) \ldots . \mathrm{F}^{\mathrm{iv}}(x), \mathrm{F}'''(x), \mathrm{F}''(x), \tag{13}$$

doit nécessairement présenter un nombre de permanences égal ou supérieur à i, ou bien un nombre de permanences inférieur à i, selon qu'on fait $x = x_{i+2} + \omega$, ou bien $x = x_i + \omega$. Supposons, d'abord, que l'on fasse $x = x_{i+2} + \omega$. Alors la suite entière (K) devra nécessairement offrir $i + 2$ permanences, car x_{i+2} est la racine $i + 2$ de la proposée. De là, en observant que les trois fonctions $\mathrm{F}''(x)$, $\mathrm{F}'(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ ne peuvent offrir, au plus, que deux permanences, on en conclura que la partie (13) de la suite (K) rapportée ci-dessus offrira, certainement, un nombre de permanences égal au moins à i.

Soit, maintenant, $x = x_i + \omega$. Dans cette hypothèse, il est évident que la suite entière (K) présentera justement i permanences, car x_i est la racine de l'ordre i de la proposée. D'ailleurs, dans ce cas, les deux fonctions $\mathrm{F}'(x)$ et $\mathrm{F}(x)$, en vertu de la première des deux remarques établies plus haut, donnent deux résultats de même signe, savoir une permanence. Il faut donc con-

clure que la partie (13) ci-dessus de la suite (K), pour $x = x_i + \omega$, ne peut présenter, au plus, que $i - 1$ permanences.

Nous ajouterons aux deux théorèmes 1 et 2, que nous venons d'établir, les remarques suivantes:

1° Les trois conditions du théorème 2, à savoir que les trois racines x_i, x_{i+n} et $x_i^{(n)}$ soient réelles, peuvent avoir lieu, chacune indépendamment des autres, tant que l'indice n n'est pas égal à 1. Mais si l'on avait $n = 1$, ce qui revient à comparer les racines de la proposée à celles de la première dérivée, la réalité des deux racines x_i et x_{i+1} entraînerait nécessairement, d'après le théorème de Rolle, celle de la racine x'_i. En sorte que pour $n = 1$, on peut dire que le théorème II subsiste, rigoureusement parlant, sous ces deux conditions seules, que les deux racines x_i et x_{i+1} soient toutes deux réelles.

2° Les deux formules (8) et (11) peuvent être remplacées par d'autres plus générales encore, savoir la formule (8) par

$$x_i^{(n)} = \mathrm{M}\,(x_{i-p}^{(n+p)} \ldots x_i^{(n+p)}), \tag{14}$$

et la formule (11) par la suivante:

$$x_i^{(p+n)} = \mathrm{M}\,(x_i^{(n)} \ldots x_{i+p}^{(n)}). \tag{15}$$

Pour se convaincre de la vérité de ces deux formules, il suffit de regarder la dérivée (6) de l'ordre n comme une équation principale. Alors la dérivée de l'ordre $p + n$

$$\mathrm{F}^{(n+p)}(x) \tag{16}$$

de la proposée, deviendra celle de l'ordre p de l'équation (6), et par suite, les deux formules (8) et (11) entraîneront les deux ci-dessus (14) et (15).

3° Si l'on suppose que les racines de la proposée soient toutes réelles, alors les deux formules (8) et (11) deviennent une suite nécessaire du théorème connu de Rolle. En effet, d'après ce théorème, on a d'abord

$$x'_i = \mathrm{M}\,(x_i \ldots x_{i+1}), \tag{17}$$

d'où il vient

$$x_i'' = \mathrm{M}(x_i' \ldots x_{i+1}'), \tag{18}$$

lesquelles formules combinées donnent

$$x_i'' = \mathrm{M}(x_i \ldots x_{i+2}), \tag{19}$$

et en général,

$$x_i^{(n)} = \mathrm{M}(x_i \ldots x_{i+n}), \tag{20}$$

formule qui est la même que la formule (11).

D'ailleurs la formule (17) et celle qui en résulte, en y changeant i en $i-1$, montrent qu'on a encore

$$x_i = \mathrm{M}(x_{i-1}' \ldots x_i'), \tag{21}$$

d'où il vient

$$x_i' = \mathrm{M}(x_{i-1}'' \ldots x_i''), \tag{22}$$

lesquelles combinées amènent celle-ci,

$$x_i = \mathrm{M}(x_{i-2}'' \ldots x_i''), \tag{23}$$

et, en général,

$$x_i = \mathrm{M}(x_{i-n}^{(n)} \ldots x_i^{(n)}), \tag{24}$$

formule qui coïncide avec la formule (8).

4° Si les deux racines $x_{i-n}^{(n)}$ et $x_i^{(n)}$, qui entrent dans la formule (8), se trouvaient imaginaires, cette formule deviendrait alors illusoire. Mais si l'une seule de ces deux racines était imaginaire, alors l'autre pourra toujours être regardée comme une des limites, inférieure ou supérieure, de la racine x_i.

Une observation pareille peut se faire à l'égard de l'autre formule (11).

5° On remarquera, enfin, que lorsque, dans les formules (8) et (11), l'une des racines qui y entrent, par exemple x_{i-n}^{n}, ac-

querrait un indice moindre que zéro, elle devra être remplacée par l'infini négatif. De même, lorsque l'une de ces racines, par exemple x_{i+n}, acquerrait un indice supérieur à i, elle devra être remplacée par l'infini positif.

A l'aide des deux théorèmes précédents, nous en allons établir un troisième, dont nous ferons un usage important en son lieu.

THÉORÈME 3. — Soient les deux équations algébriques

$$X = 0, \text{ et } Y = 0; \tag{25}$$

dont l'une est du degré m, et a pour inconnue x; et l'autre est du degré m', et a pour son inconnue y.

Supposons que la dérivée $n^{ième}$

$$X^{(n)} = 0 \tag{26}$$

de la première de ces équations, soit la même que la dérivée $n'^{ième}$

$$Y^{(n)} = 0 \tag{27}$$

de l'autre. En sorte qu'on ait identiquement

$$X^{(n)} = Y^{(n')}, \tag{28}$$

après avoir préalablement changé y en x dans le second membre de cette dernière équation.

Les racines des deux équations proposées (25) seront liées entre elles par les formules suivantes :

$$x_i = M(y_{i-n} \ldots y_{i+n'}) \tag{29}$$

$$y_i = M(x_{i-n'} \ldots x_{i+n}), \tag{30}$$

dont la seconde se déduit de la première en y échangeant entre elles y et x, ainsi que n et n'.

Il va sans dire que ces deux formules ne subsistent qu'autant que, pour la première, x_i, y_{i-n}, $y_{i+n'}$ sont trois racines réelles; et pour la seconde, y_i, $x_{i-n'}$ et x_{i+n} sont aussi trois racines réelles.

Il est bien entendu que y_i est la racine de l'ordre i de la seconde

des équations (25), de même que x_i est celle du même ordre de la première de ces équations.

La seconde des deux formules (29) et (30) étant une suite nécessaire de la première, il suffira de démontrer celle-ci. A cet effet, nous observons d'abord, qu'en vertu de l'équation de condition (28), on aura

$$x_i^{(n)} = y_i^{(n')}, \tag{31}$$

$x_i^{(n)}$ et $y_i^{(n')}$ étant, l'une, la racine de l'ordre i de l'équation (26); et l'autre, la racine de même ordre i de l'équation (27).

Mais en vertu du théorème II, on a

$$y_i^{(n')} = \mathrm{M}\,(y_i \cdots y_{i+n'}). \tag{32}$$

De cette équation et de la précédente (31), on tire

$$x_i^{(n)} = \mathrm{M}\,(y_i \cdots y_{i+n'}), \tag{33}$$

laquelle, en y changeant i en $i - n$, nous donne

$$x_{i-n}^{(n)} = \mathrm{M}\,(y_{i-n} \cdots y_{i-n+n'}). \tag{34}$$

Par suite, eu égard à la formule (8), faisant l'objet du théorème I, on tirera des deux formules précédentes (33) et (33),

$$x_i = \mathrm{M}\,(y_{i-n} \cdots y_{i+n'}), \tag{35}$$

ce qu'il fallait démontrer.

A l'égard du théorème que nous venons de démontrer, nous ferons les deux remarques suivantes :

1° Si, dans la formule (29), les deux racines y_{i-n} et $y_{i+n'}$ deviennent imaginaires, la même formule deviendrait illusoire. Mais si l'une seule de ces deux racines devient imaginaire, alors l'autre, restant réelle, représentera encore la limite inférieure ou supérieure de la racine x_i. Même remarque à propos de l'autre formule (30).

2° Si, pour des valeurs particulières attribuées à i et à n, l'in-

dice $i - n$ de la racine y_{i-n} devenait inférieur à l'unité, ou celui de y_{i+n} devenait supérieur à m', degré de la seconde des équations (25); alors la racine y_{i-n} devra être remplacée par l'infini négatif, et l'autre y_{i+n} par l'infini positif.

Même conclusion pour les deux racines $x_{i-n'}$ et x_{i+n}.

Venons maintenant à la question qui forme l'objet principal de ce paragraphe, celle de déterminer l'ordre qui convient à la racine α, que représente la série de Lagrange, lorsqu'elle est appliquée à une équation algébrique quelconque, réduite préalablement à la forme (2), de quelque manière que ce soit.

La règle à suivre pour cet objet est la suivante.

Règle pour reconnaître l'ordre de la racine α. — Cherchons le nombre des permanences que renferme la suite (K) lorsqu'on y fait $x = u$. Soit p ce nombre. L'indice de l'ordre de la racine α sera toujours supérieur à p, si l'on a $f(u) > 0$; et il sera toujours égal ou inférieur à p, si l'on a $f(u) < 0$. Il y a plus. Si la proposée a ses racines toutes réelles, alors l'indice de l'ordre de la racine α sera toujours justement égal à $p + 1$ ou à p, selon que l'on a $f(u) >$ ou < 0.

Cette règle découle du théorème 3 (§ II) d'une manière trop évidente pour qu'il soit nécessaire de nous arrêter ici à la démontrer. Nous aimons mieux faire remarquer une conséquence importante qui en résulte, et qui est analogue au théorème 4 du § II. C'est que l'ordre de la racine α est un nombre entièrement dépendant de la valeur du terme u, de sorte qu'en faisant croître indéfiniment cette quantité, le même ordre est réduit à croître jusqu'à devenir quelquefois le plus élevé de tous les ordres des racines de la proposée.

Aussi la règle précédente fournit-elle une nouvelle preuve de l'inexactitude du théorème de Lagrange que nous avons examiné au paragraphe précédent.

Au reste, cette règle est remarquable en ce qu'elle nous fait connaître, soit exactement, soit dans certaines limites, l'ordre de la racine α, sans aucune connaissance préalable sur la nature et

la valeur des autres racines de la proposée ou de celles de quelque autre équation liée à la proposée d'une manière connue. Toutefois, réfléchissons que la connaissance préalable des racines d'une des dérivées de la proposée, ou d'une autre équation liée à la proposée d'une manière quelconque, peut devenir très-utile pour déterminer *a priori* l'ordre de la racine α, et peut même, quelquefois, nous dispenser d'avoir recours à la règle précédente. Dans ce nombre se trouve l'équation qu'on tire en égalant à zéro la fonction $f(x)$, qui entre dans le premier membre de l'équation (2). C'est ce qu'on va voir par le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — Soit toujours la proposée (1), et supposons que sa première dérivée (4) ait ses racines toutes réelles.

Soit de plus u_i une quantité réelle, et la racine de l'ordre i de l'équation

$$f(x) = 0, \tag{36}$$

les autres racines de cette équation étant quelconques, réelles ou imaginaires, et $f(x)$ étant une fonction entière de x, et la même qu'on obtient en ramenant la proposée à la forme (2).

Supposons encore que l'on ait

$$\operatorname{mod} f'(u_i) < 1. \tag{37}$$

En vertu de cette condition, la série de Lagrange S (1), tirée de la proposée (1), et regardée comme une fonction de u, jouira, d'après le théorème (A) du § I, du système de convergence, composé des valeurs de u parmi lesquelles se trouve la même quantité u_i.

Cela posé, en nous bornant aux valeurs de u composant le système indiqué tout à l'heure, nous disons, 1° que l'indice de l'ordre de la racine α sera constamment le même pour toutes ces valeurs de u; 2° qu'il ne pourra jamais devenir, quels que soient u_i et $f(x)$, qu'égal à $i-1$, ou à i, ou à $i+1$; 3° que si $1 - f'(-\infty)$ est une quantité positive, l'ordre de la racine α sera précisément i, si i est impair; et $i-1$, ou $i+1$, si i est pair. Le con-

traire aura lieu si $1 - f'(-\infty)$ est une quantité négative : savoir l'ordre de la racine α sera alors i, si i est pair, et $i - 1$ ou $i + 1$ si i est impair.

Nous commençons par démontrer la première partie de ce théorème, celle par laquelle on affirme que l'ordre de la racine α est le même pour toutes les valeurs de u composant le système de convergence dont les limites renferment la quantité u_i. Nous nous appuierons à cet effet sur le théorème suivant de M. Cauchy.

Lorsque les différents termes d'une série sont des fonctions d'une même variable u continues par rapport à cette variable, dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de u. (Voir *Cours d'analyse algébrique*, par M. Cauchy, chap. VI, § I, p. 131 et suiv.)

Nous ferons observer, avant tout, que les valeurs de u composant le système de convergence ci-dessus indiqué, rangées dans l'ordre de leurs grandeurs, formeront une suite de termes tels, que l'un d'eux quelconque différera infiniment peu, soit de celui qui le précède, soit de celui qui le suit. Dès lors, supposons, pour un instant, que U étant une de ces valeurs de u, la série S (1) donne, pour $u = \mathrm{U}$, la racine de l'ordre p, savoir x_p, et pour la valeur consécutive $u = \mathrm{U} + h$ (h étant infiniment petit), celle de l'ordre q, savoir x_q. Il en résulterait que la série S (1) cesserait d'être continue dans le voisinage de $u = \mathrm{U}$, comme nous allons le faire voir.

D'abord, eu égard à ce que la première dérivée (4) a, par hypothèse, ses racines toutes réelles, on tirera de la formule (8), relative au théorème I,

$$(38) \qquad x_p = \mathrm{M}(x'_{p-1} \ldots x'_p) \quad x_q = \mathrm{M}(x'_{q-1} \ldots x'_q).$$

Or ces deux dernières formules montrent que les deux racines x_p et x_q, pour une même valeur de u, diffèrent toujours l'une de l'autre d'une quantité finie, à moins qu'elles ne soient égales entre elles, auquel cas on aurait $q = p + 1$, et la valeur commune des

deux racines serait x'_p. Mais pour $u = \mathrm{U}$, ce cas est impossible; car il est contraire au principe par lequel la racine donnée par la série S (1) est toujours une racine simple pour toute valeur d'un paramètre quelconque comprise entre les deux limites de convergence de la même série, comme nous l'avons remarqué à l'occasion du théorème 1 du § II. Il est donc certain que les deux racines x_p et x_q, pour la valeur $u = \mathrm{U}$, diffèrent entre elles d'une quantité finie. Mais, d'un autre côté, il est évident que la valeur de x_q, correspondante à $u = \mathrm{U} + h$, est sensiblement égale à celle qu'elle acquiert pour $u = \mathrm{U}$. On conclut de là que les deux valeurs qu'acquièrent les deux racines x_p et x_q, l'une x_p pour $u = \mathrm{U}$, et l'autre x_q pour $u = \mathrm{U} + h$, diffèrent aussi nécessairement entre elles d'une quantité finie. Par suite, si la série S (1), pour $u = \mathrm{U}$, donnait la racine x_p, et pour $u = \mathrm{U} + h$ la racine x_q, elle cesserait évidemment d'être continue dans le voisinage de $u = \mathrm{U}$. Ce qui est en parfaite contradiction avec le théorème de M. Cauchy, ci-dessus cité.

La première partie du théorème 4 est, par là, démontrée, et il sera, par suite, facile d'en démontrer la seconde. Supposons, en effet, que ce soit x_p la racine donnée par la série S (1), p sera, d'après ce qui précède, un nombre constant pour toutes les valeurs de u composant le système de convergence dont il est question. Partant, tout se réduit à chercher la valeur de cet indice p, correspondante à une des valeurs de u appartenant au système de convergence indiqué tout à l'heure. Nous choisirons, à cet effet, la valeur particulière $u = u_i$. Dans ce cas, la série S (1) se réduisant à son propre terme, on voit, sans peine, que la racine x_p devient égale à u_i. D'ailleurs, remarquons que $f(x)$ étant, par hypothèse, une fonction entière de x, l'équation (36) a sa dérivée du second ordre commune avec la proposée (1). Par suite, la formule (29), en y faisant $n = n' = 2$, et remplaçant y par u, nous donnera

$$x_i = \mathrm{M}(u_{i-2} \ldots u_{i+2}), \tag{39}$$

x_i, u_{i-2} et u_{i+2} étant la racine de l'ordre i de la proposée (1), et les racines des ordres $i-2$ et $i+2$ de l'équation (36).

Or cette dernière formule, en y changeant successivement i en $i-2$, $i-1$, $i+1$ et $i+2$ nous en fournit quatre autres, dont la considération nous met à même de conclure que l'indice p de la racine x_p ne peut-être que l'un de ceux-ci, $i-1$, i et $i+1$. En effet, si p pouvait être inférieur à $i-1$, par exemple égal à $i-2$, alors la racine α serait x_{i-2}; et comme la série de Lagrange est croissante avec le paramètre u (§ II), il s'ensuivrait que, pour des valeurs de u supérieures à u_i, la racine x_{i-2} deviendrait plus grande que u_i : ce qui est contraire à la formule

$$x_{i-2} = \mathrm{M}(u_{i-1}\ldots u_i), \tag{40}$$

qu'on déduit de la précédente (39) en y changeant i en $i-2$.

De même, si p pouvait devenir égal à $i+2$, en sorte que α fût la racine x_{i+2}, il en résulterait que, pour des valeurs de u inférieures à u_i, la racine x_{i+2} deviendrait plus petite que u_i : ce qui répugne à la formule

$$x_{i+2} = \mathrm{M}(u_i\ldots u_{i+1}), \tag{41}$$

qu'on tire de la formule (39) en y changeant i en $i+2$.

La seconde partie du théorème 4 est donc démontrée. En ce qui concerne la troisième partie du même théorème, il faut d'abord remarquer qu'en vertu de l'hypothèse faite, que les racines de la première dérivée (4) soient toutes réelles, les propriétés générales des diverses racines de la proposée, que nous avons signalées au § II[1], d'après le mode d'arrangement des racines y adopté, conviennent encore toutes, ainsi que leurs corollaires, aux racines de la proposée, rangées et distinguées entre elles de la manière adoptée dans le présent paragraphe. Ceci admis, et eu égard encore à la propriété de la série de Lagrange, d'être toujours croissante par rapport au paramètre u, on se convaincra parfaitement de la vérité de la troisième partie du théorème 4.

[1] P. 364 et suivantes.

Ce théorème entraîne quelques conséquences qu'il est important de signaler.

1° Rappelons-nous, d'abord, ce qui a déjà été soigneusement remarqué (note au § I), à savoir que le système de convergence, par rapport à u de la série S (1), et caractérisé par ce que ses limites l et l' comprennent la valeur $u = u_i$, peut quelquefois être tel, que ses limites l et l', outre la valeur $u = u_i$, comprennent encore u_{i+1}, u_{i+2}... ces quantités exprimant les racines consécutives à u_i de l'équation (36). Or, nous pouvons, à l'aide du théorème précédent, entrer à cet égard dans quelques détails intéressants.

D'abord, supposons que les limites l et l' du système de convergence dont il s'agit comprennent les deux racines u_i et u_{i+1}. Alors, en vertu du théorème précédent, la racine α donnée par la série S (1), en supposant que l'on ait $1 - f'(-\infty) > 0$, serait 1°, à ne considérer que la quantité u_i, la racine x_i si i est impair, et x_{i-1} ou bien x_{i+1} si i est pair; 2° à ne considérer que la quantité u_{i+1}, la racine x_i ou x_{i+2} si i est impair, et x_{i+1} si i est pair. Or, pour que ces résultats s'accordent entre eux, il faut conclure que, dans le cas actuel, la racine α ne peut être que x_i si i est impair, et x_{i+1} si i est pair. Si, au contraire, on admet que l'on ait $1 - f'(-\infty) < 0$, par un raisonnement analogue au précédent, on conclura que la racine α ne peut être, alors, que x_i si i est pair, et x_{i+1} si i est impair. Ainsi soit l'équation

$$(42) \quad u - x + (0,1)\, x^2 (x - 5)(x - 6)(x - 6,1) = 0.$$

Nous avons déjà reconnu, au § II, que sa première dérivée a ses racines toutes réelles. D'ailleurs, en la comparant à la formule (2), on obtiendra

$$(43) \quad f(x) = 0,1\, x^2 (x - 5)(x - 6)(x - 6,1);$$

en sorte que l'équation (36) a, elle aussi, ses racines toutes réelles, qui sont

$$(44) \quad u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 5,\ u_4 = 6,\ u_5 = 6,1.$$

En outre, attendu que les deux racines égales à 6 et 6,1 sont très-rapprochées entre elles, et que l'on a

$$(45) \qquad f'(6) = -0{,}36, \text{ et } f'(6{,}1) = +0{,}409311,$$

il résulte du théorème (A) du § I que la série S (1), déduite de l'équation (42), jouira d'un système de convergence dont les limites l et l' renfermeront les quantités $u_4 = 6$ et $u_5 = 6{,}1$. Par suite, eu égard encore à ce qu'on a ici $1 - f'(-\infty) < 0$, on conclura que, pour toute valeur de u comprise entre 6 et 6,1, par exemple pour $u = 6{,}05$, la série S (1) donnera toujours la racine du quatrième ordre de la proposée, savoir x_4 : ce qui s'accorde avec les résultats obtenus à cet égard au § II.

Soit encore donnée l'équation

$$(46) \qquad u - x - (0{,}1)\, x^3 (x-5)^2 = 0,$$

dont la première dérivée a ses racines toutes réelles (§ II), et qui, comparée à la formule (2), nous donne

$$(47) \qquad f(x) = -(0{,}1)\, x^3 (x-5)^2,$$

en sorte que l'équation (36) devient ici une équation du quatrième degré, dont les quatre racines sont toutes réelles et ont les valeurs suivantes :

$$(48) \qquad u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 5,\ u_4 = 5.$$

La série de Lagrange, appliquée à l'équation proposée (46), ne manquera pas de jouir de deux systèmes de convergence par rapport à u, tels que les limites de l'un comprennent, entre elles, les deux racines u_1 et u_2 égales entre elles, et égales à zéro, et les limites de l'autre, les deux autres racines u_3 et u_4 égales aussi entre elles, et ayant pour valeur commune 5. Or, d'après ce que nous avons établi précédemment, et eu égard à ce qu'on a encore

$$1 - f'(-\infty) < 0,$$

on conclura que la série S (1), pour toute valeur de u appartenant à la première période, donnera constamment la racine du second ordre, savoir x_2, et pour toute valeur de u appartenant à la seconde période, donnera constamment x_1, savoir la racine la plus grande.

Supposons, maintenant, que les deux limites l et l' comprennent, entre elles, les trois racines consécutives de l'équation (36), u_i, u_{i+1}, u_{i+2}. Alors les résultats qu'on en déduirait, comme conséquences nécessaires du théorème 4, pourraient encore s'accorder entre eux sous certaines restrictions qu'il est bien facile de déterminer. Mais si, en poussant plus loin ces suppositions, nous admettons que les mêmes limites comprennent, entre elles, plus de trois racines consécutives de l'équation (36), on se convaincra sans peine que le théorème 4 entraînerait des résultats contradictoires entre eux. Nous tirons de là ce théorème.

Théorème 5. — Si l'équation algébrique (1), savoir $F(x) = 0$, est telle que sa première dérivée (4), savoir $F'(x) = 0$, ait ses racines toutes réelles; si, en outre, on ramène la proposée (1) à la forme (2), $u - x + f(x) = 0$, en sorte que $f(x)$ soit une fonction entière de x; il est impossible que la série S (1), tirée de l'équation proposée, puisse acquérir un système de convergence composé de valeurs du paramètre u, renfermées entre deux limites l et l' qui comprennent entre elles plus de trois racines consécutives[1] de l'équation (36), savoir $f(x) = 0$.

Ce dernier théorème nous fait connaître une propriété dont jouit la fonction $f(x)$ qui entre dans l'équation réduite (2), lorsque la première dérivée de la proposée a ses racines toutes réelles. C'est que $f(x)$, en l'astreignant toujours à être une fonction entière de x, ne pourra jamais acquérir un facteur réel de la forme

[1] Peut-être est-il bon d'avertir que les racines consécutives y mentionnées ne sont point astreintes à être toutes réelles. En d'autres termes, la conclusion de ce théorème peut être ainsi énoncée :

La série S (1) ne pourra jamais acquérir un système de convergence par rapport à u, dont les limites $u = l$ et $u = l'$ renferment, entre elles, deux racines u_i et u_{i+p} de l'équation (36), telles que leurs indices i et $i + p$ diffèrent entre eux de plus de deux unités.

$x - a$, élevé à une puissance dont l'exposant soit supérieur à 3. Car si l'on avait, par exemple

$$f(x) = (x-a)^4 \psi(x), \tag{49}$$

$\psi(x)$ étant une autre fonction entière de x, alors, eu égard au théorème (A) du § I, la série S (1), en vertu de la dernière valeur de $f(x)$, serait nécessairement convergente pour $u = a$, ou pour u pris dans le voisinage de a. D'ailleurs a étant, par hypothèse, une racine multiple dont le degré de multiplicité est égal à 4, on en conclurait que le système de convergence composé des valeurs de u situées dans le voisinage de a comprendrait quatre racines consécutives de l'équation (36). Ce qui est contraire au théorème 5 établi ci-dessus.

Au reste, ce n'est pas que la propriété précédente de $f(x)$ ne puisse être démontrée autrement qu'avec le secours des théorèmes 4 et 5. Mais elle a été choisie comme exemple propre à démontrer le parti qu'on peut tirer des théorèmes indiqués tout à l'heure pour découvrir les propriétés des racines des équations algébriques. Ajoutons qu'elle peut encore être confirmée à l'aide de la formule (29) relative au théorème 3, ainsi qu'on va le voir.

Supposons que l'équation (36) ait une racine quadruple telle qu'on ait $u_i = u_{i+1} = u_{i+2} = u_{i+3}$; et soit a la valeur commune de ces quatre racines. D'abord, nous disons que la première dérivée de la proposée (1) devrait avoir une racine égale à $u_i = a$.

En effet, cette équation et celle (36) offrent un couple de deux équations telles que la première dérivée de la première d'entre elles est en même temps la seconde dérivée de l'autre. Par suite, x'_i étant la racine de l'ordre i de l'équation (4), on aura par la formule (29), en y changeant x en x', y en u, et en faisant $n = 1$, $n' = 2$.

$$x'_i = \mathrm{M}(u_{i-1} \ldots u_{i+2}), \tag{50}$$

d'où il vient

$$x'_{i+1} = \mathrm{M}(u_i \ldots u_{i+3}). \tag{51}$$

De cette dernière formule, et eu égard à ce que, par hypothèse, la racine x_{i+1} est réelle, et que l'on a $u_i = u_{i+1} = u_{i+2} = u_{i+3}$, on conclura que la racine x'_{i+1} ne peut acquérir autre valeur que u_i. On aura donc l'équation

$$F'(u_i) = 0, \tag{52}$$

laquelle entraîne cette autre,

$$1 - f'(u_i) = 0, \tag{53}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f'(u_i) = 1. \tag{54}$$

Or, ce dernier résultat est contraire à l'hypothèse que u_i soit une racine multiple de l'équation (36). Car cette hypothèse entraîne la condition

$$f'(u_i) = 0. \tag{55}$$

Nous ne pousserons pas plus loin les conséquences du théorème 4. Mais, en terminant, nous remarquerons que lorsqu'on propose une équation sous la forme (2), et telle qu'en y appliquant la série S (1), celle-ci acquiert un système de convergence composé de valeurs de u, parmi lesquelles se trouvent deux racines de l'équation (36), dont les indices diffèrent entre eux de plus de deux unités, on sera par là assuré que la proposée et sa première dérivée ont des racines imaginaires. Ainsi, soit, par exemple,

$$u = x + h(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_m) = 0, \tag{56}$$

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$ étant des quantités réelles quelconques, rangées dans leur ordre de grandeur.

Il est évident qu'en y appliquant la série de Lagrange S (1), on obtiendra, en prenant h assez petit, une série qui jouira certainement de systèmes de convergence par rapport au paramètre variable

u, dont les limites l et l' comprendront, entre elles, plus de trois des quantités indiquées ci-dessus :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m.$$

Nous conclurons de là que l'équation (56) et sa première dérivée, en prenant h assez petit, finiront par acquérir nécessairement des racines imaginaires. Cette conclusion peut, d'ailleurs, se confirmer par les principes ordinaires de l'algèbre.

SECOND MÉMOIRE[1].

Dans ce mémoire, j'envisage la série de Lagrange sous le rapport de sa convergence. Après les résultats très-décisifs obtenus par l'illustre Cauchy sur la convergence des séries en général, et en particulier sur celle de la série de Lagrange, on s'étonnera, au premier abord, que j'aie eu le dessein de faire de ce point l'objet principal de ce mémoire. Aussi me hâterai-je de dire quel a été le motif qui m'a engagé à traiter ce sujet.

Lagrange, au § IV de son mémoire de l'Académie de Berlin pour l'année 1768, intitulé : *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales au moyen des séries*, a donné une règle pour déterminer la condition de convergence de sa série, en supposant que son terme général ait une valeur réelle quelconque. Mais en examinant attentivement cette règle, j'ai reconnu qu'elle n'était exacte qu'autant que le terme général de la série remplit certaines conditions que j'ai signalées dans le cours de ce mémoire (voir § II). Je me suis de plus aperçu que, lorsque ces conditions sont remplies, la règle de Lagrange mentionnée, non-seulement est vraie, mais elle peut encore se transformer en une autre jouissant d'un énoncé très-simple, et qui dépend, en définitive, du minimum d'une fonction d'une seule variable. La nouvelle règle dont je viens de parler, lorsqu'elle a lieu, offre encore l'avantage

[1] Présenté à l'Académie des sciences le 14 juin 1847.

d'être comparable à la belle règle que M. Cauchy, dans son mémoire sur divers points d'analyse (tome VII des Mémoires de l'Institut), a trouvée pour la même série de Lagrange, en supposant que le terme général de cette série ait une valeur quelconque, réelle ou imaginaire; et cette comparaison nous conduit à une simplification de la règle de M. Cauchy que nous venons de citer, simplification qui, tout en n'ayant lieu que lorsque le terme général de la série vérifie les conditions plus haut mentionnées, me semble pourtant digne de quelque remarque. Les résultats que je viens d'indiquer sommairement forment l'objet des quatre premiers paragraphes de ce mémoire, et pour y parvenir, il m'a suffi de modifier un peu la méthode même que Lagrange, dans l'endroit cité de son mémoire de Berlin, a suivie pour établir sa règle de convergence. Mais je n'entrerai pas à cet égard dans de plus amples détails, et je finirai ce préambule en disant que pour épuiser, autant qu'il était en moi, le sujet de mes recherches, j'ai, dans le dernier paragraphe, examiné une proposition d'Euler, que ce grand géomètre a énoncée dans son mémoire qui a pour titre : *Observationes circa radices æquationum.* (*Nouveaux Commentaires de Pétersbourg,* tome XV.) Il m'a été facile de faire voir que cette proposition est aussi inexacte, et que la méprise d'Euler dérive de la même source que celle dans laquelle est tombé Lagrange en cherchant à démontrer sa proposition de la note XI de la *Résolution des équations numériques.*

§ I.

Soit

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots . u_i,\ u_{i+1} \tag{1}$$

une série réelle ou imaginaire, et supposons que la valeur numérique ou le module du terme général u_i soit une fonction donnée de l'indice i développable en une somme de termes tous positifs, et liés entre eux d'après une loi quelconque.

Comme le module de u_i est dépendant de l'indice i, il en sera

de même des termes dont la somme compose ce même module. De plus, ces termes dérivant les uns des autres d'après une loi connue, nous pouvons concevoir qu'ils dépendent d'un certain nombre d'indéterminées $m, n, r, s\ldots$ et qu'ils s'obtiennent, pour un même indice i, en attribuant à ces indéterminées certains systèmes de valeurs entières déduits d'équations propres à les déterminer. D'après cela, soit $S_{i, m, n, r, s\ldots}$ un quelconque des termes en question, on aura

$$\text{(2)} \qquad \text{Module } u_i = \Sigma\, S_{i, m, n, r, s\ldots}$$

la somme Σ se rapportant aux seules indéterminées $m, n, r, s\ldots$ généralement censées, comme nous l'avons déjà dit, recevoir des valeurs entières en nombre déterminé, qu'on déduira d'équations données *a priori*. Inutile de dire que, dans cette somme, l'indice i est considéré comme constant.

Cela posé, eu toujours égard à l'hypothèse essentielle que le module de u_i est donné par une somme de termes tous positifs, il est évident que ce module ne peut converger vers zéro à mesure que son indice i croît indéfiniment, qu'autant que chacun des termes positifs, compris dans la somme ci-dessus Σ, converge lui-même vers zéro. D'ailleurs, entre tous les termes qui composent la somme Σ, certes il y en a un qui sera le plus grand de tous, quel que soit l'indice i. Soit T_i ce terme, qui sera nécessairement une fonction du seul indice i, et par suite, indépendant des indéterminées $m, n, r, s\ldots$ Alors, si l'on désigne par N_i le nombre des termes dont se compose la somme Σ, le module du terme général u_i sera évidemment inférieur à la valeur du terme général $N_i \times T_i$ de la nouvelle série formée par les termes

$$N_0 T_0,\quad N_1 T_1,\quad N_2 T_2, \ldots . N_i T_i,\quad N_{i+1} T_{i+1}, \text{ etc}\ldots$$

et il sera supérieur au terme général T_i de la série

$$T_0, T_1, T_2 \ldots . T_i, T_{i+1},$$

en sorte qu'on aura

$$\text{mod } u_i < N_i T_i,$$

et

$$\text{mod } u_i > T_i.$$

Partant, en désignant par R le module de la série (1), on aura évidemment

$$R = \text{ou} < \lim \frac{N_{i+1}}{N_i} \frac{T_{i+1}}{T_i}, \tag{3}$$

et en même temps

$$R = \text{ou} > \lim \frac{T_{i+1}}{T_i}, \tag{4}$$

N_{i+1} étant le nombre des termes dont se compose la somme Σ lorsque i devient $i+1$, et les limites ici indiquées se rapportant à i infiniment grand.

Or, si le rapport $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ pour i infiniment grand a pour limite l'unité, il est clair que les formules (3) et (4) se réduiront à la suivante :

$$R = \lim \frac{T_{i+1}}{T_i}. \tag{5}$$

Ainsi nous pouvons énoncer cette proposition.

Lemme A. — Soit la série simple

$$u_0, u_1, u_2 \ldots . u_i, u_{i+1}, \tag{1}$$

dont le terme général est u_i, et supposons que le module de ce terme soit exprimable en une somme de termes tous positifs, de la forme suivante :

$$\text{mod } u_i = \Sigma S_{i, m, n, r, s, \ldots} \tag{2}$$

la somme Σ se rapportant aux indéterminées $m, n, r, s \ldots .$ censées recevoir des valeurs entières, en nombre déterminé, propres

à satisfaire à des conditions données. Soit, de plus, N_i le nombre des termes dont se compose la somme Σ, et supposons que la limite $\frac{N_{i+1}}{N_i}$ converge vers l'unité pour i infiniment grand.

Admettons enfin qu'au moins pour i très-grand, on puisse déterminer en fonction de i le maximum de $S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s,\ldots}$ cette quantité étant regardée comme une fonction des seules indéterminées entières $m, n, r, s\ldots$ et i étant constant.

En désignant par T_i ce maximum, le module R de la série (1) sera

$$R = \lim \frac{T_{i+1}}{T_i}, \tag{5}$$

et la même série sera, par suite, convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$\lim \frac{T_{i+1}}{T_i} < \text{ou} > 1. \tag{6}$$

Remarque. — Il est bon de remarquer que la condition (6) est en même temps la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série multiple ayant pour terme général la quantité

$$S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s,\ldots}$$

$i, m, n, r, s\ldots$ étant les divers indices de ce terme, et conservant les mêmes valeurs que précédemment.

Par conséquent, lorsque les conditions du lemme seront remplies, on pourra affirmer que la série simple, dont le terme général u_i a pour module

$$\text{mod } u_i = \Sigma\, S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s,\ldots},$$

et la série multiple ayant pour terme général la quantité toujours positive

$$S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s,\ldots}$$

présentent cela de remarquable, qu'elles sont toujours à la fois convergentes ou divergentes.

Pour montrer une première application du lemme précédent, je choisirai pour exemple le développement du rayon vecteur elliptique suivant les puissances de l'excentricité, pour le cas où l'anomalie moyenne est égale à $\frac{\pi}{2}$. Prenons pour unité le demi-grand axe de l'ellipse, désignons par c son excentricité, par t l'anomalie moyenne comptée du périhélie, et par r le rayon vecteur. On aura, par le n° 22 du second livre de la *Mécanique céleste* :

$$(7)\quad r = 1 + \frac{c^2}{2} - c\cos t - \frac{c^2}{1.2}\cos 2t - \frac{c^3}{1.2.2^2}(3\cos 3t - 3\cos t) - \text{etc...}$$

Le terme général de cette série est, abstraction faite du signe,

$$\frac{c^i}{1.2.3.4.(i-1)\,2^{i-1}}\left[i^{i-2}\cos it - i\,(i-2)^{i-2}\cos(i-2)t + \frac{i\,(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2}\cos(i-4)t - \text{etc...}\right]$$

les termes compris entre parenthèse étant continués jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $(i-2r)^{i-2}$ dans lequel $i-2r$ est négatif.

Si l'on fait t égal à un angle droit, ce terme devient nul lorsque i est impair, et dans le cas de i pair il devient, abstraction faite du signe, égal à

$$(8)\quad \frac{c^i}{1.2.3\ldots(i-1)\,2^{i-1}}\left[i^{i-2} + i\,(i-2)^{i-2} + \frac{i\,(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2} + \frac{i\,(i-1)\,(i-2)}{1.2.3}(i-6)^{i-2} + \text{etc...}\right]$$

Ainsi la série (7), lorsqu'on y fait $t = \frac{\pi}{2}$, rentre dans la série (1), pourvu que l'on pose

$$(9)\quad u_i = \pm\frac{c^i}{1.2.3.(i-1)\,2^{i-1}}\left[i^{i-2} + i\,(i-2)^{i-2} + \frac{i\,(i-1)}{1.2}(i-4)^{i-2} + \ldots\right]$$

le signe + ayant lieu si i est un multiple de 4, et le signe — si i est simplement un multiple de 2.

De l'équation (9) on tire

$$(10)\quad \text{val.num. } u_i = \frac{c^i}{1.2.3\ldots(i-1)\,2^{i-1}} \Sigma \frac{i\,(i-1)\,(i-2)\ldots(i-m+1)}{1.2.3\ldots m}(i-2m)^{i-2}$$

la somme Σ se rapportant à la seule indéterminée m, qui doit être censée susceptible des valeurs entières et positives comprises dans la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots\frac{i}{2}.$$

En comparant l'équation (10) à l'équation (2) du lemme (A), on trouve

$$(11)\qquad S_{i,\ m,\ n,\ r,\ s,\ldots} = \frac{i\,(i-1)\,(i-2)\ldots(i-m+1)\,(i-2m)^{i-2}}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(i-1)\,2^{i-1}}\,c^i,$$

les indéterminées m, n, r, s.... se réduisant, comme on voit, à la seule m. L'on a de plus

$$N_i = \frac{i}{2} + 1,$$

en sorte qu'on a

$$\lim \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{i+3}{i+2} = 1.$$

Ainsi le lemme (A) est applicable à l'exemple qui nous occupe, et il ne reste qu'à chercher la valeur à laquelle se réduit la quantité qui se trouve dans ce lemme désignée par T_i. Autrement dit, la difficulté se réduit à chercher le maximum de la quantité qui représente le second membre de l'équation (11), cette quantité étant considérée comme une fonction de m, et l'indice i étant supposé constant et très-grand.

Pour cela nous aurons recours aux deux formules de Stirling

$$1.2.3\ldots x = \frac{\sqrt{\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x},$$

x étant très-grand;

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}{(x-y)^{x-y+\frac{1}{2}}},$$

x et y étant très-grands, et π désignant le rapport de la circonférence au diamètre.

On tire de ces formules

$$i(i-1)\ldots(i-m+1) = \frac{i^{i+\frac{1}{2}}e^{-m}}{(i-m)^{i-m+\frac{1}{2}}},$$

$$1.2.3\ldots m = \frac{\sqrt{\pi}.m^{m+\frac{1}{2}}}{e^m},$$

$$1.2.3\ldots(i-1) = \frac{\sqrt{\pi}(i-1)^{i-\frac{1}{2}}}{e^{i-1}}.$$

On aura par là

$$(12)\qquad \frac{c^i}{1.2.3\ldots(i-1)2^{i-1}}\,\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-m+1)}{1.2.3\ldots m}\,(i-2m)^{i-2m} = \frac{2\,i^{\frac{1}{2}}(i-1)^{\frac{1}{2}}}{e\,m^{\frac{1}{2}}\pi(i-m)^{\frac{1}{2}}(i-1)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{i^i e^i c^i (i-2m)^{i-2m}}{2^i m^m (i-m)^{i-m}(i-1)^i}.$$

Cela posé, en faisant $m = \mu i$, le second membre de l'équation précédente se réduira à

$$(13)\qquad \frac{2}{i\,\mu^{\frac{1}{2}}\pi(1-\mu)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{e\,c(1-2\mu)}{2\,\mu^{\mu}(1-\mu)^{1-\mu}}\right]^i.$$

Partant, le maximum T_i indiqué dans le lemme (A) se réduit actuellement au maximum de la dernière quantité considérée comme une fonction de la variable μ. D'ailleurs, avec un peu de réflexion, on s'aperçoit que la valeur de μ, qui, substituée dans la quantité (13), la rend un maximum, doit coïncider avec celle même de μ qui donne le maximum de la simple quantité

$$(14)\qquad \frac{e\,c(1-2\mu)}{2\,\mu^{\mu}(1-\mu)^{1-\mu}}.$$

En effet, soit V le logarithme hyperbolique de la quantité (13), on aura

$$V = i \log \frac{e\, c\, (1-2\mu)}{2\, \mu^{\mu}\, (1-\mu)^{1-\mu}} - \log \left[i\, \mu^{\frac{1}{2}}\, \pi\, (1-\mu)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Mais i étant très-grand, le second terme du second membre de cette équation s'évanouit vis-à-vis du premier. On a ainsi sensiblement

$$V = i \log \frac{e\, c\, (1-2\mu)}{2\, \mu^{\mu}\, (1-\mu)^{1-\mu}}, \tag{15}$$

équation qui démontre que la valeur de μ correspondante au maximum de V, et, par suite, à celui de la quantité (13), coïncide, en définitive, avec la valeur de μ, qui donne le maximum de la quantité (14) : ce qu'il s'agissait de prouver.

Maintenant, supposons que μ représente effectivement la valeur que nous venons de mentionner, on aura alors pour la quantité T_i,

$$T_i = \frac{2}{i\, \mu^{\frac{1}{2}}\, \pi\, (1-\mu)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{e\, c\, (1-2\mu)}{2\, \mu^{\mu}\, (1-\mu)^{1-\mu}} \right]^i,$$

d'où il vient

$$\lim \frac{T_{i+1}}{T_i} = \frac{e\, c\, (1-2\mu)}{2\, \mu^{\mu}\, (1-\mu)^{1-\mu}}.$$

Ainsi, la série qui a pour terme général le second membre de l'équation (9) sera, en vertu du lemme (A), convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$\frac{e\, c\, (1-2\mu)}{2\, \mu^{\mu}\, (1-\mu)^{1-\mu}} < \text{ou} > 1, \tag{16}$$

en retenant que μ représente ici la valeur qui rend un maximum le premier membre de cette inégalité. Ajoutons qu'il est aisé de s'assurer, par les principes du calcul différentiel, que la valeur de μ, dont il s'agit, est la racine comprise entre o et $\frac{1}{2}$ de l'équation transcendante,

$$\frac{1-\mu}{\mu} = e^{\frac{2}{1-2\mu}}. \tag{17}$$

Le résultat auquel nous venons de parvenir est celui même que l'illustre Laplace a obtenu le premier dans un article inséré dans la *Connaissance des temps* pour l'année 1828.

§ II.

Considérons présentement la série dont le terme général est

$$u_i = \frac{1}{1.2.3.4..i} \frac{d^{i+k}[\pi(t)]^i}{dt^{i+k}}, \tag{1}$$

k étant un nombre constant quelconque, et $\pi(t)$ une fonction donnée du paramètre t.

Voyons, avant tout, dans quel cas le second membre de l'équation (1) pourra s'exprimer par une somme analogue à la somme Σ considérée dans le lemme (A). Pour plus de simplicité, nous supposerons que $\pi(t)$ soit une fonction réelle de t, et que t soit un paramètre réel. Alors, en développant $\pi(t)$ suivant les puissances quelconques de t, soit

$$\pi(t) = A\,t^a + B\,t^b + C\,t^c + \ldots + H\,t^h, \tag{2}$$

et désignons par λ le nombre des termes dont se compose ce développement. L'on a, comme on sait,

$$[\pi(t)]^i = \Sigma \frac{1.2.3....i}{1.2.3..m.1.2.3.n.1.2.3..r..} A^m.B^n.C^r.... t^{am+bn+cr+\text{etc}...} \tag{3}$$

où Σ indique la somme de tous les termes qu'on déduit de la formule soumise à ce signe, en attribuant aux indéterminées m, n, r, s.... toutes les valeurs entières et positives propres à satisfaire à l'équation

$$m + n + r + s + \ldots = i. \tag{4}$$

En faisant

$$u = am + bn + cr + \text{etc.} \tag{5}$$

et désignant par l la somme $i+k$, on tire de l'équation (3),

$$(6)\qquad \text{val. num.}\frac{d^{i+k}[\pi(t)]^{i}}{1.2.3\ldots i\,dt^{i+k}}$$
$$=\text{val. num.}\frac{1}{t^{l}}\Sigma\frac{u(u-1)\ldots(u-l+1)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n\ldots}(At^{a})^{m}(Bt^{b})^{n}\ldots$$

le signe Σ ayant toujours la même signification que précédemment.

Pour que la somme comprise dans le second membre de l'équation (6) soit comparable à celle considérée dans le lemme (A), il faut qu'elle se compose de termes tous positifs. Or, pour cela, les conditions nécessaires et suffisantes se réduisent d'abord aux deux suivantes :

1° Que les différents termes du polynôme qui représente le développement de $\pi(t)$ soient tous affectés du même signe;

2° Que le produit $u(u-1)(u-2)\ldots(u-l+1)$ soit lui-même toujours affecté du même signe, pour toute valeur de u tirée de l'équation (5).

Examinons dans quels cas cette dernière condition sera remplie. Il faudra d'abord que les facteurs u, $u-1$, $u-2\ldots u-l+1$, demeurent tous affectés du même signe, ou bien que le nombre des facteurs négatifs reste toujours de la même parité pour toute valeur de u tirée de l'équation (5). Mais on voit sans peine qu'en supposant pour un moment que, parmi les facteurs en question, il y en ait de positifs et de négatifs, il est impossible que le nombre des facteurs négatifs soit toujours de la même parité, quelle que soit la valeur de u tirée de l'équation (5). Il faut ainsi tâcher de rendre les facteurs u, $u-1\ldots$ tous de même signe. Or ceci peut avoir lieu en deux cas différents : 1° en prenant les exposants a, b, $c\ldots$ négatifs, leurs valeurs numériques étant d'ailleurs quelconques, hypothèse qui entraîne pour u des valeurs toutes négatives en vertu des équations (4) et (5); et par suite les facteurs u, $u-1$, $u-2\ldots u-l+1$, deviendront eux-mêmes tous négatifs; 2° en prenant les exposants a, b, $c\ldots$ tous positifs,

leurs valeurs étant toutes plus grandes que l'unité, et pouvant être entières ou fractionnaires. En effet, dans ce cas, il est évident que la valeur de u tirée de l'équation (5) résultera toujours supérieure à l'exposant i. Par suite, l'hypothèse que les exposants soient tous supérieurs à l'unité entraîne la conséquence que u soit toujours supérieur à i, et même à $i + k - 1 = l - 1$ pour i très-grand.

Il ne faut pas, toutefois, omettre d'observer que par rapport aux exposants $a, b, c \ldots$ il y a encore un autre cas à considérer. C'est celui où ces exposants étant tous positifs, l'un d'eux, par exemple a, se réduit à zéro, les autres ayant tous des valeurs entières. Car alors les valeurs du produit

$$u(u-1)(u-2)\ldots(u-l+1)$$

correspondantes à des valeurs de u inférieures à $l-1$, se réduisent toutes à zéro. D'ailleurs les valeurs du même produit correspondantes à u plus grand que $l-1$ restent évidemment toutes positives.

En résumé, le second membre de l'équation (6) se composera de termes tous positifs, alors seulement que seront remplies les deux conditions suivantes :

1° Que les termes $A t^a$, $B t^b$, $C t^c \ldots$ soient tous de même signe;

2° Que les exposants $a, b, c \ldots$ soient tous de même signe, savoir : ou tous négatifs, leurs valeurs numériques pouvant être quelconques; ou tous positifs, leurs valeurs étant toutes supérieures à l'unité et pouvant être entières ou fractionnaires. De plus, dans le cas des exposants positifs, on remarquera que l'un d'eux pourrait se réduire à zéro, si les autres sont tous entiers.

Maintenant, supposons que les deux conditions précédentes soient remplies. En comparant l'équation (6) à l'équation (2) du lemme (A), on tire

$$S_{i,m,n,r,s,\ldots} = \text{val. num.} \frac{1}{t^l} \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-l+1)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n\ldots} (A t^a)^m (B t^b)^n (C t^c)^r \ldots$$

De plus, le nombre N_i des termes compris dans la somme Σ représentant le second membre de l'équation (6), a, comme on sait, pour valeur

$$N_i = \frac{(i+1)(i+2)\dots(i+\lambda-1)}{1.2.3\dots\lambda}.$$

D'où il vient $\frac{N^{i+1}}{N^i} = 1$ pour i infiniment grand.

Partant le lemme (A) est applicable à la série (1), en conservant toujours l'hypothèse que la fonction $\pi(t)$ remplisse les deux conditions signalées précédemment; et d'après ce lemme, toute la difficulté se réduit à chercher la valeur la plus grande que puisse acquérir la valeur numérique de la quantité

$$\frac{1}{t^l}\,\frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-l+1)}{1.2.3\dots m.1.2.3\dots n\dots}\,(A t^a)^m (B t^b)^n (C t^c)^r \dots$$

pour toutes les valeurs entières et positives de m, n, r, s... qui satisfont à l'équation (4), u étant toujours donné par l'équation (5), et i étant regardé comme constant.

Comme, dans cette recherche, on peut supposer i très-grand, et par suite les nombres m, n, r, s.... eux-mêmes très-grands, la quantité précédente est susceptible, dans cette hypothèse, d'une transformation très-utile pour la détermination de sa plus grande valeur cherchée. Cette transformation s'obtient à l'aide des formules de Stirling déjà employées dans l'exemple du paragraphe précédent. Par leur moyen on trouvera d'abord, sensiblement,

$$(7)\qquad \frac{1}{t^l}\,\frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-l+1)}{1.2.3\dots m.1.2.3\dots n.1.2.3\dots r\dots}\,(A t^a)^m (B t^b)^n (C t^c)^r \dots$$

$$= \frac{1}{t^l}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}u^u}{(u-l)^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \dots \pi^{\frac{\lambda}{2}} (u-l)^{\mu-l}} \left(\frac{A t^a}{m}\right)^m \left(\frac{B t^b}{n}\right)^n \left(\frac{C t^c}{r}\right)^r \dots$$

faisant ensuite $\frac{m}{i} = \mu$, $\frac{n}{i} = \nu$, etc. ... $\frac{u}{i} = \upsilon$, et observant que

l'on a $\frac{l}{i} = \frac{i+k}{i} = 1$, pour i très-grand, les équations (4) et (5) deviendront

$$\mu + \nu + \rho + \ldots = 1, \tag{8}$$

$$\nu = a\mu + b\nu + c\pi + \ldots, \tag{9}$$

et l'équation (7) se transformera en la suivante :

$$\frac{1}{l^l} \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-l+1)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots r\ldots} (\mathrm{A}t^a)^m (\mathrm{B}t^b)^n (\mathrm{C}t^c)^r \ldots$$
$$= \frac{v^{\frac{1}{2}}}{(v-1)^{\frac{1}{2}} i^{\frac{\lambda}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \ldots \pi^{\frac{\lambda}{2}}} \left[\frac{v^v t^{-1}}{(v-1)^{v-1}} \left(\frac{\mathrm{A}t^a}{\mu}\right)^\mu \left(\frac{\mathrm{B}t^b}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{\mathrm{C}t^c}{\rho}\right)^\rho \ldots \right]^i \tag{10}$$

Ainsi la question est ramenée à chercher la valeur la plus grande que puisse acquérir le second membre de l'équation (10) pour toutes les valeurs positives de μ, ν, $\rho\ldots$ qui vérifient l'équation (8), v étant supposé déterminé par l'équation (9).

Or, en faisant attention que i est censé très-grand, par un raisonnement analogue à celui employé dans l'exemple du § I, on se convaincra que les valeurs de μ, ν, $\rho\ldots$ et v, qui correspondent au maximum mentionné du second membre de l'équation (10), s'obtiennent en regardant les mêmes quantités μ, ν, $\rho\ldots$ et v comme constantes dans le coefficient

$$\frac{v^{\frac{1}{2}}}{(v-1)^{\frac{1}{2}} i^{\frac{\lambda}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \ldots \pi^{\frac{\lambda}{2}}},$$

et comme seulement variables dans la puissance

$$\left[\frac{v^v t^{-1}}{(v-1)^{v-1}} \left(\frac{\mathrm{A}t^a}{\mu}\right)^\mu \left(\frac{\mathrm{B}t^b}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{\mathrm{C}t^c}{\rho}\right)^\rho \ldots \right]^i.$$

De la sorte, en faisant

$$\mathrm{N} = \frac{v^v t^{-1}}{(v-1)^{v-1}} \left(\frac{\mathrm{A}t^a}{\mu}\right)^\mu \left(\frac{\mathrm{B}t^b}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{\mathrm{C}t^c}{\rho}\right)^\rho \ldots \tag{11}$$

tout se réduit à chercher la valeur la plus grande de N, considéré comme une fonction des variables μ, ν, $\rho\ldots$ et v, liées entre

elles par les équations (8) et (9), et en retenant que toutes ces variables, excepté v, n'admettent que des valeurs positives.

Tel est le problème que nous allons résoudre.

Pour cela, il est d'abord évident qu'il faudra chercher le maximum ou les maxima de N, s'il en a plusieurs, ce mot étant pris dans le sens qu'on lui attribue dans le calcul différentiel. Si N avait plusieurs maxima, on devrait évidemment prendre pour sa valeur la plus grande cherchée le maximum maximorum, savoir le plus grand de tous les maxima trouvés. Mais nous allons voir que N n'a qu'un seul maximum. En effet, d'après les principes connus du calcul différentiel, on a

$$(12)\quad \frac{dN}{N}=dv\log\frac{v}{v-1}+d\mu\left(\log\frac{At^a}{\mu}-1\right)+dv\left(\log\frac{Bt^b}{v}-1\right)+\text{etc...}=0,$$

et, en même temps,

$$(13)\quad d\mu+dv+d\rho+\ldots=0,\quad dv=ad\mu+bdv+cd\rho+\ldots$$

d'où il vient, comme on peut facilement s'en convaincre,

$$(14)\quad \left(\frac{v}{v-1}\right)^a\frac{At^a}{\mu}=\left(\frac{v}{v-1}\right)^b\frac{Bt^b}{v}=\left(\frac{v}{v-1}\right)^c\frac{Ct^c}{\rho}=\ldots$$

Désignant par K une indéterminée quelconque, on tirera de l'équation (14)

$$(15)\quad \mu=KAt^a\left(\frac{v}{v-1}\right)^a,\ v=KBt^b\left(\frac{v}{v-1}\right)^b,\ \rho=KCt^c\left(\frac{v}{v-1}\right)^c,\ \text{etc}\ldots$$

en sorte qu'il ne reste qu'à trouver les valeurs de K et v.

A cet effet, nous substituerons les valeurs précédentes de μ, v, $\rho\ldots$ dans les équations (8) et (9) : ce qui donne

$$(16)\quad K=\frac{1}{At^a\left(\frac{v}{v-1}\right)^a+Bt^b\left(\frac{v}{v-1}\right)^b+Ct^c\left(\frac{v}{v-1}\right)^c}+\ldots$$

et finalement

$$(17)\quad At^a(a-v)\left(\frac{v}{v-1}\right)^a+Bt^b(b-v)\left(\frac{v}{v-1}\right)^b+Ct^c(c-v)\left(\frac{v}{v-1}\right)^c+\ldots=0.$$

Telle est l'équation qu'en dernière analyse il faudra résoudre, et dont la discussion va nous faire connaître si N a effectivement des maxima, et s'il en a un seul. On remarquera d'abord que v devant satisfaire, non-seulement à l'équation (17), mais aussi à l'équation (9), eu égard aux hypothèses faites sur les exposants a, b, $c\ldots$, sa valeur devra toujours être de la nature que nous allons signaler. Si ces exposants sont positifs, v ne pourra être que positif, et compris entre les limites a et h, a étant l'exposant le plus petit, et h l'exposant le plus grand, ou bien entre les limites 1 et h, si l'exposant a est nul, les autres étant tous entiers. Car dans ce dernier cas la somme Σ, qui représente le second membre de l'équation (6), se réduit à la somme des termes seuls, qui correspondent à $u > l - 1$. Si les exposants a, b, $c\ldots$ sont négatifs, v ne pourra avoir qu'une valeur négative, laquelle sera, de plus, toujours comprise entre l'exposant négatif le plus petit, et l'exposant négatif le plus grand. Or l'équation (17) a toujours une racine v qui satisfait aux conditions que nous venons de mentionner. Car le premier membre de cette équation change évidemment de signe quand de la valeur $v = a$ on passe à la valeur $v = h$. On voit, en outre, que dans le cas où a se réduit à zéro, les autres exposants étant tous entiers, la même équation (17) se réduit à la suivante :

$$-\mathrm{A}\,v + \mathrm{B}\,l^b(b-v)\left(\frac{v}{v-1}\right)^b + \mathrm{C}\,l^c(c-v)\left(\frac{v}{v-1}\right)^c + \ldots = 0;$$

laquelle, à cause de ce que son premier membre change de signe lorsqu'on passe de $v = 1 + \omega$, à $v = h$, ω étant positif et très-petit, et h étant toujours l'exposant le plus grand, a une racine positive comprise entre les limites $v = 1$, $v = h$. J'ajoute que l'équation (17) n'a jamais qu'une seule racine comprise entre l'exposant le plus petit a, et l'exposant le plus grand h, ou bien entre les limites 1 et h, si l'exposant a est nul. Il suffira de démontrer cette proposition par rapport au cas des exposants positifs. Car une marche analogue s'applique aux cas des exposants négatifs.

Pour cela, écrivons l'équation (17) sous la forme suivante :

$$(18)\qquad \mathrm{A}\,t^a v\left(\frac{v}{v-1}\right)^a + \mathrm{B}\,t^b v\left(\frac{v}{v-1}\right)^b + \mathrm{C}\,t^c v\left(\frac{v}{v-1}\right)^c + \ldots$$
$$- a\,\mathrm{A}\,t^a\left(\frac{v}{v-1}\right)^a - b\,\mathrm{B}\,t^b\left(\frac{v}{v-1}\right)^b - \text{etc}\ldots = 0.$$

En observant que le nombre des termes affectés du signe + est égal à celui des termes affectés du signe —, soit X la somme des premiers, et Y la somme des seconds; l'équation précédente se réduira à

$$\mathrm{X} - \mathrm{Y} = 0.$$

Cela posé, soit α une racine positive de cette équation, je dis qu'elle n'en aura pas d'autres positives. Pour le prouver, supposons, pour fixer les idées, que α soit compris entre b et c, en sorte qu'on ait

$$a < b < \alpha < c < e \ldots$$

En comparant entre eux deux à deux les termes correspondants des deux sommes X et Y, on aura évidemment

$$(19)\quad \mathrm{A}\,t^a\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^a > \mathrm{A}\,t^a a\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^a, \mathrm{B}\,t^b\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^b > \mathrm{B}\,t^b b\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^b,$$

car $\alpha > b > a$; et l'on aura encore

$$(20)\quad \mathrm{C}\,t^c\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^c < \mathrm{C}\,t^c c\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^c, \mathrm{E}\,t^e\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^e < \mathrm{E}\,t^e e\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^e \ldots$$

car l'on a

$$\alpha < c < e \ldots$$

Or supposons, pour un moment, que l'équation (18) ait plusieurs racines positives. Alors nous pouvons concevoir que α soit la plus petite. Dans cette hypothèse, comme pour $v < \alpha$, le premier membre de l'équation (18) est négatif, pour des valeurs immédiatement supérieures à α, ce premier membre deviendra évidemment positif, et l'on peut ajouter qu'il restera toujours positif

pour toute valeur de v comprise depuis $v = \alpha$, jusqu'à v égal à l'infini. Ainsi pour $v > \alpha$, on aura toujours

$$X - Y > 0.$$

Ce qui prouve que l'équation (18) n'a qu'une seule racine positive, laquelle est, comme nous l'avons déjà dit, comprise entre les limites a et h. Cela démontre en même temps que la quantité N ne peut avoir, au plus, qu'un seul maximum.

Et pour faire voir que ce maximum existe effectivement, on n'aura qu'à reconnaître si la racine positive v de l'équation (18), dont nous venons de nous occuper, satisfait aux conditions du maximum prescrites par le calcul différentiel. Pour lever toute espèce de doute à cet égard, nous montrerons brièvement que ces conditions sont réellement remplies.

Commençons par supposer que les variables μ, ν, ρ... se réduisent aux deux seules μ et ν. Alors les équations (8) et (9) se réduiront elles-mêmes aux suivantes :

$$\mu + \nu = 1, \quad \nu = a\mu + b\nu.$$

Et eu égard à ces équations, la variable indépendante sera une seule. Supposons que ce soit μ, la question se réduira à faire voir que l'on aura

$$\frac{1}{N}\frac{d^2N}{d\mu^2} < 0, \tag{21}$$

ou bien, en faisant $p = \log N$,

$$\frac{d^2p}{d\mu^2} < 0. \tag{22}$$

Or on trouve, tout calcul fait,

$$\frac{d^2p}{d\mu^2} = -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} - \frac{(a-b)^2}{\nu(\nu-1)},$$

d'où l'on voit tout de suite que la condition (22) est remplie, car

μ, ν et v sont des quantités positives, la dernière, v, étant de plus supérieure à l'unité.

Supposons, en second lieu, que les variables μ, ν, ρ... se réduisent aux trois μ, ν, ρ; alors les équations (8) et (9) deviendront

$$\mu + \nu + \rho = 1, \quad v = a\mu + b\nu + c\rho.$$

Par suite, les variables indépendantes se réduisent actuellement à deux. Supposons que ce soient μ et ν. Les conditions du maximum sont, comme on sait,

$$(23) \qquad \frac{d^2 p}{d\mu^2} < 0, \ \frac{d^2 p}{d\nu^2} < 0, \text{ et } \frac{d^2 p}{d\mu^2} \times \frac{d^2 p}{d\nu^2} - \left(\frac{d^2 p}{d\mu\, d\nu}\right)^2 > 0.$$

Or, l'on trouve

$$\frac{d^2 p}{d\mu^2} = -\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\rho} + \frac{(a-c)^2}{v(v-1)}\right],$$

$$\frac{d^2 p}{d\nu^2} = -\left[\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\rho} + \frac{(b-c)^2}{v(v-1)}\right],$$

$$\frac{d^2 p}{d\mu\, d\nu} = -\left[\frac{1}{\rho} + \frac{(b-c)(a-c)}{v(v-1)}\right].$$

Par conséquent, toute réduction faite, et remarquant de plus que l'on a

$$(c-a)^2 + (c-b)^2 + 2(c-a)(c-b) = (b-a)^2,$$

on obtiendra

$$\frac{d^2 p}{d\mu^2} \times \frac{d^2 p}{d\nu^2} - \left(\frac{d^2 p}{d\mu\, d\nu}\right)^2 = \frac{1}{\rho}\frac{(b-a)^2}{v(v-1)} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{(c-b)^2}{v(v-1)}\right) + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{(c-a)^2}{v(v-1)}\right) + \frac{1}{\mu\nu}.$$

A l'inspection de ces valeurs, et en faisant toujours attention à ce que les valeurs de μ, ν, ρ et v sont toutes positives, celle de

v étant de plus supérieure à l'unité, on reconnaît que les conditions du maximum (23) sont remplies.

Je ne pousserai pas plus loin ce calcul, car à l'aide des résultats précédents, on sent que les conditions du maximum de N seront toujours remplies, quel que soit le nombre des variables $\mu, \nu, \rho \ldots$

Maintenant, si l'on se rappelle la quantité qui, dans le lemme (A), se trouve désignée par T_i, on voit que, dans le cas de la série (1) qui forme l'objet de ce paragraphe, elle aura pour valeur

$$T_i = \frac{v^{\frac{1}{2}} R^i}{(v-1)^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \pi^i},$$

R étant le maximum de N, dont nous venons de nous occuper, et $\mu, \rho \ldots v$ étant censées représenter les valeurs correspondantes à ce même maximum.

On aura, par suite,

$$\text{limite } \frac{T_{i+1}}{T_i} = R;$$

d'où résulte le théorème que nous allons énoncer.

Théorème (B). Soit la série ayant pour terme général

$$(1) \qquad u_i = \frac{1}{1.2.3 \ldots i} \frac{d^{i+k} [\pi(t)]^i}{dt^{i+k}}.$$

Supposons que $\pi(t)$ soit une fonction réelle du paramètre réel t, développable en une somme de termes affectés tous de même signe, et tels que l'on ait

$$\pi(t) = A t^a + B t^b + C t^c + \ldots + H t^h,$$

les exposants $a, b, c,$ remplissant les conditions précédemment indiquées (p. 434).

Posons

$$(11) \qquad N = \frac{v^v t^{v-1}}{(v-1)^{v-1}} \left(\frac{A t^a}{\mu}\right)^\mu \left(\frac{B t^b}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{C t^c}{\rho}\right)^\rho \ldots$$

et soit R le maximum de N, N étant considéré comme une fonction des variables positives μ, ν, $\rho\ldots$ et de la variable v, liées entre elles par les équations

$$\mu + \nu + \rho \ldots = 1. \tag{8}$$

$$v = a\mu + b\nu + c\rho + \ldots \tag{9}$$

les variables μ, ν, $\rho\ldots$ étant en nombre égal à celui des termes du polynôme $\pi(t)$.

La série (1) aura pour son module R, et sera, par suite, convergente ou divergente, selon qu'on aura $R < $ ou > 1.

Corollaire. — Si l'on suppose $k = -1$, la série en question se réduit à la série de Lagrange exprimant une racine de l'équation

$$t - z + \pi(z) = 0.$$

Nous avons, ainsi, par le théorème précédent, une règle pour déterminer le module de la série de Lagrange tirée de l'équation précédente, pour le cas où $\pi(t)$ est une fonction réelle remplissant les conditions signalées dans le cours de ce paragraphe (p. 434).

§ III.

Avant d'aller plus loin, je placerai ici la remarque suivante. Évidemment le lemme établi dans le § I ne saurait s'appliquer à une série dont le terme général u_i fût développable en une somme de termes indistinctement positifs et négatifs. Car alors la somme algébrique des termes composant u_i peut converger vers zéro à mesure que i croît indéfiniment, sans qu'il soit nécessaire, pour cela, que chacun des termes de cette somme converge lui-même vers zéro. Ainsi, par exemple, soit la série dont le terme général est

$$u_i = (A t^a + B t^b + C t^c + \ldots)^i. \tag{1}$$

Pour que cette série soit convergente, il suffit qu'on ait

$$\text{(2)} \qquad \text{val. num. } (\mathrm{A}\,t^a + \mathrm{B}\,t^b + \mathrm{C}\,t^c \cdots) < 1.$$

De plus, si les termes $\mathrm{A}\,t^a$, $\mathrm{B}\,t^b \ldots$ sont positifs et négatifs, la condition précédente n'entraîne certes pas celle-ci, que chacun des termes irréductibles dont la somme compose la puissance i du polynôme $\mathrm{A}\,t^a + \mathrm{B}\,t^b + \ldots$ converge vers zéro, pour i infiniment grand.

Ajoutons, ce qui d'ailleurs est bien facile à concevoir, que la condition que je viens de mentionner, exprimant que chaque terme de la puissance

$$(\mathrm{A}\,t^a + \mathrm{B}\,t^b + \mathrm{C}\,t^c + \ldots)^i$$

converge vers zéro pour i infiniment grand, serait la condition de convergence, non pas de la série simple (1), mais de la série multiple, dont le terme général étant désigné par $\mathrm{S}_{i,\,m,\,n,\,r,\,s\ldots}$ aurait pour valeur

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{S}_{i,\,m,\,n,\,r,\,s\ldots} = \frac{1.2.3\ldots i}{1.2.3..m.\,1.2.3..n.\,1.2.3..r} (\mathrm{A}\,t^a)^m\,(\mathrm{B}\,t^b)^n\,(\mathrm{C}\,t^c)^r \ldots$$

i, m, n, r, $s\ldots$ étant les indices de ce terme, supposés capables de toutes les valeurs entières et positives propres à vérifier l'équation

$$m + n + r + s \ldots = i.$$

Mais cette dernière série, quoique ayant la même somme que la première, en est toutefois bien différente, et l'on commettrait une erreur très-grave de les confondre, et de croire qu'elles soient toujours toutes deux à la fois convergentes ou divergentes.

Les réflexions précédentes s'appliquent aussi à la série de Lagrange, savoir à celle qui a pour son terme général

$$\text{(4)} \qquad u_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} \frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{d\,t^{i-1}}.$$

Supposons

$$\pi(t) = A\,t^a + B\,t^b + C\,t^c + \ldots + H\,t^h,$$

les coefficients A, B, C... et les exposants a, b, c... étant quelconques. On aura, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,

$$(5)\quad \frac{1}{1.2.3..i}\frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}} = \Sigma\,\frac{1}{t^{i-1}}\,\frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-i-2)}{1.2.3..m.1.2.3..n\ldots}(A\,t^a)^m(B\,t^b)^n\ldots$$

le signe Σ se rapportant à m, n, r, s... censés ici susceptibles de toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$m + n + r + s\ldots = i,$$

dans laquelle i est regardé comme constant, et u étant d'ailleurs toujours donné par l'équation

$$u = am + bn + cr + \ldots$$

Or nous remarquerons que le lemme (A) cesse d'être applicable à la série précédente, dès que la fonction $\pi(t)$ ne remplira plus les conditions signalées au paragraphe précédent comme nécessaires pour que la somme Σ composant le second membre de l'équation (5) ne renferme que des termes positifs. Autrement dit, la condition qui exprime que chaque terme compris dans la somme Σ mentionnée tout à l'heure se réduit à zéro, pour i infiniment grand, généralement parlant, ne coïncidera pas avec la condition de convergence de la série de Lagrange, ayant pour terme général le second membre de l'équation (4). Mais elle sera, au contraire, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série multiple, dont le terme général $S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s\ldots}$ serait

$$S_{i,\,m,\,n,\,r,\,s\ldots} = \frac{1}{t^{i-1}}\,\frac{u(u-1)(u-2)..(u-i+1)}{1.2.3..m.1.2.3..n.1.2..r}(A\,t^a)^m(B\,t^b)^n\ldots$$

les indices i, m, n, r, $s\ldots$ et la quantité u conservant toujours les mêmes valeurs que ci-dessus.

D'ailleurs, il est bien entendu que cette dernière série ne doit jamais se confondre avec la série de Lagrange proprement dite.

Ce qui précède va nous être utile pour apprécier une règle que Lagrange a donnée dès l'an 1768, pour déterminer, en général, la convergence de sa série. Cette règle peut s'énoncer ainsi qu'il suit.

Règle de Lagrange. — Soit

$$u_i = \frac{1}{1.2.3..i}\,\frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}} \tag{4}$$

le terme général de la série de Lagrange, $\pi(t)$ étant une fonction réelle de t de la forme

$$\pi(t) = A\,t^a + B\,t^b + C\,t^c + \ldots$$

où (ce qui est essentiel à remarquer) A, B, C... et a, b, $c\ldots$ sont des coefficients et des exposants quelconques.

Désignons par A_1, B_1, $C_1\ldots$ les valeurs numériques des coefficients A, B, C... et posons

$$N = v\left(\frac{vt}{v-1}\right)^{v-1}\left(\frac{A_1}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{B_1}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{C_1}{\rho}\right)^{\rho}\ldots$$

Cherchons enfin le maximum de N considéré comme une fonction des variables positives μ, ν, $\rho\ldots$ et de la variable quelconque v, liées entre elles par les équations

$$\mu + \nu + \rho\ldots = 1,\quad v = a\mu + b\nu + c\rho + \ldots$$

les variables μ, ν, $\rho\ldots$ étant en nombre égal à celui des termes qui composent le polynôme $\pi(t)$.

Soit R ce maximum. La série sera convergente ou divergente, selon qu'on aura $R < $ ou > 1.

Ajoutons que les valeurs de μ, ν, $\rho\ldots$ correspondantes au

maximum de N dépendent, en dernière analyse, de la valeur de v, qui est elle-même une racine de l'équation

$$A_1(a-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^a + B_1(b-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^b + C_1(c-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^c + \ldots = 0,$$

à l'égard de laquelle il est essentiel de retenir que la règle de Lagrange prescrit de prendre le paramètre t avec un signe tel, que la quantité $\frac{tv}{v-1}$ résulte positive, et cela quel que soit le signe de ce même paramètre dans le terme général de la série.

On voit sans peine que cette règle rentre dans celle que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent, si toutefois les coefficients A, B, C... le paramètre t et les exposants $a, b, c\ldots$ remplissent les deux conditions signalées dans l'endroit cité (p. 434). Dans ce cas, la règle de Lagrange est donc exacte. Mais hors de là, on se convaincra aisément qu'elle est généralement inexacte, et qu'elle aurait pour effet d'offrir pour la série un module supérieur au vrai module. En effet, elle exprime, en dernière analyse, la condition nécessaire pour que chaque terme de la somme Σ composant le second membre de l'équation (5), se réduise à zéro pour i infiniment grand. Il résulte de là, eu égard aux considérations exposées au commencement de ce paragraphe, que cette règle, loin de se rapporter à la série simple de Lagrange, détermine, au contraire, toujours généralement parlant, la condition de convergence de la série multiple qui a pour terme général la quantité soumise au signe Σ dans l'équation (5), savoir:

$$\frac{1}{t^{i-1}} \frac{u(u-1)\ldots(u-i+2)}{1.2.3.\ m.1.2.3..n\ldots} (A\,t^a)^m (B\,t^b)^n (C t^c)^r \ldots$$

u étant toujours déterminé par l'équation

$$u = am + bn + cr + \ldots$$

et $i, m, n, r, s\ldots$ étant les indices de ce même terme supposés

susceptibles de toutes les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$m + n + r + s \ldots = i.$$

Mais, répétons-le encore une fois, on commettrait une erreur très-grave si l'on confondait cette dernière série multiple avec la série simple, dite communément la série de Lagrange.

Je terminerai ce paragraphe en plaçant ici une réflexion propre à nous montrer la source de la méprise commise par Lagrange au sujet de sa règle, que nous venons de discuter. Lorsqu'une série étant donnée, on se propose d'en déterminer le module, sans doute il est permis de transformer le terme général de la série d'une manière quelconque, dans le but de faire ressortir la valeur du module cherché de la série. J'ajouterai que c'est en ces transformations habilement imaginées, que consistent les artifices analytiques propres à nous faire surmonter les difficultés de la question. Mais dans tous ces calculs une chose est indispensable; c'est que le terme général de la série, considérée sous sa forme nouvelle, conserve toujours la même valeur que lorsque la série était sous sa forme primitive. Lorsque cette condition n'est pas remplie, on passe, sans s'en apercevoir, de la série primitive à une autre qui, tout en ayant, généralement, la même somme que la première, jouira cependant d'un module qui pourra différer de celui de la première série.

Appliquons cette réflexion à la série même de Lagrange. Assurément on peut, comme l'a fait Lagrange, transformer le terme général de cette série dans la somme Σ, représentant le second membre de l'équation (5). Une pareille transformation est même utile, comme nous l'avons vu au § II, pour déterminer, en des cas donnés, le module de la série. Mais tout résultat obtenu par cette transformation à l'égard du module de la même série ne peut être regardé comme généralement exact, qu'autant que le terme général de la série demeure toujours rigoureusement égal à la somme de tous les termes compris dans le symbole Σ. Or, le dé-

faut de l'analyse qui a conduit Lagrange à sa règle citée consiste précisément en ce qu'elle revient à prendre pour terme général de la série, non la somme totale des termes compris dans le signe Σ mentionné tout à l'heure, mais seulement la quantité soumise à ce même signe. On a ainsi altéré le véritable terme général de la série de Lagrange, et dès lors il n'est pas étonnant que la condition de convergence trouvée par ce grand géomètre ne coïncide avec le véritable module de sa série, que dans les cas que nous avons signalés au § II, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer plus haut.

§ IV.

Reprenons la règle énoncée dans le théorème (B) qui termine le § II. Elle est susceptible d'être transformée en une autre, qu'on peut énoncer d'une manière très-simple. Mais avant de faire connaître cette transformation, je m'arrêterai ici à examiner ce que la même règle devient, lorsque le paramètre t se réduit à zéro.

D'abord, il est évident que t se réduisant à zéro, la série serait divergente, si les exposants $a, b, c\ldots$ étaient négatifs. D'ailleurs dans ce cas la quantité N, considérée au § II cité, serait toujours infinie, pour toute valeur de $\mu, \nu, \rho\ldots$ et v. Écartons donc l'hypothèse des exposants négatifs, et supposons, par suite, qu'ils soient tous positifs, remplissant les conditions établies au même § II. Alors il faut considérer distinctement les trois cas suivants :

1° Le premier cas est celui où les valeurs des exposants sont toutes supérieures à l'unité. Alors, en admettant, pour fixer les idées, que a soit l'exposant le plus petit, il est évident que, quelles que soient les valeurs de $\mu, \nu, \rho\ldots$ tirées de l'équation

$$\mu + \nu + \rho\ldots = 1, \tag{1}$$

la valeur de v donnée par l'équation

$$v = a\mu + b\nu + c\rho + \ldots \tag{2}$$

sera toujours égale ou supérieure à l'exposant plus petit a.

D'un autre côté, la valeur de N, donnée par l'équation (11) du § II, peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad N = \frac{v^v\, t^{v-1}\, t^v}{(v-1)^{v-1}} \left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu} \left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu} \left(\frac{C}{\rho}\right)^{\rho} \ldots$$

De cette équation, et eu égard à ce qui précède, il résulte que la valeur de N sera toujours égale à zéro pour $t = 0$, en sorte que la série, actuellement, ne pourra être que convergente.

2° Le second cas est celui où l'exposant le plus petit a est égal à l'unité. Alors il est clair que la plus petite valeur de v serait l'unité même. Ainsi la valeur de N serait toujours égale à zéro, excepté pour $v = 1$. On voit d'ailleurs sans peine que la valeur $v = 1$, entraîne pour μ, ν, ρ... les valeurs suivantes :

$$\mu = 1,\ \nu = 0,\ \rho = 0,\ \text{etc}\ldots$$

On aura ainsi,

$$\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu} = A,\ \left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu} = 1,\ \left(\frac{C}{\rho}\right)^{\rho} = 1,\ \text{etc}\ldots$$

Par suite, la valeur de N déduite de l'équation (3) se réduira à

$$N = A,$$

en sorte que la série sera convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$A < \text{ou} > 1.$$

3° Le troisième cas a lieu lorsque $a = 0$, les autres exposants étant tous entiers. Il faut alors se rappeler ce qu'on a remarqué à la page 438 du § II, savoir que dans ce cas la somme

$$\frac{1}{t^{1-}} \Sigma \frac{u\,(u-1)\ldots(u-1+2)}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n\ldots} (A\,t^a)^m\,(B\,t^b)^n\ldots$$

représentant le terme général de la série de Lagrange, se réduit à une somme de termes correspondants à des valeurs de u toutes

supérieures à $i - 2$. D'où il résulte qu'en s'agissant d'évaluer cette somme par le moyen de la transformation indiquée par l'équation (10) du § II, il faut se borner aux seules valeurs de v égales ou supérieures à l'unité. Mais pour des valeurs de v supérieures à l'unité, celle de N tirée de l'équation (3) devient évidemment égale à zéro. Tout se réduit donc à chercher le maximum de N dans l'hypothèse de $v = 1$. Mettant cette valeur de v dans l'équation (3), et faisant $a = 0$, on obtient

$$N = \left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu} \left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu} \dots \tag{4}$$

l'équation (2) se réduisant à la suivante :

$$1 = b\nu + c\rho + \dots \tag{5}$$

et l'équation (1) restant la même.

Il s'agira de la sorte de chercher le maximum de la dernière valeur de N, N étant considéré comme une fonction de μ, ν, ρ... liées entre elles par les équations (1) et (5). Mais les valeurs de ces variables correspondantes au maximum mentionné, s'obtiennent directement en écrivant les équations (15), (16), (17) du § II sous la forme suivante :

$$\mu = K A \left(\frac{vt}{v-1}\right)^{a}, \quad \nu = K B \left(\frac{vt}{v-1}\right)^{b}, \text{ etc...} \tag{6}$$

$$K = \frac{1}{A\left(\frac{vt}{v-1}\right)^{a} + B\left(\frac{vt}{v-1}\right)^{b} + C\left(\frac{vt}{v-1}\right)^{c} + \dots} \tag{7}$$

$$A(a-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^{a} + B(b-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^{b} + C(c-v)\left(\frac{tv}{v-1}\right)^{c} \dots = 0, \tag{8}$$

et en faisant ensuite dans ces équations $a = 0$, $t = 0$, $v = 1$, et égalant à z la valeur de $\frac{vt}{v-1}$, qui prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on aura ainsi :

$$(9) \qquad \mu = K A,\ \nu = K B z^b,\ \rho = K C z^c, \text{ etc. . .}$$

$$(10) \qquad K = \frac{1}{A + B z^b + C z^c + \ldots}$$

et

$$(11) \qquad -A + B(b-1) z^b + C(c-1) z^c + \ldots = 0.$$

L'équation (11) a nécessairement une racine positive et n'en a qu'une seule, car son premier membre ne présente qu'un seul changement de signe. D'ailleurs cette racine est précisément celle qui convient à notre objet, puisqu'elle rendra positives les valeurs de μ, ν, ρ... tirées des équations (9). Il est bien entendu qu'actuellement les coefficients A, B, C... sont censés tous positifs, ou bien tous de même signe; car présentement le terme général de la série se réduit, comme on le voit sans peine, à la somme suivante :

$$(12) \qquad \frac{1}{1.2.3..i} \frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}} = \Sigma \frac{(i-1)(i-2)..3.2.1}{1.2.3..m.1.2.3..n...} A^m . B^n . C^r . . .$$

De plus, cette somme ne saurait se composer de termes affectés tous du même signe, qu'à la condition que A, B, C... soient eux-mêmes tous de même signe.

Je passe maintenant à faire connaître la transformation annoncée au commencement de ce paragraphe.

Faisons dans l'équation (17) du § II,

$$v = \frac{t+x}{x},$$

d'où il vient

$$\frac{vt}{v-1} = t + x, \text{ et } x = \frac{t}{v-1},$$

$$a - v = \frac{x(a-1)-t}{x},\ b - v = \frac{x(b-1)-t}{x}, \text{ etc. . .}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (17) mentionnée tout à l'heure, on aura, en divisant par $\frac{t+x}{x}$,

$$(13)\quad A[x(a-1)-t](t+x)^{a-1}+B[x(b-1)-t](t+x)^{b-1}+\ldots=0.$$

Comme, d'ailleurs (page 438), la racine de l'équation (17) du § II, convenable à notre objet, est celle comprise entre les limites $v=a$ et $v=h$, si a est différent de zéro, ou bien entre les limites $v=1$ et $v=h$, si a se réduit à zéro, et que x est donné en v par la relation ci-dessus $x=\frac{t}{v-1}$, il s'ensuit que la racine x de l'équation (13), qui convient à la question, est celle qui se trouve comprise entre les limites

$$x=\frac{t}{h-1} \text{ et } x=\frac{t}{a-1},$$

si $a >$ ou $<$ 0, ou bien

$$x=\frac{t}{h-1} \text{ et } x=\frac{t}{0},$$

si a se réduit à zéro.

Cherchons maintenant à exprimer le maximum R de N en fonction de cette dernière racine x. En substituant, 1° dans les équations (16) et (15) du § II, pour $\frac{vt}{v-1}$ sa valeur précédente $t+x$; 2° dans le second membre de l'équation (11) du même paragraphe, au lieu de v, μ, ν, $\rho\ldots$ leurs valeurs en fonction de x, on trouvera pour R l'expression suivante :

$$(14)\qquad R=\frac{A(t+x)^a+B(t+x)^b+C(t+x)^c+\ldots}{x}$$

On voit d'ailleurs que l'équation fondamentale

$$\pi(t)=At^a+Bt^b+Ct^c+\ldots$$

donne

$$(15)\qquad \pi(t+x)=A(t+x)^a+B(t+x)^b+C(t+x)^c+\ldots$$

d'où il vient, en vertu de l'équation (14),

$$R = \frac{\pi(t+x)}{x}. \tag{16}$$

On reconnaît de plus que l'équation (13) rentre dans la suivante:

$$x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi(t+x)}{x}\right) = x\,\pi'(t+x) - \pi(t+x) = 0. \tag{17}$$

Cela retenu, observons encore, 1° que d'après la relation $\frac{x}{t} = \frac{1}{v-1}$, le rapport $\frac{x}{t}$ est positif, si les exposants $a, b, c\ldots$ sont eux-mêmes positifs, car dans ce cas v est toujours positif et supérieur à l'unité; 2° que le même rapport $\frac{x}{t}$ est négatif, conservant d'ailleurs une valeur numérique inférieure à l'unité, si les exposants $a, b, c\ldots$ sont eux-mêmes négatifs; car alors v est lui-même négatif. D'après ces remarques, en écrivant $\pi(t+x)$ et sa seconde dérivée par rapport à x sous la forme

$$\pi(t+x) = A t^a \left(1+\frac{x}{t}\right)^a + B t^b \left(1+\frac{x}{t}\right)^b + C t^c \left(1+\frac{x}{t}\right)^c + \ldots$$

$$\pi''(t+x) = A t^{a-2} a(a-1)\left(1+\frac{x}{t}\right)^{a-2} + B t^{b-2} b(b-1)\left(1+\frac{x}{t}\right)^{b-2} + \ldots$$

il en résulte visiblement l'inégalité suivante, eu égard aux conditions assignées au § II, par rapport aux termes $A t^a$, $B t^b\ldots$ et aux exposants $a, b, c\ldots$

$$\frac{\pi''(t+x)}{\pi(t+x)} > 0. \tag{18}$$

Mais, d'un autre côté, si l'on cherche pour un moment le minimum de $\frac{\pi(t+x)}{x}$ par rapport à x, d'après les principes du calcul différentiel, la valeur de x correspondante à ce minimum correspondra précisément à celle des racines de l'équation (17) que nous avons signalée précédemment. Il résulte de là que la règle donnée à la fin du § II rentre dans la suivante, digne de remarque par sa simplicité.

Règle (C) ou transformée de la règle énoncée dans le théorème (B). — Soit la série de Lagrange ayant pour terme général

$$\frac{1}{1\ 2.3..i}\ \frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}},$$

$\pi(t)$ étant un polynôme de la forme $At^a + Bt^b + Ct^c \ldots + Ht^h$, qui remplit les conditions établies dans le § II (page 434).

Soit R la valeur numérique du maximum de la fonction

$$\frac{\pi(t+x)}{x},$$

correspondant à une valeur de x comprise entre les limites

$$x = \frac{t}{h-1}, \text{ et } x = \frac{t}{a-1},$$

si $a <$ ou $>$ o, ou bien

$$x = \frac{t}{b-1}, \text{ et } x = \frac{t}{0},$$

si $a =$ o.

La série en question sera convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$R < \text{ou} > 1.$$

Maintenant, il est intéressant de rapprocher la règle précédente de celle que l'illustre Cauchy a donnée pour la convergence de la série de Lagrange, dans son mémoire intitulé : *Mémoire sur divers points d'analyse* (tome VIII des Mémoires de l'Académie de Paris). Voici cette règle :

Règle de M. Cauchy. — Soit $\pi(x)$ une fonction quelconque de x, et posons

$$(19) \qquad N = \frac{\pi(t+x)}{x}.$$

En faisant ensuite $x = re^{s\sqrt{-1}}$, établissons l'équation

$$\frac{dN}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{-1}}{x}\left[x\,\pi'(t+x) - \pi(t+x)\right] = 0,$$

ou bien, plus simplement,

$$x\,\pi'(t+x) - \pi(t+x) = 0,$$

qui est la même, comme on voit, que l'équation obtenue plus haut (17).

Parmi les racines réelles ou imaginaires de cette équation, résolue par rapport à x, considérons celles qui rendent négative la partie réelle de l'expression

$$(20) \qquad -x^2\frac{\pi''(t+x)}{\pi(t+x)}.$$

Soit α celle de ces racines qui, substituée dans la valeur de N donnée par l'équation (19), lui fait acquérir le module le plus grand.

La série de Lagrange, dont le terme général est

$$(21) \qquad \frac{1}{1.2.3..i}\frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}},$$

sera convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$\operatorname{mod}\frac{\pi(t+\alpha)}{\alpha} < \text{ou} > 1.$$

M. Cauchy appelle modules maxima tous les modules de N correspondants à celles des racines de l'équation (17) qui rendent négative la partie réelle de l'expression (20). D'après cette dénomination, le module de $\frac{\pi(t+\alpha)}{\alpha}$ devra s'appeler le module maximum maximorum. Ainsi la règle de M. Cauchy peut encore s'énoncer de cette autre manière.

La série de Lagrange ayant pour terme général l'expression (21), où la fonction $\pi(t)$ est supposée avoir une valeur quelconque,

est convergente ou divergente, selon que le module maximum maximorum de $\frac{\pi(t+x)}{x}$ est inférieur ou supérieur à l'unité.

Cette règle, comme on le voit, est générale, ou, autrement dit, elle est vraie, quelle que soit la fonction $\pi(t)$. A ce titre, elle doit être regardée comme un résultat analytique de la plus haute importance par rapport à la série de Lagrange. Mais si nous nous bornons aux cas où $\pi(t)$ est de nature à remplir les conditions indiquées au § II, conditions nécessaires pour l'application de la règle (C), que nous avons exposée plus haut; alors celle-ci, étant comparée à celle de M. Cauchy rapportée tout à l'heure, offre une simplification de cette dernière, comme nous allons le faire voir.

En jetant les yeux sur le tableau des opérations sur lesquelles reposent les deux règles, on reconnaît que ces opérations sont les mêmes, avec cette différence que, d'après la règle de M. Cauchy, il faut, à la rigueur, considérer toutes les racines de l'équation (17), qui rendent négative la partie réelle de l'expression (20), et choisir celle d'entre elles qui donne au module de $\frac{\pi(t+x)}{x}$ la valeur la plus grande. D'après notre règle, au contraire, la racine de l'équation (17), convenable à la question, se reconnaît à un caractère bien autrement plus facile et commode, car elle est précisément l'unique racine réelle de la même équation (17), qui se trouve comprise entre les limites

$$x = \frac{t}{h-1}, \text{ et } x = \frac{t}{a-1},$$

si $a >$ ou < 0, ou bien

$$x = \frac{t}{h-1}, \text{ et } x = \frac{t}{0},$$

si a se réduit à zéro.

D'ailleurs, en se rappelant que cette racine jouit de la propriété de rendre positive la valeur de l'expression (18), on voit qu'elle rendra, par suite, négative la valeur de l'expression (20). D'après

cela, en réfléchissant que les deux règles, étant toutes deux exactes, doivent s'accorder à donner le même module pour la série, nous pouvons conclure que la racine réelle de l'équation (17) dont nous parlons est précisément celle qui donne ce que nous avons appelé, d'après M. Cauchy, le module maximum maximorum de $\frac{\pi(t+x)}{x}$.

Partant, je ne sais si je me trompe, mais la règle (C), lorsqu'elle a lieu, me semble pouvoir être regardée comme une simplification de celle de M. Cauchy, en ce sens qu'elle réduit le nombre des opérations prescrites par cette dernière, en nous faisant connaître d'une manière très-facile la racine convenable de l'équation (17), sans qu'il faille pour cela chercher d'abord (comme l'exigerait la règle de M. Cauchy), toutes les racines qui rendent négative la partie réelle de l'expression (20), puis comparer entre elles toutes les valeurs qu'acquerrait le module de $\frac{\pi(t+x)}{x}$ en vertu des mêmes racines, afin d'en choisir la plus grande.

Je terminerai ce paragraphe en signalant deux cas où l'on reconnaît tout de suite la divergence de la série de Lagrange.

Premier cas. — Soit à l'ordinaire

$$(21) \qquad \frac{1}{1.2.3..i}\,\frac{d^{i-1}[\pi(t)]^i}{dt^{i-1}}$$

le terme général de la série, et supposons que $\pi(t)$ soit un polynôme en t, qui remplit les conditions indiquées au § II (p. 434).

Je dis que la série sera divergente si l'on a

$$\text{val. numérique } \pi'(t) > 1.$$

En effet, le module R de la série étant, d'après la règle (C),

$$R = \text{val. num. } \frac{\pi(t+x)}{x},$$

où on doit entendre par x une certaine racine réelle de l'équation (17), que nous avons déjà signalée en son lieu, la valeur de

ce même module R, eu égard à la composition du premier membre de la même équation (17), pourra se réduire à

$$\mathrm{R} = \text{val. num. } \pi'(t+x).$$

Mais l'on a

$$\pi'(t+x) = \mathrm{A}\,a\,t^{a-1}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{a-1} + \mathrm{B}\,b\,t^{b-1}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{b-1} + \ldots$$

D'ailleurs, on se rappellera (page 454) que x étant la racine de l'équation (17), qui se rapporte au module R, le rapport $\frac{x}{t}$ est toujours ou positif, sa valeur étant quelconque, ou négatif, en conservant une valeur numérique moindre que l'unité. Il résulte de là, en retenant de plus que $a, b, c \ldots$ étant positifs, ils ne peuvent jamais être inférieurs à l'unité, que les puissances

$$\left(1+\frac{x}{t}\right)^{a-1}, \quad \left(1+\frac{x}{t}\right)^{b-1}, \text{ etc. . .}$$

conservent toujours des valeurs supérieures à l'unité. On aura ainsi

$$\text{val. num. } \pi'(t+x) > \text{val. num. } (\mathrm{A}\,a\,t^{a-1} + \mathrm{B}\,b\,t^{b-1} + \mathrm{C}\,c\,t^{c-1} + \ldots)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\text{val. num. } \pi'(t+x) > \text{val. num. } \pi'(t);$$

ce qui prouve le théorème énoncé.

Second cas. — Le cas précédent n'est pas le seul où l'inégalité

$$\pi'(t) > 1$$

est un signe certain de la divergence de la série de Lagrange.

En voici un second. Soit $\pi(t)$ une fonction réelle et continue entre deux limites quelconques $t = l$ et $t = l'$. Supposons de plus que l'équation

$$\pi(t+x) = 0, \tag{22}$$

résolue par rapport à x, n'ait que des racines réelles qui soient,

en outre, ou toutes positives, ou toutes négatives, étant d'ailleurs toutes renfermées entre les limites l et l', entre lesquelles $\pi(t)$ est, par hypothèse, continu.

La série sera divergente quand on aura

$$\pi'(l) > 1.$$

Pour démontrer cette proposition, il convient d'établir auparavant le lemme suivant.

Les hypothèses précédentes étant conservées, je dis que l'équation (17) aura toutes ses racines réelles, parmi lesquelles il n'y en aura qu'une seule négative ou positive, selon que celles de l'équation (22) seront, par hypothèse, ou toutes positives ou toutes négatives; et c'est précisément la racine négative ou positive que nous venons de mentionner, qui correspond au module de la série. En effet, en construisant la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{\pi(t+x)}{x},$$

et où x et y sont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la courbe, on voit sans peine que la branche correspondante aux abscisses positives, ou bien négatives, selon que les racines de l'équation (22) seront supposées elles-mêmes positives ou négatives, doit renfermer autant de points ayant des coordonnées maxima, qu'il y aura d'unités dans $m - 1$, m étant le degré de la fonction $\pi(x)$. D'ailleurs, la courbe doit encore renfermer une autre branche située du côté des abscisses négatives ou positives, selon que les racines de l'équation (22) sont positives ou négatives, laquelle branche s'étendra à l'infini, et renfermera nécessairement un point dont l'ordonnée sera un minimum. Il suit de là que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x\pi'(t+x) - \pi(t+x) = 0,$$

du même degré que l'équation (22), et la même que l'équation

(17), aura nécessairement $m-1$ racines positives et une racine négative, ou bien $m-1$ racines négatives et une racine positive, selon que celles de l'équation (22) seront ou toutes positives, ou toutes négatives. D'autre part, on sait, d'après la théorie des maxima et des minima, que la racine négative ou positive de l'équation précédente est la seule de toutes ses racines qui rendra positive la quantité

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi''(t+x)}{\pi(t+x)}.$$

Elle sera donc aussi la seule qui rendra négative l'expression (20), et l'on en conclura, d'après la règle de M. Cauchy, qu'elle sera la racine correspondante du module cherché de la série.

Cela posé, venons à la proposition que nous avons en vue de démontrer.

En développant $\pi(t+x)$ selon les puissances de x, on a

$$\pi(t+x) = \pi(t) + \pi'(t)\,x + \pi''(t)\frac{x^2}{1.2} + \text{etc}\ldots$$

en sorte que, dans ce développement, les coefficients des diverses puissances de x, pris dans l'ordre où ils se succèdent, seront ou tous de même signe, ou alternativement positifs et négatifs, selon que les racines de l'équation (22) seront, par hypothèse, ou négatives ou positives. De là, eu égard au lemme précédent, il résulte que le développement de $\pi'(t+x)$, savoir:

$$\pi'(t+x) = \pi'(t) + \pi''(t)\,x + \pi'''(t)\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

pour la valeur de x correspondante au module R de la série, se composera nécessairement de termes tous positifs.

On aura donc

$$\mathrm{R} = \pi'(t+x) > 1,$$

et, par suite, la série sera divergente si $\pi'(t) > 1$.

§ V.

Discussion du théorème qu'Euler a donné dans son Mémoire intitulé : Observationes circa radices æquationum. (*Voir les* Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, t. XV.)

Soit l'équation algébrique du degré m,

$$(1) \qquad 1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc}\ldots$$

Écrivons-la sous la forme suivante :

$$(2) \qquad A - x + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \text{etc}\ldots = 0.$$

La série de Lagrange tirée de l'équation (2) devient

$$(3) \qquad A + \left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \ldots\right) + \frac{1}{1.2}\frac{d}{dx}\left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots\right)^3 + \text{etc}\ldots$$

où l'on doit faire $x = A$ après les différentiations.

Or cette dernière série rentre précisément dans celle qu'Euler a trouvée au § V de son mémoire ci-dessus cité.

A vrai dire, l'illustre géomètre de Pétersbourg a présenté la série (3) sous une forme différente de celle sous laquelle je viens de l'écrire; mais comme l'écriture d'Euler est plutôt compliquée, je me dispenserai de la rapporter ici, et je me bornerai à remarquer qu'il partage les termes de sa série en plusieurs ordres, appelant termes du premier ordre ceux qui sont du premier degré par rapport aux coefficients B, C, D, E..., termes du second ordre ceux qui sont du second degré par rapport aux mêmes coefficients, et de la sorte le terme général de la série (3), savoir :

$$\frac{1}{1.2.3..n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots\right)^n,$$

renferme l'ensemble de tous les termes qui, d'après Euler, représenteraïent les termes de l'ordre n.

Cela posé, ce géomètre, aux §§ IX et X de son mémoire cité, a énoncé la proposition suivante.

La série (3) représente toujours la racine numériquement la plus grande de toutes les racines de l'équation (1).

Cette proposition a été rappelée par M. Menabrea dans ses Mémoires sur la série de Lagrange, et il a ajouté qu'elle rentre dans celle de Lagrange contenue dans la note XI de la *Résolution des équations numériques*.

Effectivement, voici comment la proposition d'Euler peut se déduire de celle de Lagrange. Faisons donc l'équation (1)

$$x = \frac{1}{y},$$

elle deviendra

$$(4) \qquad 1 = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc}\ldots$$

qu'on réduira à la forme exigée par la proposition mentionnée de Lagrange, ainsi qu'il suit:

$$(5) \qquad \frac{1}{A} - y - \frac{B}{A}y^2 - \frac{C}{A}y^3 - \frac{D}{A}y^4 \ldots = 0.$$

D'ailleurs, $f(y)$ et $F.(y)$ désignant deux fonctions quelconques de y, et cette variable y étant une racine de l'équation

$$(6) \qquad u - y + f(y) = 0,$$

on aura, à l'aide de la série de Lagrange appliquée à l'équation (6),

$$(7) \qquad F(y) = Fu + F'u \times fu + \frac{1}{1.2}\frac{d}{du}[F'u \times f^2u]^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2}{du^2}[F'u \times f^3u]^3 + \text{etc}\ldots$$

Si donc l'on pose

$$f(y) = -\frac{B}{A}y^2 - \frac{C}{A}y^3 - \text{etc...} \tag{8}$$

$$F\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}, \quad u = \frac{1}{A}, \tag{9}$$

l'équation (7) deviendra

$$\frac{1}{y} = x = u^{-1} + (u^{-1})' f u + \frac{1}{1.2}\frac{d}{du}[(u^{-1})' f^2 u]^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2}{du^2}[(u^{-1})' f^3 u]^3 + \text{etc...} \tag{10}$$

série qui rentre facilement dans celle d'Euler, comme on peut s'en convaincre.

Il y a plus. La valeur précédente de $f(y)$ étant entière par rapport à y, la proposition de la note XI, déjà mentionnée, laquelle suppose seulement $f(y)$ entier ou développé suivant les puissances entières de y, serait applicable à la série (10). On en conclurait donc que la série (3) représente la racine la plus petite y de l'équation (5), ou, ce qui revient au même, la racine la plus grande x de l'équation (1) : ce qui serait la proposition d'Euler.

Mais est-ce que de la coïncidence des deux propositions mentionnées de Lagrange et d'Euler, coïncidence remarquée la première fois par M. Menabrea, et que nous venons de démontrer par l'analyse précédente, on doit conclure que ces deux propositions sont l'une et l'autre exactes? Non assurément.

En effet, premièrement, il faut observer que cette coïncidence n'infirme d'aucune façon les arguments décisifs à l'aide desquels, M. Cauchy et moi nous avons fait voir l'inexactitude de la proposition de Lagrange : d'où il suit que celle d'Euler est inexacte aussi. D'ailleurs, il est facile de se convaincre que la démonstration qu'Euler a essayé de donner de sa proposition est entachée du même vice que celle de la proposition de Lagrange.

C'est ce que nous allons faire voir brièvement.

Soient les racines de l'équation (1) rangées dans leur ordre de grandeur, à partir de la plus grande,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots \alpha_i,\ \alpha_{i+1} \ldots \alpha_m,$$

et supposons que α_i soit la racine fournie par la série (3). Appelons de plus S_n la somme des puissances du degré n de toutes les racines de l'équation (1), n étant un nombre entier positif.

Euler prouve que l'expression qui représente S_n en fonction des coefficients de l'équation (1) coïncide avec la puissance du degré n de la série (3), pour n infiniment grand. On aura donc, pour n infini,

$$(11) \qquad S_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n \ldots + \alpha_i^n + \alpha_{i+1}^n + \ldots = \alpha_i^n,$$

d'où l'on tire

$$(12) \qquad \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)^n + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)^n \ldots + 1 + \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)^n + \ldots = 1,$$

ou bien

$$(13) \qquad \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)^n + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)^n \ldots + \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)^n + \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)^n + \ldots = 0.$$

Mais cette dernière équation ne peut être vérifiée sans que α_i soit la racine la plus grande. D'où découle la proposition d'Euler.

Telle est la démonstration de ce géomètre; et l'on voit par là qu'il a essayé d'établir sa proposition en s'appuyant sur la considération de la somme des puissances semblables des racines, cette somme étant exprimée en série et en fonction des coefficients de l'équation (1). Mais il est essentiel d'observer que si $\psi(y)$ désigne une fonction quelconque entière de y, les racines de l'équation (4) ou bien de l'équation (5) étant, en vertu des notations adoptées,

$$\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{1}{\alpha_2},\ \frac{1}{\alpha_3}, \ldots \frac{1}{\alpha_i},\ \frac{1}{\alpha_{i+1}}, \ldots \frac{1}{\alpha_m},$$

on obtiendra, par la formule du n° 12 de la note XI de la *Résolution des équations numériques*, appliquée à l'équation (5),

$$\alpha_1^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) + \alpha_2^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_2}\right) + \text{etc.} \ldots = \Psi u + \Psi' u \times f u$$

$$(14) \qquad + \frac{1}{1.2} \frac{d}{du} [\Psi' u \times f^2 u] + \text{etc.} \ldots$$

où $\Psi u = \frac{\psi u}{u^n}$, $\Psi' u = \frac{d}{du}\left(\frac{\psi u}{u^n}\right)$, et où l'on ne doit retenir que les termes affectés des puissances négatives de u. Bien entendu qu'il faut faire $u = \frac{1}{A}$ après les différentiations, et donner à $f u$ la valeur fournie par l'équation (8), lorsqu'on y change y en u.

On tirera, de plus, de l'équation (7), en y faisant

$$(15) \qquad F(y) = \frac{\psi y}{y^{n-1}},$$

$$(16) \qquad \frac{\psi y}{y^{n-1}} = \Phi u + \Phi' u \times f u + \frac{1}{1.2} \frac{d}{du} [\Phi' u \times f^2 u] + \text{etc.} \ldots$$

où $\Phi u = \frac{\psi u}{u^{n-1}}$, et où il n'y a aucun terme à rejeter.

Or, si dans l'équation (16) l'on attribue à $f u$ la valeur fournie par l'équation (8), en y changeant y en u, et l'on fait de plus $u = \frac{1}{A}$, alors la racine y se réduit à celle fournie par la série (3) d'Euler, savoir $\frac{1}{\alpha_i}$, et, par suite, l'équation (16) se change en celle-ci :

$$(17) \qquad \alpha_i^{n-1} \psi\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) = \Phi u + \Phi' u \times f u + \text{etc.} \ldots$$

Cela posé, en rappelant la propriété démontrée par Lagrange (note XI, page 227 de l'ouvrage cité), en vertu de laquelle, si l'on désigne par (Φu) et (Πu) la série précédente, et celle qu'on en tire en y changeant Φu en Πu, on aura

$$(18) \qquad (\Phi u) : (\Pi u) = \left(\frac{\Phi u}{\Pi u}\right).$$

Si, de plus, on observe qu'en supposant n infiniment grand, la série composant le second membre de l'équation (14) jouit de la

propriété rappelée tout à l'heure (car alors on n'aura plus aucun terme à y rejeter), on déduira des équations (14) et (17) divisées l'une par l'autre,

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)}{\alpha_i^{n-1}\psi\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} + \dfrac{\alpha_2^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)}{\alpha_i^{n-1}\psi\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} + \ldots + \dfrac{\alpha_{i-1}^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_{i-1}}\right)}{\alpha_i^{n-1}\psi\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} + \alpha_i + \dfrac{\alpha_{i+1}^n \psi\left(\frac{1}{\alpha_{i+1}}\right)}{\alpha_i^{n-1}\psi\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)} \\ + \text{etc.} \ldots = u^{-1} + (u^{-1})' f u + \frac{1}{1.2}\frac{d}{du}[(u^{-1})' f^2 u)] + \text{etc.} \ldots \\ \text{où } (u^{-1})' = \dfrac{d}{du}(u^{-1}). \end{array}\right.$$

Le second membre de l'équation (19) coïncide avec la série (3) d'Euler, en retenant toujours qu'il faut attribuer à fu et à u les valeurs déjà indiquées.

La série d'Euler, généralement parlant, doit donc être regardée comme résultant, non pas (à l'exemple d'Euler) de la simple comparaison entre, d'une part, la puissance du degré $n-1$ d'une racine quelconque, et, d'autre part, la somme des puissances du degré n de toutes les racines; mais elle doit être regardée comme résultant de la comparaison entre, d'une part, le produit qu'on obtient en multipliant la puissance du degré $n-1$ d'une racine quelconque par la valeur qu'acquiert une fonction entière et arbitraire ψx, en y faisant x égal à la valeur réciproque de cette même racine, et, d'autre part, la somme de tous les produits semblables qu'on obtient en multipliant la puissance du degré n de chacune des racines par la valeur qu'acquiert ψx, lorsqu'on y fait x égal à la valeur réciproque de cette même racine.

Cela retenu, on n'aura qu'à répéter les raisonnements exposés au § III de mon premier mémoire, dans le but de prouver l'inexactitude de la proposition de Lagrange, pour se convaincre que le premier membre de l'équation (19), renfermant la fonction ψ tout à fait arbitraire, n'admettra une valeur finie et déterminée qu'autant qu'il se réduirait à α_i : ce qui, notons-le bien, n'exige pas

nécessairement que α_i soit la racine la plus grande, mais seulement que α_i étant, par exemple, comme nous venons de le supposer, la racine de l'ordre i, l'on ait

$$(20) \qquad \psi\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = 0,\ \psi\left(\frac{1}{\alpha_2}\right) = 0 \ldots \psi\left(\frac{1}{\alpha_{i-1}}\right) = 0,$$

conditions que l'on peut toujours remplir, en choisissant convenablement $\psi(x)$, qui, par hypothèse, est une fonction entière et arbitraire.

Nous avons donc raison, ce me semble, de dire que la méprise d'Euler dérive de la même source que celle commise par Lagrange. Le premier de ces grands géomètres s'est contenté de comparer la série qui offre la puissance du degré $n-1$ d'une racine quelconque de l'équation donnée à la série qui représente la somme des puissances semblables du degré n (n étant infiniment grand) de toutes les racines de la même équation, et il ne s'est pas aperçu que sa série pouvait résulter d'une comparaison bien plus générale. Le second, au contraire, a bien reconnu la nécessité de cette dernière comparaison; mais quand il s'est agi de déterminer la véritable valeur du quotient rapporté à la page 227 de son ouvrage cité, savoir,

$$\left\{\frac{\psi\alpha}{\alpha^n} + \frac{\psi\beta}{\beta^n} + \ldots\ldots\right\} : \left\{\frac{\psi\alpha}{\alpha^{n+r}} + \frac{\psi\beta}{\beta^{n+r}} + \text{etc}\ldots\right\}$$

(α, β, γ... désignent d'après Lagrange les racines de l'équation donnée), il s'est trompé pour n'avoir pas eu égard à la multiplicité des expressions algébriques qu'admet la fonction entière et arbitraire ψx.

MÉMOIRE

SUR

LE PAPYRUS DES ANCIENS

ET SUR LE PAPYRUS DE SICILE,

PAR PHILIPPE PARLATORE,

PROFESSEUR ET DIRECTEUR DU JARDIN BOTANIQUE AU MUSÉE D'HISTOIRE NATURELLE DE FLORENCE, ETC

Il y a déjà un an je m'occupais du papyrus de Sicile pour en parler dans le second volume de ma Flore d'Italie avec les autres cypéracées qui croissent dans la péninsule et dans les îles italiennes. En parcourant les différents échantillons de cette plante dans l'Herbier central italien qui se conserve au Musée d'histoire naturelle de Florence, et dont j'ai la direction, j'eus le bonheur d'y trouver, outre ceux que j'avais rapportés de mes excursions ou que j'avais reçus d'autres botanistes siciliens, un échantillon de Nubie, que mon ami M. le chevalier Figari, du Caire, m'avait envoyé en 1844 avec une riche collection de plantes d'Égypte et d'Éthiopie. Cet échantillon, quoique incomplet, me présentait néanmoins des différences dans l'ombelle et surtout dans les involucelles de chaque rayon de celle-ci; ces involucelles avaient, du reste, cinq ou six folioles au lieu de trois, comme on l'observe ordinairement dans le papyrus de Sicile. Ces différences m'engagèrent à faire des recherches sur cette plante ainsi que sur celle

de Sicile; et c'est après avoir obtenu des renseignements ou des plantes de Nubie, d'Égypte et de Syrie, et avoir suivi l'histoire du papyrus et consulté différents herbiers et musées dans mon dernier voyage au nord de l'Europe, que je crois être arrivé à connaître que le papyrus de Sicile, que tous les botanistes considèrent aujourd'hui, d'après Linné, comme la même plante que celle d'Égypte, est une espèce bien distincte, introduite en Sicile, probablement de la Syrie, peu avant le x^e^ siècle, au temps de la domination arabe; et que le papyrus des Égyptiens, maintenant presque ou tout à fait détruit en Égypte, appartient à la même plante qui vit encore en Nubie. A raison de l'intérêt que présentent ces recherches pour la botanique et pour l'illustration d'une plante si justement célèbre chez les anciens, qui ont fait usage de son papier pour nous transmettre leurs connaissances, j'ose soumettre les résultats de ces recherches au jugement de l'Académie des sciences de Paris, espérant que ce nouveau travail y trouvera le même accueil bienveillant qu'ont déjà eu le bonheur d'y obtenir quelques-uns de mes travaux.

Le papyrus de Sicile est une plante de la famille des cypéracées, appartenant au genre *Cyperus;* il a un rhizome gros, très-étendu horizontalement et rampant, d'où descendent de grosses fibres radicales (racines) nombreuses, d'une couleur brune et presque noirâtre, couvertes de fibrilles délicates, qui se présentent disposées régulièrement (comme c'est le propre des plantes aquatiques) lorsqu'elles nagent dans les eaux sans se fixer au sol. De ce rhizome s'élèvent verticalement des tiges triangulaires ou quelquefois un peu scabres aux angles vers le sommet, hautes de 8, 10, 12, et quelquefois jusqu'à 14 et 16 pieds parisiens, semblables à des joncs, de 1 pouce 1/2 à 2 pouces de diamètre au bas, et allant en diminuant au haut; ordinairement dépourvues de feuilles et seulement garnies dans leur partie inférieure, sur une longueur de moins d'un pied ou rarement d'un peu plus, de larges gaînes au nombre de cinq, de six, et quelquefois de huit, dont les inférieures sont plus courtes, mais plus larges, et les

supérieures beaucoup plus longues, imbriquées et disposées sur trois rangs, rétrécies en une pointe aiguë au sommet, et d'une couleur rougeâtre qui, dans les inférieures, tend au brun. Rarement se développent des feuilles; ce qui arrive quelquefois, non-seulement dans l'état de culture de la plante, dans nos serres (ainsi que j'ai été à même de l'observer au mois de mai de cette année (1851) dans le jardin botanique de l'Université de Berlin), mais aussi dans l'état sauvage de la plante, comme je l'ai vu sur les bords d'une branche de la rivière Anapo, près de Syracuse, au mois de septembre 1845. Les feuilles qui se développent dans la plante sauvage (et que je conserve dans l'Herbier central italien) ont ordinairement une longueur de 2 à 3 pieds; elles embrassent la tige par le bas, et sont lancéolées, aiguës, carénées en dessous, rudes et comme en scie sur les bords vers le sommet de la feuille. La tige est plus délicate et beaucoup plus courte que dans les individus qui ont seulement des gaînes. Dans la plante cultivée à Berlin, que je viens de mentionner, j'ai vu seulement développées en feuilles les deux ou trois gaînes supérieures, ces feuilles étant de la même forme que dans la plante sauvage, mais plus courtes et d'un vert plus pâle et presque blanchâtre dans leur page inférieure; dans la même plante, dont la tige était très-basse, j'ai vu aussi, passées à l'état de feuilles, les folioles les plus extérieures de l'involucre; elles étaient dirigées en bas et beaucoup plus longues que l'ombelle, qui du reste était peu développée. Cyrillo avait déjà noté la présence, quoique rare, des feuilles dans le papyrus de Sicile, qu'il a même figurées dans sa seconde planche[1].

Les tiges, qui croissent en touffes et qui sont très-simples, se terminent au haut par une ombelle qui, par sa grandeur et sa forme, contribue beaucoup à l'élégance de la plante. Cette ombelle est enveloppée à sa base par un involucre beaucoup plus court qu'elle, composé de plusieurs folioles (bractées) en forme d'écailles lancéolées, carénées en dessous, très-aiguës au som-

[1] Dominici Cyrilli *Cyperus papyrus*. Parme, 1796; typis Bordonianis, p. VIII.

met, et d'une couleur presque rougeâtre, et dont une partie pénètre, en décroissant toujours en grandeur, au milieu des rayons qui composent l'ombelle. Les folioles extérieures embrassent cette ombelle à son état le plus jeune; elles sont alors dirigées tout à fait en haut et forment une espèce de pyramide presque triangulaire et rougeâtre portée au sommet des jeunes tiges de la plante, mais elles s'écartent plus tard peu à peu et se dirigent vers le bas, à cause de l'éloignement des rayons de l'ombelle les uns des autres, dont nous parlerons tout à l'heure. Ces rayons, en effet, sont très-nombreux, longs de 1 pied à 1 pied 1/2, quelquefois même ils ont jusqu'à 2 pieds; ils partent de tous les points d'une espèce de réceptacle presque sphérique qui se trouve au centre de l'ombelle, de sorte que quelques-uns se dirigent tout à fait en haut, d'autres latéralement, et d'autres enfin en bas; tous sont délicats, et surtout ceux qui se trouvent sur les côtés, et qui sont plus longs, se courbent un peu par suite de leur faiblesse : il en résulte ainsi une ombelle large et en forme de sphère, qui, par l'inclinaison de ses rayons, prend un aspect très-élégant. De forme un peu triangulaire comme la tige, à angles obtus, ces rayons sont verts, lisses ou seulement quelquefois un peu rudes vers le sommet lorsqu'on y passe les doigts de haut en bas. Chaque rayon est enveloppé complétement à sa base par une petite gaine particulière, étroite, longue d'un peu plus d'un pouce, triangulaire et tronquée; il porte à son sommet deux ou trois épis, plus rarement quatre, formés d'épillets d'une couleur jaunâtre, qui plus tard devient d'un rouge brunâtre. Les épis, qui, avec le rachis, ont généralement 1 pouce de longueur, sont entourés au bas d'un involucre secondaire, ou involucelle, composé de trois folioles qui naissent l'une au-dessus de l'autre, mais sont très-rapprochées entre elles, de sorte qu'elles semblent partir d'un même point : ces folioles sont vertes, filiformes, canaliculées dans leur page supérieure, à bords un peu rudes lorsqu'on y passe les doigts du haut en bas, avec une carène dans leur page inférieure; elles surpassent de beaucoup en longueur les épis, mais elles sont beau-

coup plus courtes que les rayons : plus rarement on trouve une quatrième foliole beaucoup plus courte, presque en forme d'arête, et plus rarement encore celle-ci se développe de manière à égaler presque les trois autres. Les épillets sont linéaires, sessiles, dirigés presque horizontalement, un peu éloignés l'un de l'autre au bas du rachis, plus rapprochés au sommet, où se trouve un épillet terminal; ils sont composés d'écailles imbriquées d'une manière distique, ovales, obtuses, à carène verte, rougeâtres sur les côtés et blanchâtres vers les bords; elles renferment deux squamules de forme lancéolée, aiguës et persistantes, un peu plus longues que le petit fruit, soudées d'abord par leur bord externe avec le rachis et avec la partie inférieure du bord de l'écaille supérieure du côté opposé, de sorte qu'on peut à cet état les détacher ensemble avec celle-ci; elles sont plus tard tout à fait libres, et lorsqu'elles se dessèchent, elles se contournent en spirale à peu près comme les valves du fruit de certaines légumineuses[1]. Les étamines, au nombre de trois, alternent avec les squamules et correspondent, l'une à l'écaille ou bractéole, et les autres aux deux angles latéraux du petit fruit; les filaments sont filiformes et soutiennent des anthères linéaires jaunâtres avec un appendice allongé et blanchâtre; les grains du pollen sont lisses et sphériques. Le style est long, filiforme, blanc; il se montre au dehors avec ses trois stigmates courbés et lisses. L'achaine ou petit fruit est de forme allongée presque triangulaire, un peu convexe et comme ayant un angle à sa partie externe, concave à sa partie interne, obtus au sommet, lisse et d'une couleur brune.

La plante que je viens de décrire sur des individus vivants de Sicile se plaît à vivre sur les bords des petites rivières ou des ruisseaux dont les eaux peu profondes coulent d'une manière douce et lente. Elle se trouve seulement dans la partie orientale et méridionale de la Sicile, le long des bords d'une branche de la rivière Anapo, qui conduit à la célèbre source Ciane, que les

[1] Pour avoir plus de détails sur ces squamules et sur leur valeur morphologique, on pourra consulter le second volume de ma *Flora italiana*.

Syracusains appellent vulgairement *Testa di Pisima*, à S. Cosimano, près de Mililli, où elle a été notée pour la première fois par Boccone, et où je l'ai vue aussi; et le long de la rivière Cantara, près de Calatabiano, et à Spaccaforno, d'après ce qu'en écrit M. Gussone[1]. M. Presl[2] assure que M. Gussone l'a trouvée aussi sur le bords du Fiume freddo, près de Taormina; mais je ne vois pas cette localité indiquée dans les ouvrages de mon illustre ami Gussone, publiés même après celui de M. Presl. Le papyrus forme un ornement magnifique des bords de ces petites rivières, car il y croît abondamment et s'y élève avec ses tiges et ses ombelles élégantes d'une manière presque gigantesque. Il y a aux alentours de l'Anapo un endroit plus large que le reste, qu'on appelle le *Camerone* (grande chambre), dont tous les côtés sont couverts de papyrus, qui y végète en abondance au point d'y former presque une espèce de forêt; les eaux limpides baisent doucement la partie basse de la plante, qui élève ses tiges à la hauteur de 12 à 16 pieds, et réfléchissent les ombelles penchées et majestueuses qui en couronnent le sommet. En me trouvant au milieu de ces papyrus, je me croyais transporté comme en rêve dans un pays des tropiques.

Autrefois le papyrus de Sicile vivait abondamment aussi près de Palerme, dans des espèces de petits lacs formés par une petite rivière nommée *Papireto*, grâce à la quantité des plantes de papyrus qui s'y trouvaient. Cette rivière avait sa source à Ainsindi, maintenant Denisinni, à un demi-mille presque de distance à l'ouest de Palerme, qu'elle traversait anciennement en passant entre la vieille ville et une autre partie qui était alors connue pour cela sous le nom de *Transpapyretum;* mais cette petite rivière ayant été desséchée en 1591 à cause du mauvais air que donnaient ses petits lacs marécageux, le papyrus y fut par conséquent tout à fait détruit.

Micheli, célèbre botaniste florentin, a écrit avoir vu le papyrus

[1] *Florœ siculæ synopsis*, vol. I, p. 47.

[2] *Cyperaceæ et gramineæ siculæ*, p. 15. Pragæ, 1820.

dans des lieux marécageux de Calabre, ce qui a été répété, peut-être sur son autorité, par Linné, Willdenow, Kunth, etc.; mais je ne sache pas que le papyrus soit une plante de Calabre; ni Cyrillo, dans sa monographie de cette plante, ne dit l'y avoir vue, ni M. Tenore n'en parle dans sa Flore napolitaine. On ne trouve dans l'herbier de Micheli, qui se conserve au Musée d'histoire naturelle de Florence, aucun échantillon du papyrus de Calabre; il y en a seulement un qui vient de Sicile. Guilandini, en parlant du papyrus de Sicile, dit qu'il croît abondamment dans ce pays, et qu'il est connu dans cette île, en Pouille et en Calabre, sous le nom de *papiro;* mais il ne dit pas que cette plante soit spontanée dans ces provinces du royaume de Naples[1]. Je pense, du reste, comme on le verra par la suite, que dans la plante de Guilandini il faut reconnaître quelque espèce de *cyperus* ou de *scirpus* bien distincte du papyrus. D'après Strabon[2], on devrait croire que le papyrus se trouve aussi sur les bords du lac Trasimène, près de Pérouse; mais je ne connais pas de botaniste qui l'ait vu dans cet endroit, et moi-même, quoique j'aie visité plusieurs fois ce lac, je n'ai pas été plus heureux dans mes recherches : il est probable que Strabon a confondu avec cette plante quelque autre espèce de *cyperus*.

Le papyrus de Sicile est une plante vivace qui, observée à l'état sauvage, commence à fleurir dans le mois de juillet, et prolonge sa floraison jusqu'en septembre; les ombelles, les tiges se dessèchent plus tard, prennent une teinte jaunâtre et périssent en entier, mais le rhizome rejette toujours de nouveaux bourgeons, qui continuent l'existence de la plante.

Tout à fait identique à la plante de Sicile, est celle qui croît en Syrie, sur les bords de la Méditerranée, à Mumkalid, à sept heures de distance au nord de Jaffa. Je puis l'affirmer d'après un échantillon que je dois à la bonté de M. le docteur F. Pestalozza,

[1] *Melchioris Guilandini Papyrus, hoc est commentarius in tria C. Plinii majoris de papyro capita.* Venetiis, 1572, p. 108.

[2] Lib. XVII.

de Beyrouth, et qui avait été recueilli dans ce lieu par M. l'abbé Michon. Cet échantillon, qui présente son ombelle bien développée, quoique dépourvue de fleurs (mais je possède aussi d'autres rayons de la même plante avec les épis déjà flétris), est parfaitement identique au papyrus de Sicile par ses gaînes, au nombre de six, ses tiges hautes de plus de huit pieds, les folioles extérieures de l'involucre dirigées vers le bas, les rayons délicats qui naissent de tous les côtés sur cette espèce de réceptacle conique qui est au centre de l'ombelle, et se dirigent en tous sens par les involucelles, généralement au nombre de trois, et beaucoup plus courtes que les rayons. M. Pestalozza m'écrit, dans sa lettre du 5 avril de cette année (1851), que, dans la plante vivante, l'ombelle présente la forme d'une sphère, comme je l'ai décrit plus haut pour le papyrus de Sicile, et que les indigènes donnent à la plante de Syrie le nom de *papir*. Il ajoute que cette plante se trouve aussi en abondance près d'Acre et de Sur (Tyr), où on l'emploie pour fabriquer des nattes, et près des bords de la mer, entre Kaïffa et Jaffa.

Cette identité des deux plantes de Sicile et de Syrie avait été déjà remarquée par G. Bauhin, le seul botaniste qui ait su reconnaître d'une manière claire qu'il y avait dans le papyrus deux espèces différentes, qu'il a nommées dans son fameux Pinax[1], l'une *Papyrus syriaca vel siciliana*, et l'autre *Papyrus nilotica vel ægyptiaca*. Cependant, dans son *Theatrum botanicum*, en parlant de la première, il indique, comme habitation de la plante, seulement la Sicile[2]. Bruce, dans ses voyages en Nubie, en Abyssinie, etc.[3], dit que le papyrus vient aussi en Syrie, sur les bords du Jourdain, du côté gauche du pont qu'on appelle le *Pont des fils de Jacob*, où il a trouvé les eaux profondes seulement de 2 pieds 9 pouces,

[1] C. Bauhini *Pinax Theatri botanici*. Basileæ, 1671; lib. I, sect. 3, p. 19.

[2] C. Bauhini *Theatri botanici sive historiæ plantarum, etc.* liber primus. Basileæ, 1658; sect. 3, cap. x, p. 334.

[3] *Travels to discover the source of the Nile*, second edit. Edimburgh, 1805; vol. 7, p. 119.

entre le site de l'ancienne ville de Pénéas et le lac Tibériade[1], qui est probablement le même lac dont parlent Théophraste et Pline à propos du papyrus. Théophraste, en effet, écrit : « Nasci- « tur et in Syria papyrus circa lacum quo et calamus aromaticus[2] », que Pline a un peu changé dans les mots suivants : « Nascitur et « in Syria circa quem odoratus ille calamus lacum[3]. » Si nous pouvions nous reposer sur l'assertion de Bruce, nous serions forcé de dire que la plante du Jourdain est identique avec celle qu'il a recueillie dans deux endroits différents de la basse et de la haute Égypte ainsi qu'en Abyssinie, excepté seulement, selon lui, quelques différences de beauté, de force et de taille; et que toutes sont dans toutes leurs parties parfaitement semblables à la plante décrite par les anciens[4]. Mais Bruce, qui, du reste, a décrit et figuré, comme nous le verrons plus tard, la plante qui pour nous est le vrai papyrus égyptien, n'a malheureusement pas dit de quelle localité il a choisi la plante qui a servi pour sa figure et sa description, de sorte que ces différences de force, de beauté, de hauteur nous laissent en doute sur la détermination de la plante du Jourdain dont il est ici question. Je n'ose donc pas, faute d'échantillons, affirmer si cette plante est la même que le papyrus de Sicile ou celui d'Égypte. Il en est de même pour la plante que Pline dit croître sur les bords de l'Euphrate, près de Babylone[5].

[1] C'est le même lac qu'on appelle aussi du nom de lac de Génésareth ou de mer de Galilée.

[2] *Theophrasti philosophi clarissimi De historia plantarum libri IX et decimi principium; De causis sive generatione plantarum libri VI;* Theodoro Gaza interprete. Basileæ, 1534, p. 58.

[3] *Historia plantarum*, lib. XIII, cap. XI.

[4] « I collected specimens in Syria, from the river Jordan, from two different « places in Upper and Lower Egypt, from the lakes Tzana and Gooderoo in Abys- « sinia, and it was with the utmost pleasure I found they were in every particular « intrinsically the same, without any variation or difference from what this plant has « been described to be by the ancients. Only I thought that those of Egypt, the « middle of the two extremes, were stronger, fairer, and fully a foot taller, than « those in Syria and Abyssinia. » (Bruce, *Travels*, vol. VII, p. 115.)

[5] *Historia naturalis*, lib. XIII, cap. XI.

Peut-être appartient-elle au papyrus d'Égypte; car Guilandini, dans son célèbre commentaire sur les trois chapitres de Pline, dit, à propos de cette dernière localité, que Pline a ajoutée aux autres déjà connues avant lui, qu'il a rencontré cette plante au confluent du Tigre et de l'Euphrate, et il le considère comme tout à fait identique avec le papyrus du Nil et avec celui du lac ci-dessus mentionné. « Quod vero, écrit-il, subjungit Plinius, papyrum gigni quoque in Euphrate circa Babylonem, testor vidisse « me in Chaldæa qua duo amnes Tigri et Euphrates concurrunt, « per amplas paludes ex quibus papyrum nihilo discrepantem a « Niliaca Gennesareticaque meis manibus erui atque evulsi[1]. »

Cependant je ne puis pas me reposer sur l'autorité de Guilandini pour assurer que le papyrus du Tigre et de l'Euphrate est le même que celui de Nubie; car d'abord il y a des différends parmi les botanistes anciens sur l'identité du papyrus du Nil et celui d'Égypte mentionnés par Pline[2], et ensuite parce que Guilandini n'a décrit ni la plante de Syrie, ni celle d'Égypte, quoiqu'il les eût vues sur les lieux mêmes, n'ayant pas su tirer de ses voyages tout le fruit qu'on aurait dû attendre d'un observateur, aimant mieux parcourir les pays étrangers en homme érudit qu'en naturaliste. Son opinion, du reste, a très-peu de valeur ici; car, comme je l'ai avancé plus haut, Guilandini s'est trompé sur le papyrus de Sicile.

D'après tout ce que je connais maintenant d'une manière positive, je puis, pour la distribution géographique du papyrus sicilien, établir que c'est une espèce qui aime à vivre dans les eaux peu profondes des petites rivières et des ruisseaux qui coulent lentement, ainsi que dans les lieux marécageux, à peu de distance des bords de la mer, entre le 32^{e} et le 38^{e} degré de latitude nord et le 12^{e} et le 34^{e} degré de longitude à l'est de Paris.

Il est aussi intéressant pour la géographie botanique que pour

[1] Guilandini, *Papyrus, etc.* p. 147.

[2] Voyez De Lobel, *Plantarum historiæ, etc.* Londini, 1665, p. 39; *C. Bauhini Theatri botanici*, libr. I. Basileæ, 1658, p. 324, etc.

l'archéologie et l'histoire, de connaître si le papyrus de Sicile est vraiment indigène de cette île, ou s'il y a été introduit de la Syrie. Il ne peut pas y avoir de doutes que le papyrus de Syrie ne soit beaucoup plus ancien que celui de Sicile; car, comme je viens de le dire, il était déjà connu des anciens, même de Théophraste, etc., qui en ont parlé dans leurs ouvrages. Alors le papyrus n'existait pas du tout en Sicile, ni à Palerme ni à Syracuse; car autrement nous ne saurions expliquer sur cette plante célèbre, objet alors d'un grand intérêt pour les peuples, le silence des auteurs grecs et romains, et même des poëtes et des écrivains qui vivaient à Syracuse. Théophraste, Dioscoride, Pline ne font pas mention du papyrus de Sicile; ni Diodore de Sicile, ni Théocrite n'en parlent aucunement, quoiqu'ils soient Siciliens et ce dernier même de Syracuse; ni Ovide non plus, qui a parlé dans ses Métamorphoses du Ciane, ne fait aucune mention du papyrus, qu'il a nommé seulement à propos du Nil. La première notice que je connaisse du papyrus de Sicile est dans une relation d'un voyage fait à Palerme dans le x^e^ siècle par un Arabe très-instruit, du nom d'Ebn-Haucal; lequel, en décrivant certaines espèces de marais formés par les eaux qui provenaient des environs de Palerme et coulaient dans la direction de l'ouest à l'est (ce qui me fait croire que c'étaient les mêmes eaux qu'on a plus tard nommées *le fleuve Papireto*), écrit de la manière suivante : « E « tra questi paludi giace una fondura coperta tutta di papiro, che « è quella pianta di cui si fanno i fogli da scrivere. Essendo in « Egitto io credeva non nascesse il papiro in alcun altro paese della « terra, ma l'ho trovato in Sicilia. La più parte è attorta in go- « mene per le navi, e il resto serve a fabbricare fogli per il sul- « tano che ne ha appena quanto gliene fa d'uopo[1]. »

Ce fut deux siècles plus tard, au temps de la domination des Normands en Sicile, qu'on commença à parler de la rivière Papi-

[1] Voyez les *Frammenti di Jesti Arabi sulla Sicilia musulmana*, traduits et illustrés par mon savant compatriote Michel Amari, extraits de l'*Appendice all' Archivio storico italiano*, t. IV, p. 15.

reto, qui séparait la partie ancienne de la ville, appelée *Paleopoli* (car elle fut la première à être habitée), de l'autre partie vers le nord, qu'on nommait le *Transpapyretum*. Nous trouvons en effet ce dernier mot dans l'Histoire de Sicile du célèbre écrivain normand Hugues Falcand[1]. Fazzello, historien sicilien non moins célèbre du x^e^ siècle, parle d'une manière très-étendue du Papireto, et décrit très-bien la plante du papyrus qu'on trouvait sur ses bords, et qui était connue sous le nom de *papero*. Je crois intéressant de reproduire ici sa description : « Hæc urbis pars in medio flumen « Papyreto habet, qui post peractam frumenti in multis pistrinis « triturationem versus portum egreditur. Oritur extra mœnia ad « milliaria fere dimidium a fonte quod in crypta nascitur, sara- « cenico idiomate Ainsettime dicta, et quæ hodie corrupto voca- « bulo dicitur Ainsindi. Hoc flumen statim extra mœnia, intra « quoque effórmat stagna nonnulla et paludes in quibus copiose « papyrus gignitur. Est hæc junci species satis longa, octo fere « pedes, caulem habet triangulum, atque in extremitate gerit lanu- « ginem ad instar capillorum, atque inde locus et flumen obtinue- « runt nomen Papiro. » Mais, comme j'ai eu occasion de le dire plus haut, cette petite rivière et ces lacs furent desséchés en 1591 par ordre du vice-roi comte d'Abeldelista, et le papyrus y fut détruit[2]. Les eaux de la rivière furent en partie destinées à l'irrigation des champs, comme on le voit même maintenant, et une autre partie passe toujours, ainsi qu'on me l'a dit, sous la ville de Palerme, et fournit l'eau à boire aux habitants d'une portion de la ville même. Il existe encore une plaine à Palerme qui occupe la place où était autrefois le fleuve Papireto, et qu'on nomme maintenant pour cela *il Piano del Papireto*, en sicilien *Pipiritu*, dont une partie a été dernièrement destinée à un jardin public,

[1] Voyez aussi la *Descrizione di Palermo antico ricavata dagli autori sincroni e i monumenti dei tempi da Salvatore Morso R. professore di lingua arabica;* ediz. seconda; Palermo, 1827, où l'on donne aussi une carte topographique de l'ancienne ville de Palerme.

[2] Voyez Scinà, *Topografia di Palermo e dei suoi contorni;* Palermo, 1818, dans les notes, à la page 33.

où, presque comme pour y perpétuer le souvenir du papyrus, on y cultive cette plante, ainsi que dans les jardins de plusieurs seigneurs de Palerme et de Sicile. Boccone, célèbre botaniste palermitain du XVII^e^ siècle, dans ses Recherches et observations naturelles publiées à Amsterdam en 1674, écrit de la manière suivante à propos du papyrus de Palerme, dans sa 27^e^ lettre, adressée à M. Ange Buonfanti, touchant les plantes rares qui croissent dans le royaume de Sicile : « Pour ce qui est s'il en croist proche de Palerme ou non, vous sçavez aussi bien que moi qu'il y en a eu et qu'il y en a maintenant bien proche de ladite ville. » Il veut sans doute, dans le premier cas, parler du papyrus qui vivait sur les bords de la rivière Papireto; et peut-être fait-il allusion, dans le second cas, aux papyrus qui pouvaient être alors cultivés dans les environs de Palerme. Mais la notice que Boccone donne du papyrus dans ce petit, mais intéressant ouvrage que je viens de citer, est digne de l'attention des botanistes pour la description qu'il donne de cette plante, et surtout parce qu'il y dit l'avoir observée dans les marais de S. Cosimano, qui est à une lieue au-dessous de la terre de Mililli et des monts d'Hybla, à trois lieues et un tiers de Syracuse. Il ajoute encore qu'on lui a assuré que le papyrus se trouvait aussi tout proche de la ville de Syracuse, dans un endroit appelé *la Maddalena*. Il paraît que ces observations de Boccone sur le papyrus ont été tout à fait négligées des botanistes, qui ne les ont jamais citées, que je le sache du moins, et cela est d'autant plus remarquable que, vers la fin du siècle passé, il s'éleva à Syracuse une grande dispute entre Xavier Landolina et l'abbé Secondo Sinesio, qui soutenait que le comte César Gaetani, homme d'un vrai mérite en archéologie, avait été le premier à découvrir le papyrus à Syracuse, au lieu de Landolina, qui se croyait l'auteur de cette prétendue découverte[1], dispute qui prit de grandes dimensions, même à l'étranger, car il y avait des voyageurs qui réclamaient aussi la priorité. Cependant l'existence du papyrus à

[1] Voyez Scinà, *Prospetto della Storia litteraria di Sicilia nel secolo decimottavo*. Palermo, 1827, vol. III, p. 246.

Syracuse n'est pas du tout ancienne; car non-seulement les anciens historiens et les poëtes n'en parlent pas, comme je l'ai dit plus haut, mais il n'en est nullement question dans l'ouvrage de Jacques Bonanni et Colonna, duc de Montalbano, savants écrivains siciliens *Dell' antica Siracusa illustrata*, publié à Messine en 1624, dans lequel on se tait sur le papyrus, quoiqu'on y décrive la rivière Anapo et la source Ciane, qu'on voit même représentées à la première page de l'ouvrage sous forme humaine, au milieu de roseaux. Si le papyrus avait existé dans ces endroits célèbres, Bonanni non-seulement en aurait parlé, mais il aurait certainement préféré au roseau cette plante classique et caractéristique de Syracuse pour la mettre en tête de son livre. On voit donc bien que le papyrus a été introduit à Syracuse dans le XVII^e^ siècle, entre la publication de l'ouvrage de Bonanni (1624) et celle de l'ouvrage de Boccone (1674). Probablement qu'il a été apporté dans les localités ci-dessus citées de l'Anapo et de Ciane, soit de l'endroit de la Maddalena dont parle Boccone, soit de S. Cosimano, où le papyrus se trouvait abondamment, même du temps de Boccone, car il écrit l'y avoir vu « en prodigieuse abondance », de sorte qu'il lui semblait voir « un bois de piques couronné de plusieurs ombelles comme un panache. » Landolina a néanmoins le mérite d'avoir le premier, de nos temps, fabriqué avec le papyrus de Syracuse du papier à l'instar des anciens; ce papier fut recherché par les savants et les antiquaires de l'Europe, et reçu avec des éloges même par les Académies[1]. Je dois à l'obligeance de M. Pinder, numismate distingué, d'avoir vu à la bibliothèque royale de Berlin un morceau de ce papier provenant de Landolina; il est bon, et certainement supérieur à celui qu'on fait aujourd'hui même à Syracuse, seulement par curiosité, et sur lequel on peint ordinairement la plante même du papyrus.

Quant au papyrus de Nubie, je dois, pour sa description, m'en rapporter en grande partie à ce que M. Figari m'en a écrit dans

[1] Voyez le discorso XIX, *Del papiro siciliano*, dans les ouvrages du chanoine Gregorio, t. I, p. 122.

une longue lettre du 5 janvier de cette année, tout en me bornant aux caractères qui distinguent plus particulièrement cette plante de celle de Sicile. Dans cette lettre, il eut la complaisance de satisfaire à plusieurs de mes demandes sur le papyrus de Nubie, qu'il avait recueilli lui-même, et sur celui d'Égypte, si par hasard il avait été à même de le voir dans ce pays.

La plante dont je possède l'échantillon déjà mentionné au commencement de ce mémoire, a été trouvée par M. Figari dans un vaste marais de la Nubie supérieure, non loin des bords du fleuve Blanc, presque sous le 7^{e} degré de latitude nord. Ce marais forme une espèce de lac au moment où y arrivent les eaux de la pluie; mais ses eaux n'ont pas plus de cinq pieds de profondeur, car les plus gros hippopotames ne peuvent pas y nager aisément. Le sol au fond du marais est noir et argileux, mais le papyrus croît seulement sur les bords, où le sol est tout à fait boueux et où l'eau ne surpasse pas la hauteur du rhizome; quelques petites îles se trouvent au milieu du marais, sur lesquelles se montre aussi le papyrus, mais leur distance ne permet pas de l'y recueillir. C'était le 27 septembre 1838 que M. Figari se trouvait dans ce marais pour y herboriser; le papyrus n'avait pas encore de fleurs, mais ses ombelles étaient déjà bien développées. Les indigènes du pays assuraient à mon ami que la floraison de cette plante commence vers la fin de septembre et se termine vers la fin de décembre, c'est-à-dire qu'elle commence quand la floraison du papyrus de Sicile est déjà finie. La plante de Nubie meurt en entier pendant le mois de janvier, à l'exception de son rhizome, qui continue à vivre pour développer ses bourgeons dans les mois de juillet et d'août suivants, après les pluies tropicales de mai, juin et juillet. Elle forme des touffes plus ou moins épaisses, et ses tiges, qui ont une forme triangulaire comme celles de la plante de Sicile, ne s'élèvent pas autant que celle-ci, mais n'atteignent ordinairement qu'une hauteur de 5 ou 6 pieds parisiens; il est extrêmement rare, d'après M. Figari, d'en trouver de plus hautes jusqu'à 10 pieds. Les gaînes sont nombreuses; elles recouvrent la tige

dans son tiers inférieur, ordinairement sur une étendue de 18 ou 20 pouces. Les bractées qui forment l'involucre sont dressées et s'adaptent sur les rayons de l'ombelle, dans l'intérieur de laquelle elles pénètrent, aussi bien que dans le papyrus sicilien. Ces rayons sont nombreux, plus gros, mais plus courts que dans la plante de Sicile, car ils n'ont que de 3 à 5 pouces de long; leur surface présente des sillons bien marqués; ils sont tous dressés sans qu'aucun d'eux diverge des autres, de sorte qu'il en résulte une ombelle de la forme d'un panache de crins, dont le sommet s'incline un peu d'un seul côté. M. Figari m'écrit qu'il croit que dans le plus grand nombre de cas cette inclinaison doit avoir lieu de l'est à l'ouest; car il a observé qu'elle était ainsi dans tous les individus de papyrus qu'il rencontra; il m'écrit également que cette forme de l'ombelle s'observe quand celle-ci a acquis tout son développement; car dans l'état jeune, elle ressemble parfaitement à un pinceau, avec les rayons du centre un peu plus élevés que ceux des côtés. La petite gaîne tronquée qui embrasse la partie inférieure de chaque rayon est moins serrée que dans le papyrus de Sicile; mais ce qui mérite de notre part bien plus d'attention, c'est le nombre et la proportion des folioles des involucelles avec les rayons eux-mêmes. Ces folioles sont plus larges et à bords plus rudes que dans la plante de Sicile; elles sont généralement au nombre de cinq ou de quatre, quelquefois encore au nombre de six. Elles sont plus longues que les rayons, car elles ont d'ordinaire de 6 à 7 pouces de long; ce qui fait une différence très-intéressante par rapport au papyrus sicilien, dont les folioles sont toujours beaucoup plus courtes que les rayons: l'ombelle offre ainsi une longueur ordinairement d'un pied, et plus rarement davantage. J'ai dit plus haut que ni moi, ni M. Figari, nous ne possédions les fleurs de la plante de Nubie; ce que je regrette beaucoup, parce que cette circonstance m'empêche de compléter la description de la plante et d'en donner les figures analytiques.

Une fois connu que celle-ci est une espèce bien distincte par

de nombreux caractères de l'espèce de Sicile et de Syrie, il me restait encore une tâche très-importante à remplir, c'est-à-dire à connaître le papyrus de l'Égypte. Je savais déjà qu'il était devenu extrêmement rare dans ce pays; car beaucoup de voyageurs et de botanistes qui y avaient été ont parlé dans leurs ouvrages de la rareté de cette plante, que d'autres n'ont pas vue du tout. Forskål, botaniste danois qui a visité l'Égypte en 1762, n'en parle pas dans sa Flore arabique-égyptienne[1]. Delile, qui fut le botaniste de l'expédition française en Égypte, auteur aussi d'une Flore de ce pays, dit seulement[2] qu'elle se trouve à Damiette, où l'a vue aussi Savary. Celui-ci dit l'avoir trouvée encore près du lac Menzalé[3]; tous deux affirment que c'est une plante très-rare. Il en est de même de beaucoup d'autres voyageurs qui ont visité l'Égypte. Dans un ouvrage récemment publié sur ce pays par Clot-Bey, il ne mentionne pas le papyrus, quoiqu'il décrive l'état actuel du pays sous tous les points de vue, même sous celui des plantes qui y végètent. M. Figari, interrogé par moi sur la rareté ou la non-existence du papyrus en Égypte, m'écrit de la manière suivante : « Quoique j'aie parcouru pendant de longues années toutes les régions de l'Égypte, et particulièrement la vallée du Nil, je n'ai jamais été assez heureux pour y rencontrer le papyrus. Je tiens pour faux ce que disent certains voyageurs qui prétendent l'avoir vû spontané dans la haute Égypte; car cette région n'offre pas les conditions favorables pour que cette plante puisse y croître; elle manque tout à fait de lacs, de marais, d'étangs; le sol est très-élevé, et le peu de canaux qu'il y a contiennent de l'eau seulement pendant trois mois de l'année. Malgré les conditions favorables de la moyenne Égypte et surtout de la petite région formée par le bassin de la province du Fayoum, on n'y trouve pas

[1] *Flora ægyptiaco-arabica*, sive *descriptiones plantarum quas per Ægyptum inferiorem et Arabiam Felicem detexit, illustravit Petrus Forskål Prof. Havn. post mortem auctoris edidit Carsten Niebuhr.* Haviniæ, 1775.

[2] *Floræ ægyptiacæ illustratio*, dans la Description de l'Égypte, histoire naturelle, t. II, p. 50.

[3] *Lettres sur l'Égypte*, t. I, p. 322.

du tout le papyrus, mais au contraire en abondance le *Typha* et plusieurs espèces de joncs, de *Scirpus* et de *Cyperus*, surtout le *Cyperus dives*, qui, à cause de sa grandeur, a été probablement pris par les voyageurs pour le vrai papyrus. Je suis même persuadé que les anciens Égyptiens employaient cette plante pour en fabriquer du papier, comme ils le faisaient du papyrus. J'ai visité tous les grands lacs, les marais, les canaux, les rizières du Delta et des lieux adjacents qui forment la basse Égypte, mais j'ai toujours été désappointé dans mon espérance d'y trouver le papyrus; j'y ai vu seulement les mêmes espèces de plantes que je viens de mentionner ci-dessus. » D'après toutes ses recherches, M. Figari croit que le papyrus n'existe plus en Égypte, et qu'il en a disparu comme le *Nelumbium speciosum* (*Faba ægyptia* des anciens), les deux plantes n'étant pas originairement indigènes de l'Égypte. Il croit aussi que le papyrus y fut introduit anciennement de la Nubie, et qu'il s'y acclimata et propagea spontanément dans les marais et étangs du Fayoum et du Delta, mais qu'une fois que le culte que les anciens avaient pour cette plante vint à lui manquer, et que des changements notables eurent lieu dans le sol de l'Égypte, la plante y devint peu à peu plus rare, jusqu'à en disparaître complétement. Cette opinion de M. Figari est d'accord avec ce qu'en pensait Bruce, voyageur du siècle passé, que j'ai déjà cité, et que j'aurai encore occasion de citer dans ce mémoire. Il croit que le papyrus ne peut pas être originaire de l'Égypte, car il n'aurait pu résister avec ses tiges faibles, son ombelle trop lourde, etc., à la force du vent dans un pays plat; il le croit venu de l'Éthiopie[1].

[1] « The papyrus seems to me to have come down from Ethiopia, and to have « been used in Upper Egypt immediately after the desuse of hieroglyphics, » et plus bas : « Early however, as papyrus was known, it does not appear to me ever to « have been a plant that could have existed in the Nile, or, as authors have said, « been proper to it. Its head is too heavy, and in a plain country, the wind must « have too violent a hold of it. The stalk is small and feeble, and likewise too tall, « the root too short and slender to stay it against the violent pressure of the wind « and current : Therefore I believe it never could be a plant growing in the Nile

Pour connaître le papyrus de l'Égypte, il faut donc avoir recours aux descriptions de ceux qui en ont parlé dans des temps plus anciens que le nôtre, quand cette plante vivait encore dans ce pays, ou du moins y était bien plus abondante qu'aujourd'hui; c'est une recherche que je crois devoir être intéressante pour connaître l'histoire du papyrus et pour accorder une juste valeur aux descriptions des anciens naturalistes. Sans remonter jusqu'aux époques d'Alcée et d'Anacréon, et d'autres poëtes et historiens anciens, qui ont cependant parlé du papyrus dans leurs ouvrages, et sans rappeler la naissance de Moïse, qui fut déposé au milieu des papyrus du Nil, etc., car on ne trouve pas dans tout cela des descriptions de la plante, nous dirons seulement que Théophraste, père de la botanique, a décrit deux espèces de papyrus, qu'il appelle l'une *papyrus* et l'autre *sari*. Pour la première des deux plantes, il écrit : « Nascitur non in altitudine gurgitum, sed prope « intra duo cubita, nonnusquam etiam minus : crassitudine radicis « qua vola viri robusti, longitudine super dena cubita provenit : « super terram ipsam radices obliquas, tenues, densasque in limum « demittens : sursum quos papyros dixere profert triquetros, an- « gulatos, magnitudine quaternorum fere cubitorum, coma inutili « exilique fastigiatos, fructus nullius fœcundos, ex multisque « radicis partibus erumpentes. » Quant à la seconde, voici la description qu'il en donne : « Sari in aqua provenit circa paludes pla- « naque ubi Nilus recesserit. Habet radicem præduram, flexuosam- « que, ex qua quæ saria vocant exeunt : his longitudo duorum « cubitorum, crassitudo pollicaris. Triangulum id quoque papyri « modo et comam similem gerit[1]. »

Personne ne peut douter que dans le papyrus de Théophraste on ne doive reconnaître un vrai papyrus, et très-probablement celui de Nubie; car il décrit la plante d'Égypte d'une manière très-reconnaissable et comme ayant une tige de la hauteur de 4 cou-

« itself or in any very deep and rapid river. » (Bruce, *Travels, etc.* vol. VII, p. 117, 118.)

[1] *Historia plantarum.* Basileæ, 1534, lib. IV, cap. IX, p. 58.

dées, c'est-à-dire de presque 6 pieds parisiens. Mais nous ne pouvons pas voir dans son *sari* un vrai papyrus, ni surtout la plante de Sicile; car il donne à sa plante des tiges de 2 coudées de hauteur, c'est-à-dire de 3 pieds, tandis que le papyrus de Sicile est plus grand même que celui de Nubie et de l'Égypte. Par conséquent, nous croyons que Guilandini s'est beaucoup trompé quand il a prétendu reconnaître dans le *sari* de Théophraste la plante de Sicile[1], que du reste, d'après son ouvrage, il ne paraît pas avoir jamais vue lui-même. Il en est de même de G. Bauhin, qui a rapporté le synonyme de Théophraste et de Guilandini à la plante sicilienne, peut-être sur l'autorité de ce dernier et sans se donner la peine d'en vérifier l'exactitude. Le *sari* de Théophraste est toujours une plante douteuse; mais je crois ne pas me tromper en disant qu'il faut y voir une des espèces de *Cyperus* ou de *Scirpus* qui abondent même maintenant dans les lieux marécageux de l'Égypte, et très-probablement le *Cyperus dives;* car la forme triangulaire de la tige, comme dans le papyrus, et la hauteur de cette tige, de presque 3 pieds, ne laissent pas, à mon avis, de doute que le *sari* de Théophraste ne soit une espèce de *Cyperus* ou de *Scirpus.*

Dioscoride parle du papyrus, mais ne le décrit pas; il n'en donne que le nom et les propriétés; ce qui lui arrive très-souvent pour les plantes dont il s'est occupé[2]. Il n'en est pas de même de Pline, qui en donne la description suivante, tout en s'étendant avec beaucoup de détails sur la manière d'en fabriquer le papier : « Papy-
« rum ergo nascitur in palustribus Ægypti aut quiescentibus Nili
« aquis ubi evagatæ stagnant, duo cubita non excedente altitudine
« gurgitum, brachiali radicis obliquæ crassitudine, triangulis late-
« ribus, decem non amplius cubitorum longitudine in gracilitatem
« fastigiatum, thyrsi modo cacumen includens. Semine nullo; aut
« usu ejus alio quam floris ad deos coronandos[3]. » Cette descrip-

[1] Guilandini, *loc. cit.* p. 108.
[2] *De materia medica*, lib. I, cap. XVI.
[3] *Historia naturalis*, lib. XIII, cap. XI.

tion du papyrus, qui est presque la même que celle de Théophraste, présente néanmoins une différence de hauteur dans la tige, qu'on dit être de 10 coudées, c'est-à-dire de presque 15 pieds parisiens, de manière à faire croire que Pline a décrit dans sa plante plutôt le papyrus de Sicile que celui de Nubie. Mais il est à remarquer que Pline, en copiant généralement ses devanciers, et Théophraste de préférence pour l'histoire naturelle, au lieu de se proposer pour modèle la nature elle-même, a quelquefois estropié le sens des auteurs, comme il paraît l'avoir fait dans le cas présent. En effet, Guilandini, dans son Commentaire déjà plusieurs fois cité sur les trois chapitres de Pline sur le papyrus, croit devoir corriger le texte de l'auteur en mettant « triangulis lateribus » après « decem non amplius cubitorum longitudine », en faisant observer que Théophraste a employé ces mêmes mots non pas pour les tiges, mais pour la racine, et que le papyrus qu'il avait lui-même vu en Égypte ne s'élevait tout au plus que jusqu'à 7 coudées de hauteur. Je transcrirai ici ses paroles mêmes, qui feront mieux connaître la chose : « Ex qua Theophrasti oratione, » dit-il, après avoir transcrit la description du papyrus donnée par Théophraste, « facile est cujus intelligere, qua ego ratione persuasus duo in Plinio verba sede non sua jacentia, alio reponenda censuerim. Cum enim in Ægypto peregrinarer et magna cura in omnes ejus regionis stirpes inquirerem, nunquam potui in papyrum incidere cujus thyrsi seu virgæ ad summum septem cubita excederent. Quare cogitare mecum cœpi vel non intellexisse Plinium quæ a Theophrasto dicuntur, cujus criminis tantum virum reum agere pudet, vel ei certe transcribentium (incuriane dicam an inscitia?) vim esse factam : hos enim longitudinem decem cubitorum radicibus attributam ad scapos hastiliave seu caules imperite nimis transtulisse mihi persuadeo[1]. »

Cependant la forme d'un thyrse que Pline attribue au papyrus d'Égypte me paraît être une chose essentielle pour voir dans sa plante le papyrus de Nubie; car c'est précisément comme un thyrse

[1] Guilandini, *op. cit.* p. 107.

que se présente l'ombelle de celui-ci, par suite de la disposition de ses rayons, dont les supérieurs ou ceux du centre sont un peu plus longs que ceux des côtés, comme je l'ai dit plus haut en décrivant la plante de Nubie.

Presque contemporains de Guilandini, vivaient, dans le même siècle (le XVI^e^), Césalpin, Prosper Alpin, Lobel, Matthiole, les deux frères Bauhin, qui ont parlé du papyrus dans leurs ouvrages. Quant à Matthiole, il n'a fait que répéter, dans ses Commentaires sur Dioscoride[1], la description de Pline, en donnant une figure de la plante qu'il a copiée de l'*Historia plantarum* de Lobel, comme l'auteur lui-même le dit. Ces figures, pour la forme de l'ombelle, représentent le vrai papyrus de Nubie; mais nous ne pouvons pas assurer qu'il ait eu en vue cette plante, car il ne l'a pas décrite avec des caractères reconnaissables[2]. Césalpin, dans son ouvrage *De plantis*, a décrit sans aucun doute la plante de Sicile, comme on le voit, non-seulement par sa description, la première qui en ait été donnée par un botaniste, mais encore parce que, suivant son assertion, cette description a été faite sur la plante cultivée dans le jardin botanique de Pise, et qu'il avait reçue des lieux marécageux de la Sicile. Nous reproduisons ici toute sa description : « Papyrus quem vulgo in Sicilia piperum vocant, juncos fert « cypero longiores crassioresque, ad quaterna aliquando cubita « accedentes, angulis obtusis : folia a radice brevia; adulto junco « nulla, in cacumine comam latam, ex numerosis parvis juncis « triangulis constantem, in quorum summis flocci sunt rufi, Cypero « similes inter foliola terna : radices habet lignosas, crassas, Harundinis modo geniculatas, numerosa sobole in obliquum ten- « dentes, odore et sapore Cyperum æmulantes, sed infirmius, « subrufas : ex inferna earum parte radiculæ multæ descendunt « fibrosæ, ex superna autem frequentes junci assurgunt, qui dum « tenelli sunt dulci succo constant; venit in hortum Pisanum ex

[1] Matthioli *Opera quæ extant omnia, hoc est Commentarii in libros VI Pedacii Dioscoridis Anazarbei De medicâ materia, etc.* Editio altera. Basileæ, 1674, p. 138.

[2] Lobel, *Animadversiones*. Londinæ, 1605, p. 38.

« palustribus Siciliæ[1]. » La forme de l'ombelle, qu'on dit être large, *comam latam*, et le nombre trois des folioles de chaque involucelle, *foliola terna*, sont plus que suffisants pour nous assurer que Césalpin a décrit le vrai papyrus sicilien. Quant à ce qu'il a dit des tiges, qu'elles ont une hauteur de 4 coudées, c'est-à-dire de presque 6 pieds parisiens, je me permettrai de faire observer que Césalpin a décrit la plante cultivée et non spontanée, et qu'il arrive bien souvent, dans nos serres ou dans nos orangeries, de ne pas voir se développer le papyrus de Sicile dans toute sa magnificence, comme il se montre dans son lieu natal.

D'une autre part, nous trouvons dans Prosper Alpin quelques caractères qui peuvent nous engager à considérer le papyrus d'Égypte comme la même espèce que celui de Nubie. Ce botaniste italien, qui a séjourné en Égypte pendant trois ans, nous décrit le papyrus du Nil en ces mots : « Papyrus quam Berd Ægyptii no-« minant, est planta fluminis Nili, binis aut pluribus caulibus rec-« tissimis supra aquam sex septemve cubitibus assurgens, caulium-« que in fastigiis scapus innumeris capillamentis, longis rectisque « contextus, cernitur. Foliis quaque constat multis, rectis, ensifor-« mis, tiphæ aliquatenus similibus, triangularibus ac mollibus[2]. » La direction des rayons de l'ombelle, qu'il dit être *rectis*, la planche qu'il en donne, où tous les rayons sont en effet droits et dressés, le nombre des gaînes, qu'il dit être *multis* (car dans ses *foliis* il faut voir des gaînes), me semblent prouver que la plante égyptienne était la même que celle de Nubie. Et cette opinion, j'ai pu la changer en certitude dès que j'ai eu le bonheur de voir, dans le riche musée égyptien de Berlin, deux échantillons de papyrus qui ont été trouvés par M. Passalacqua dans une catacombe de Thèbes. Ces deux échantillons, vus déjà par Kunth[3], sont entiers

[1] *De plantis*, lib. VI Andreæ Cæsalpini Aretini, etc. Florentiæ, 1583.

[2] *De plantis ægyptiis*. Venetiis, 1592, p. 43.

[3] Voyez ses *Recherches sur les plantes trouvées dans les tombeaux égyptiens par M. Passalacqua*, dans les Annales des sciences naturelles de Paris, vol. VIII, 1826, p. 418.

et très-bien conservés; leur longueur est de presque 6 pieds, et les rayons de l'ombelle sont dressés, ce qu'on pourrait du reste attribuer à la manière d'arranger ces papyrus; mais il n'y aura plus de doute qu'il ne faille rapporter ces échantillons à la plante de Nubie, lorsque l'on aura observé les folioles des involucelles, qui sont ordinairement au nombre de cinq et plus rarement de quatre. Les figures du papyrus, si souvent données par les Égyptiens dans leurs sarcophages, leurs monuments, etc., viennent confirmer ce fait que j'ai eu le bonheur de découvrir; car elles nous représentent toujours cette plante avec les rayons de l'ombelle dressés, de sorte que celle-ci forme une espèce de calice. M. le professeur Lepsius, si bien connu par son voyage et ses travaux sur l'Égypte, et dont j'ai eu l'honneur de faire la connaissance personnelle à Berlin, me disait qu'il avait déjà noté le manque de correspondance entre les figures du papyrus représenté par les Égyptiens, et la plante que tous les botanistes considéraient comme le vrai papyrus, et qu'il était très-satisfait de voir que la plante de Nubie expliquait la raison pour laquelle les Égyptiens représentaient le papyrus toujours en forme de calice.

Je ne parlerai pas de ce que Jean Bauhin nous a laissé écrit sur le papyrus, parce qu'il dit n'avoir jamais vu cette plante, et qu'il se borne à copier principalement les descriptions de Prosper Alpin et de Lobel, dont il a aussi copié la figure[1]. « Cum nobis », c'est ainsi qu'il commence son histoire du papyrus, « incognita « hæc est nec unquam visa, etc. » Je passe aussi sous silence d'autres botanistes qui ne donnent pas de descriptions originales de cette plante. Mais il n'en est pas de même de G. Bauhin, homme d'un talent supérieur, qui forme, avec son frère, une époque dans l'histoire de la science, pour avoir le premier réuni sous une même plante, comme synonymes, les différents noms donnés à cette plante par les auteurs qui l'avaient précédé. C'est à lui que nous devons, comme je l'ai dit plus haut, la distinction des deux espèces

[1] *Historia plantarum, etc.* Auctoribus Joh. Bauhino et Joh. H. Cherlero. Ebroduni, 1651, t. II, p. 306.

de papyrus, le *papyrus syriaca vel siciliana* et le *papyrus nilotica vel ægyptiaca*. Quant à celui-ci, il ne nous en donne dans son *Theatrum botanicum*[1] aucune description; il reproduit seulement celles de Pline, de Prosper Alpin, etc., mais il décrit la première, c'est-à-dire le *papyrus syriaca vel siciliana*, de la manière suivante : « Radicibus est subrufis, lignosis, crassis, geniculatis, numerosa « sobole in obliquum tendentibus, cyperi odore et sapore sed in- « firmiore, ex quarum parte inferna multæ radiculæ fibrosæ des- « cendunt, ex superna autem frequentes scapi assurgunt, qui dum « tenelli sunt dulci succo constant : qui cypero fiunt longiores, « crassioresque, sæpe cubitos quatuor excedentes (etsi sex, inter- « dum septem dicat Pena), angulis obtusis (triquetris, tomentitia « medulla farctis, Pena). Folia adimum brevia cyperi aut spar- « ganii, adulto scapo nulla : in cacumine coma lata ex numerosis « parvisque junceis triangulis constans : in quorum summis flocci « rufi, apicibus prominentibus; in se collecti, quorum ortum fo- « liola radiatim, ut in cypero, ambiunt[2]. » Dans cette description de la plante de Sicile, qu'on voit être très-semblable à celle de Césalpin, G. Bauhin a négligé le caractère important des trois folioles de l'involucelle, qui avait été donné par le célèbre botaniste italien. Il a aussi, comme Guilandini, cru devoir rapporter à la plante de Sicile le *sari* de Théophraste, que nous avons vu ne pas pouvoir lui appartenir; et il a enfin copié pour cette plante la figure de Lobel, comme l'ont fait tous les botanistes du XVI^e^ siècle. Il est à regretter que Bauhin n'ait pas donné les différences des deux espèces de papyrus qu'il venait d'établir. Peut-être que cela a contribué à les faire confondre ensemble par les botanistes postérieurs, même après la grande réforme apportée dans la botanique par le génie de Linné. La cause de cette erreur est due, à mon avis, principalement à la rareté de la plante égyptienne, que presque aucun botaniste n'a vue, et à la croyance générale que le

[1] P. 323.
[2] P. 333.

papyrus de Sicile, cultivé dans nos jardins botaniques depuis l'époque de Césalpin[1], est le même que celui d'Égypte.

Il serait long d'exposer ici tout ce qui a été dit sur le papyrus par les botanistes et par ceux qui s'en sont occupés dans ces derniers siècles par rapport au papier des anciens; car généralement ils n'ont fait que répéter, sans y apporter beaucoup de jugement, tout ce qu'avaient écrit sur ce sujet Théophraste, Pline, etc.; ils ont presque tous confondu ensemble les deux espèces, y compris le célèbre Ray, qui, dans son *papyrus nilotica*, a réuni le *papyrus nilotica sive ægyptiaca* et le *papyrus syriaca vel siciliana* de G. Bauhin, en disant : « Nos enim non distinguimus[2]. » Je me bornerai donc à rappeler ici les observations particulières des savants qui ont contribué à nous donner quelques connaissances nouvelles sur les deux espèces de papyrus dont il est question dans ce mémoire.

Je ne répéterai pas ce que j'ai déjà dit de Boccone à propos du papyrus de Sicile : j'ajouterai seulement que, dans son Musée de physique[3], il a donné une figure de l'ombelle du papyrus sicilien, et qu'une figure de toute la plante se trouve dans le *Pamphyton siculum* de Cupani[4] : ces botanistes adoptèrent tous deux, pour la plante de Sicile, le nom que lui avait donné G. Bauhin. Dans le siècle passé, Jean Scheuchzer ayant trouvé, dans les plantes de son herbier, des rayons du papyrus de Sicile avec les épis au sommet, crut y voir une nouvelle espèce de *cyperus*, qu'il a décrite comme telle dans sa célèbre *Agrostographie*[5], quoique avec hésitation, sous le nom de *cyperus enodis, nudus culmis vaginis brevibus prodeuntibus spicis tenuioribus*, et qu'il a en partie représentée dans la figure 14 de sa table VIII; mais son contemporain Micheli a déjà fait connaître que cette plante n'était autre

[1] J'ai déjà dit plus haut que Césalpin cultivait dans le jardin botanique de Pise le papyrus de Sicile : je ne connais pas d'autre botaniste qui l'ait cultivé en Europe avant lui.

[2] Raji, *Historia plantarum*. Londini, 1693, t. II, p. 1302.

[3] Boccone, *Museo di fisica*. Venezia, 1697, lib. VII sinist. fig. 6.

[4] *Pamphyton siculum*, vol. II, tab. 138.

[5] Scheuchzer, *Agrostographia*. Tiguri, 1719, p. 387.

chose qu'un rayon de l'ombelle du papyrus sicilien[1]. Le comte de Caylus, aidé pour la partie botanique par le célèbre Bernard de Jussieu, présenta à l'Académie royale des inscriptions et belles-lettres de Paris une dissertation sur le papyrus que nous trouvons imprimée dans les Mémoires de littérature de cette Académie[2]. Dans cette dissertation, l'auteur, après de longs aperçus historiques, croit « pouvoir conclure que le papyrus de Sicile était à peu de chose près bien connu en botanique, et qu'il était à souhaiter qu'on eût autant de connaissances sûres à l'égard du papyrus d'Égypte. » Il déclare « qu'il y a entre ces plantes une grande affinité, » mais il ne sait pas indiquer les caractères qui les distinguent, n'ayant pas les moyens de faire connaître la plante d'Égypte. Il montre que dans le papyrus de Sicile on ne peut pas voir le *sari* de Théophraste, et, se fondant sur le témoignage de Strabon, qui dit que le papyrus ne croît que dans l'Égypte et aux Indes, il est porté à supposer que ce pourrait bien être la plante d'Égypte que le papyrus qui venait d'être découvert par Poivre à Madagascar, situé à l'entrée de l'Inde[3]; mais le vrai papyrus d'Égypte ne croît pas aux Indes orientales, comme l'a affirmé Strabon, et la plante de Madagascar (reconnue plus tard sous le nom de *papyrus madagascariensis* par Willdenow) n'est pas la même espèce que celle d'Égypte. Les figures de l'ombelle du papyrus sicilien données par le comte de Caylus ne sont pas exactes, quoique, dans son ensemble, l'ombelle, par sa forme, se rapproche de la vérité.

Nous devons à Bruce, célèbre voyageur anglais du siècle passé, la première et la seule figure que nous possédions jusqu'ici du papyrus d'Égypte, si l'on en excepte la figure médiocre que nous

[1] Micheli, *Nova plantarum genera*. Florentia, 1729, p. 44. Il faut observer que Micheli a figuré un rayon de l'ombelle du papyrus avec quatre folioles dans l'involucelle et avec quatre épis; mais le peu de longueur des premières, par rapport aux seconds, montre bien qu'il a voulu figurer la plante de Sicile, quoiqu'il l'ait mal fait.

[2] T. XXVI, p. 267. Paris, 1759.

[3] P. 297 Il est à remarquer que, malgré ce que dit ici Strabon, dans un autre passage de son livre il assigne également le lac Trasimène comme habitation au papyrus, ce dont j'ai déjà fait mention au commencement de ce mémoire.

en a donnée Prosper Alpin. Dans cette figure, comme dans sa description, nous trouvons un long rhizome horizontal, une tige triangulaire qui se rétrécit vers le sommet, haute tout au plus d'un peu plus de 10 pieds (je suppose que ce sont des pieds anglais), enveloppée à sa base par de nombreuses gaînes sur une longueur de plus d'un quart de la longueur totale; l'ombelle présente les folioles de l'involucre dressées, et un grand nombre de rayons qui se dressent tous et se courbent d'un seul côté, comme nous l'avons vu pour la plante de Nubie. Ces rayons se terminent par quatre folioles de même longueur qu'eux, au milieu desquelles se trouvent quatre épis[1]. Bruce, outre qu'il a recueilli le papyrus en Syrie, dans le Jourdain, comme nous l'avons déjà dit, a trouvé cette plante dans deux endroits de la basse et de la haute Égypte, et sur les bords des lacs Tzana et Gooderoo, en Abyssinie[2]. Quoique nous ignorions de quelle localité est la plante qui a servi pour la figure qu'il a donnée, il est certain qu'il a décrit et figuré la plante que nous croyons être le vrai papyrus d'Égypte.

Après ce qui avait été écrit sur le papyrus de Sicile par le comte de Caylus, et sur celui d'Égypte par Bruce, on aurait dû s'attendre à ce que Linné, qui vivait à la même époque que ces deux auteurs, distinguât les deux espèces. Il n'en a pas été ainsi: Linné les a confondues ensemble dans son *Species plantarum* sous le nom de *Cyperus papyrus*, comme on le voit d'après les synonymes qu'il y a rapportés, et pour avoir mis dans les localités la Calabre, la Sicile, la Syrie, l'Égypte[3]; dans son *Systema naturæ*, il décrit certainement la plante de Sicile, car il lui donne pour caractère *involucellis triphyllis*, quoiqu'il cite l'ouvrage et la figure de Bruce[4].

Rottböl, dans ses *Descriptiones et icones rariorum et pro maxima parte novarum plantarum*[5], qu'on peut considérer comme une espèce

[1] Bruce, *Travels*, vol. VII, p. 129-130; et vol. VIII, tab. 2.
[2] *Idem*, vol. VII, p. 115 et 119.
[3] Linné, *Species plantarum*, 3e édit. 1764, p. 60.
[4] Linné, *Systema naturæ*, edit. 13a. Lugduni, 1796, t. II, p. 133 Havniæ, 1786, p. 32, n. 42.

de monographie de quelques genres des Cypéracées et des Restiacées alors connues, décrit, quoique très-incomplétement, le papyrus, et il ne manque pas de noter que l'échantillon de son herbier présentait des involucelles à quatre folioles, au lieu de trois, comme l'avait dit Linné; il se plaint aussi du manque d'une description complète et d'une bonne figure d'une plante connue depuis une époque si ancienne. Pour tâcher de remplir cette lacune, Cyrillo, dans sa Monographie du papyrus, a décrit soigneusement (excepté pour ce qui regarde les fleurs et le fruit) et figuré la plante de Syracuse, qu'il a considérée comme parfaitement identique avec celle d'Égypte. « Quæ usque adhuc adnotatæ « sunt, écrit-il, ostendunt papyrum syracusanam ægyptiæ, cujus de- « scriptio prostat apud Plinium et Theophrastum simillimam esse[1]. » Il n'avait qu'à comparer sa description et sa figure avec celle de Bruce, qu'il cite, pour voir les différences entre les deux plantes. Dans la même erreur sont tombés Willdenow, qui a formé le genre *Papyrus*, que je n'admets pas[2], et employé pour le *Cyperus papyrus* de Linné le nom spécifique d'*antiquorum*[3]; et Kunth, qui, du reste, écrit avoir fait sa description sur un échantillon de Sicile[4]. J'ai consulté les herbiers de ces deux célèbres botanistes, et je n'y ai trouvé que des échantillons de la plante provenant de Sicile, ou bien cultivée dans le jardin botanique de Berlin. M. Presl[5] et M. Gussone[6], dans leurs ouvrages sur les plantes de la Sicile; M. Bertoloni, dans sa *Flora italica*[7], ont aussi confondu ensemble les deux plantes, comme on le voit par leurs synonymes, quoiqu'ils aient décrit seulement la plante de Sicile.

[1] Dominici Cyrilli *Cyperus papyrus*. Parma, 1796, p. 10.

[2] Voyez, pour les raisons, le second volume de ma *Flora italiana*.

[3] Dans les *Abhandlungen der kön. Akademie der Wissenschaften in Berlin*, 1816, p. 70.

[4] Kunth, *Enumeratio plantarum*. Stuttgardtiæ et Tubingæ, t. II, p. 64.

[5] *Cyperaceæ et Gramineæ siculæ*. Pragæ, 1820, p. 15.

[6] *Floræ siculæ prodromus*. Neapoli, 1827, vol. I, p. 45. *Supplementum ad Floræ siculæ prodromum*. Neapoli, 1832, fasciculus primus, p. 11. — *Floræ siculæ synopsis*. Neapoli, 1842, vol. I, p. 47.

[7] Vol. I, p. 274.

D'après tout ce que nous savons maintenant d'une manière certaine sur les localités du papyrus de Nubie, nous pouvons le considérer comme une plante tropicale, qui vit sur les bords des lacs et dans les lieux marécageux de la Nubie et de l'Abyssinie, entre le 7e et le 13e degré de latitude nord, et le 25e et le 35e degré de longitude à l'est de Paris.

Je crois donc devoir reconnaître les deux espèces de papyrus que nous avons décrites sous les noms de *Cyperus syriacus* pour la plante de Syrie et de Sicile, et de *Cyperus papyrus* pour celle de Nubie et d'Abyssinie. J'ai préféré le nom spécifique de *syriacus* pour la première à celui de *siculus*, par la raison que nous avons vu que la plante de Syrie est la même que celle de Sicile, et que celle-ci n'est pas originaire de cette île. Je retiens pour l'autre le nom de *Cyperus papyrus*, quoique Linné ait confondu ensemble les deux espèces, et même décrit plus particulièrement sous ce nom la plante sicilienne, afin de conserver à notre plante sa désignation propre de *papyrus*, car c'est en elle, comme nous avons tâché de le démontrer, qu'il faut voir le véritable *papyrus* des anciens Égyptiens.

CYPERUS SYRIACUS. Parl.

C. umbella decomposita, globosa, radiis numerosissimis, tenuibus, longissimis, superioribus erectis, mediis sive lateralibus longioribus, curvulis, inferioribus brevioribus, dependentibus; involucri polyphylli umbella multo brevioris foliolis exterioribus reflexo-pendulis, involucelli 3-rarò 4-phylli foliolis filiformi-linearibus, canaliculatis, margine sursum scabriusculis, elongatis, radio semper multo brevioribus; spiculis anguste linearibus, remotiusculis, in spicas 1-3 dispositis; squamis ovatis, obtusis, perigonii squamulis lineari-lanceolatis, acuminatis, achenio sublongioribus; achenio oblongo, triquetro, externe convexo-angulato, interne concavo, apice obtuso, levi (fusco) squamis subdimidio breviore; calamo elato (8-16 ped.), apice triquetro, basi obtusangulo, plerumque

aphyllo, basi tantum vaginato vaginis sub-6 acuminatis, vel folioso foliis late lineari-lanceolatis, acutis, carinatis, margine apicem versus serrulato-scabris; rhizomate crasso, repente.

Papyrus quem vulgo in Sicilia piperum vocant. Cæsalp. *De plant.* p. 191 (anno 1583).

Papyrus syriaca vel siciliana. C. Bauh. *Pin.* p. 19 (anno 1671), excl. syn. Theophrasti et Guilandini, et *Theatr. botan.* p. 333 (anno 1658); Boccon. *Recherches et observat. natur.* p. 205 (anno 1674).

Cyperus omnium maximus, papyrus dictus (locustis mininis). Monti, *Cat. stirp. agr. bonon. prodr.* p. 14 (anno 1719). Mich. *Nov. pl. gen.* p. 44 (anno 1729) et herb.

Cyperus papyrus. Linn. *Sp. pl.* p. 70, quoad pl. sic. Cyrill. *Monogr.* p. 5. Presl, *Cyp. et gram. sic.* p. 15. Guss. *Fl. sic. prodr.* I, p. 45. Kunth, *Enum. pl.* II, p. 64, quo ad pl. sicul. et syriac. et *herb.* Bert. *Fl. ital.* I, p. 274. Guss. *Syn. fl. sic.* I, p. 47, exclus. ab. omnib. nonnull. synon.

Papyrus antiquorum. Willd. *In Abhandl. der kön. Akademie der Wissenchaft. in Berlin* (anno 1816), p. 70 et herb.

Papyrus sicula. Parl. *In Hooker's Journal of Botany.* June, 1851, p. 189.

ICONES.

Cyrill. *Monogr.* tab. 1-2. icon. nostra 1ª.

Papyri siculi paniculæ fragmentum. Boccon. *Mus. di fisic.* p. 315, tab. 7 sinistr. fig. 3.

Juba o panicula intiera di papyrus sicula. Boccon. *Mus. di fisic.* p. 315, tab. 7 sinistr. fig. 6 (umbellam tantum, sed non bene refert).

Cyperus maximus, umbellatus, syriacus vel siculus papyrus vulgo. Cup. *Pamph. sic.* II, tab. 138. Bonan. tab. 13.

Habitat in Syriæ et Siciliæ aquis haud profundis lenteque fluentibus, nec non in paludosis non procul a mari Tyrrheno inter 32

et 38 gradus latitudinis septentrionalis. Floret ab julio ad septembrem.

CYPERUS PAPYRUS. Parl.

C. umbella decomposita, erecta, apice subnutante, radiis numerosissimis, longis, omnibus erectis, superioribus sive centralibus longioribus; involucri polyphylli umbella multo brevioris foliolis exterioribus erecto-patulis, involucellis 4-5-6 phyllis, foliolis anguste linearibus, canaliculatis, margine sursum scabris, longissimis, radio longioribus; spiculis... squamis... achenio... calamo elato (5-6 ped. raro usque ad 10) triquetro, obtusangulo, tertia parte inferiore vaginis numerosis acuminatis tecto; rhizomate crasso, repente.

Πάπυρος. Theophr. *Hist. plant.* lib. IV, cap. IX. Dioscor. lib. I, cap. X.

Papyrus. Plin. *Hist. nat.* lib. XIII, cap. XI.

Papyrus quam Berd Ægyptii vocant. Prosp. Alpin. *De plant. ægypt.* p. 43 (anno 1592).

Papyrus nilotica sive ægyptiaca. C. Bauh. *Pin.* p. 19 (anno 1671) excl. syn. Guiland.

Cyperus papyrus. Linn. *Sp. pl.* p. 70, quoad pl. Ægypt. Kunth, *Enum. pl.* II, p. 64, quoad pl. Ægypt. et Abyssin.

Icones. Bruce, *Travels*, vol. VIII, tab. 4-1, icon. nostra 2ª.

Habitat in paludosis Nubiæ superioris, prope fluminis Albi ripas, sub 7° gradu latitudinis septentrionalis, et Abyssiniæ inter 9 et 13 gradus ejusdem latitudinis. Olim in quiescentibus Nili aquis crescebat. Floret octobri-decembri.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE PREMIÈRE.

PAPYRUS DE SICILE.

N° 1. Cette figure représente la plante entière extrêmement réduite et croissant en touffe, telle qu'on la voit sur les bords d'une branche de la rivière Anapo, près de Syracuse.

2. La même plante vue dans des dimensions plus grandes et montrant ses racines, une partie de son rhizome, les gaînes, peu nombreuses, qui recouvrent la base de ses tiges, une jeune tige, et une tige adulte de la hauteur de 12 pieds parisiens, coupée presque au milieu et terminée par son ombelle complétement développée.

3. Un rayon d'ombelle réduit à presque un tiers de sa grandeur naturelle, avec ses gaînes à sa base, son involucelle et ses épis.

4. Un épillet entier trois fois plus grand que nature.

5. Écaille de la fleur, vue sur sa face externe.

6. La même, vue sur sa face interne.

7. La même, vue de côté.

8. Les deux écailles du périgone, vues sur leur face externe.

9. Partie de la rachiole avec deux de ses dents portant les écailles du périgone, *e*, *e*.

10. Partie de la rachiole *r*, dont la dent inférieure porte l'écaille de la fleur *E*, un peu écartée pour montrer l'écaille du périgone *e*, soudée avec la rachiole et avec la partie inférieure du bord de l'écaille de la fleur supérieure *E*.

11. Partie de la rachiole *r*, dont une dent supporte une écaille de la fleur *E*, un peu écartée pour montrer les écailles du périgone *e*, *e*, légèrement entortillées, et leur position relativement à l'achaine *a*.

12. Pistil et étamines; *o*, ovaire; *s*, style et stigmates; *t*, étamines.

13. Achaine vu sur sa face interne.

14. Le même vu sur sa face externe.

(Les figures 5 à 14 sont six fois environ plus grandes que nature.)

15. Diagramme de la fleur.

PLANCHE II.

PAPYRUS DE NUBIE ET PROBABLEMENT D'ABYSSINIE.

N° 1. Papyrus de Nubie de la hauteur de 6 pieds parisiens, dont l'ombelle n'offre pas encore de fleurs. Cette figure a été exactement copiée d'un dessin fait sur les lieux par M. Figari, et qu'il a eu la bonté de m'envoyer.

2. Un rayon de l'ombelle de la plante précédente, réduit à un tiers de sa grandeur naturelle.

3. Papyrus probablement d'Abyssinie. Figure réduite de celle qu'a donnée Bruce dans la relation de ses voyages.

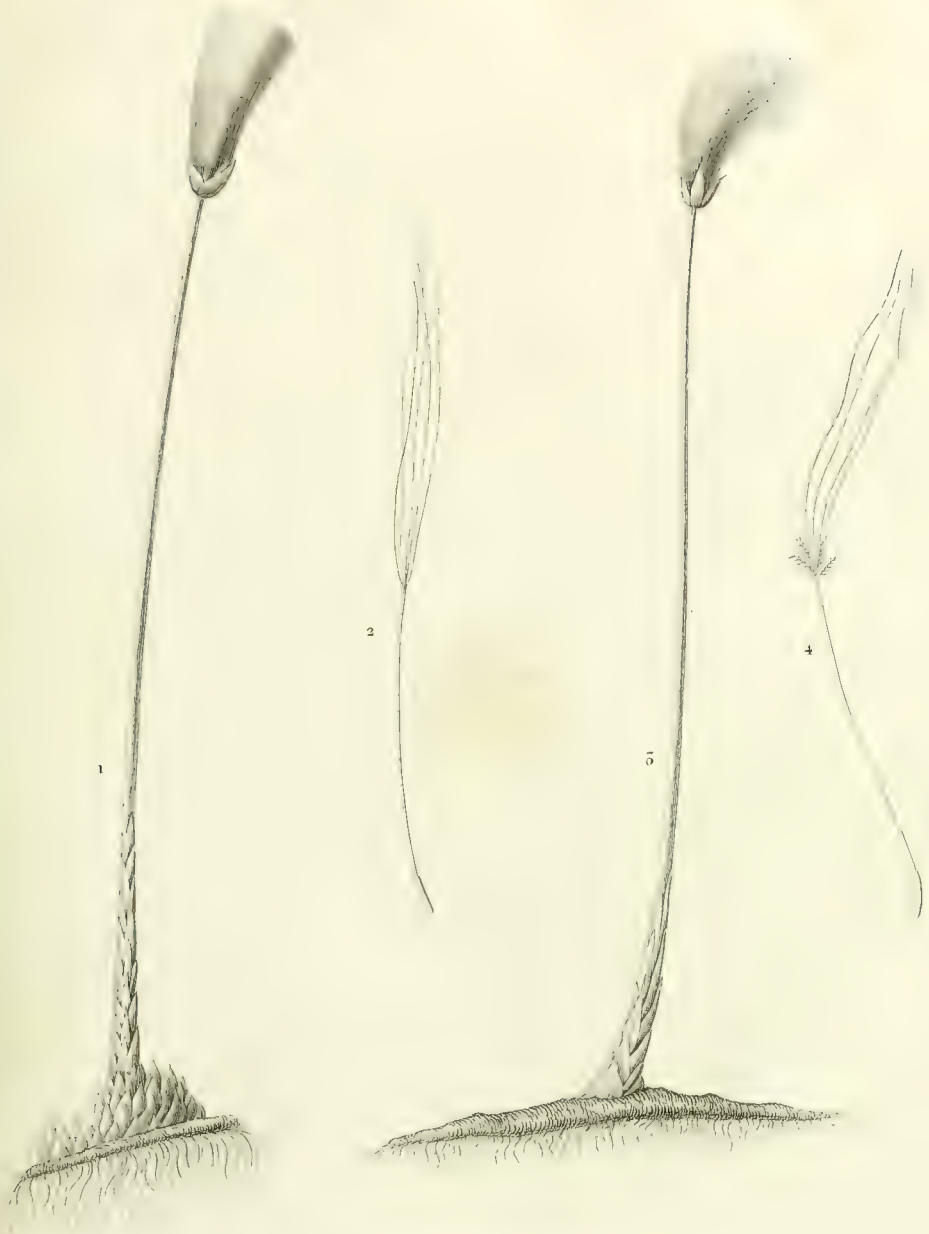
4. Rayon de l'ombelle de la plante précédente.

Cyperus Syracusæ Parl.

C. Rosher a Florence

N. Reimond imp.

Mlle E. Taillant sculpsit.



Cyperus Papyrus Part.

C. Koster a Florence N. Reimond. imp. Mlle E. Taillant sculp.

MÉMOIRE

SUR

L'ÉTABLISSEMENT DES ARCHES DE PONT,

ENVISAGÉ AU POINT DE VUE DE LA PLUS GRANDE STABILITÉ;

PAR M. YVON VILLARCEAU.

PREMIÈRE PARTIE

(PRÉSENTÉE À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DANS SA SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1845).[1]

1. Les travaux des ingénieurs et des géomètres sur la théorie de l'équilibre des voûtes ont eu principalement pour objet, depuis Coulomb, l'examen de la stabilité des voûtes construites ou projetées. Malgré les savantes recherches auxquelles ils se sont livrés, les solutions proposées sont encore loin de satisfaire aux exigences de l'art de l'ingénieur : elles n'offrent à celui-ci que des moyens peu directs et assez incertains pour modifier les constructions à l'état de projet, dont elles ont fait connaître le défaut plus ou moins prononcé de stabilité; et le plus souvent ce n'est qu'après une suite de tâtonnements qu'on parvient à satisfaire aux conditions d'équilibre indiquées par les méthodes en usage.

Les solutions dont nous parlons seraient donc principalement

[1] Pour le Rapport, voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXIII, séance du 9 novembre 1846.

utiles dans le cas où les éléments de la construction auraient été fixés d'une manière irrévocable; elles serviraient à faire connaître si le projet doit être admis ou rejeté. Mais aussitôt que l'on consent à apporter quelques modifications dans la courbure, soit de l'intrados, soit de l'extrados, ou dans les épaisseurs des voussoirs, on peut envisager la question sous un autre point de vue, et se proposer de déterminer complétement la forme de la voûte, de telle sorte qu'il en résulte une construction jouissant de la plus grande stabilité possible, et assujettie d'ailleurs à des conditions particulières qui sont relatives aux dimensions de l'arche en largeur et hauteur, à la charge qui doit s'élever au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados et à la résistance des matériaux employés. Le problème ainsi posé est celui qui se présente ordinairement dans la pratique.

Dans une série non encore terminée d'articles publiés dans la *Revue de l'Architecture et des Travaux publics* de M. César Daly, nous avons présenté la théorie de l'équilibre des voûtes en berceaux cylindriques sous le point de vue qui vient d'être indiqué. Parvenu à l'examen du cas particulier des ponts, la nécessité d'avoir égard à l'action du massif qui charge la voûte nous a présenté quelques difficultés. Nous n'avons pu lever ces difficultés qu'en assujettissant l'extrados à une discontinuité théorique, présentant, il est vrai, peu d'inconvénients dans la pratique, mais laissant à l'esprit une impression peu favorable. La solution que nous avons donnée dans la *Revue de l'Architecture* résulte d'une condition arbitraire, celle de l'égalité de pression par unité de surface dans tous les joints de la voûte : on peut conserver cette solution comme se rattachant à la classification que nous avons donnée des questions relatives à l'équilibre des voûtes. Mais rien n'oblige absolument à satisfaire en toute rigueur à la condition de l'uniformité des pressions dans les joints, et l'on peut maintenir la continuité de la surface extrados, sans qu'il en résulte une variation de pression trop considérable. Ajoutons que notre précédente solution n'est pas complète, analytiquement parlant : nous n'avons

effectué que l'une seule des deux intégrations qui doivent conduire à l'équation de la courbe intrados, de sorte que le résultat final dépend de tracés ou de quadratures. Abandonnant la condition qui avait eu pour conséquence la discontinuité de l'extrados, nous avons obtenu, depuis ce premier essai, une solution analytique complète, indépendamment de la solution graphique. Nous pensons que le mémoire actuel, qui renferme l'exposé de nos recherches, ne sera point indigne de fixer l'attention de l'Académie des sciences, et offrira d'utiles renseignements aux ingénieurs.

Nous nous bornons dans ce mémoire à l'examen du cas le plus important des arches de pont en berceaux terminés par des plans de tête perpendiculaires à l'axe, celui d'une arche chargée d'un massif terminé supérieurement par un plan horizontal.

Les équations finales que nous obtenons ne peuvent être résolues directement. En laissant de côté le moyen que présenterait la construction de tables spéciales pour tirer à vue la valeur des inconnues, nous sommes obligé d'avoir recours aux méthodes de tâtonnements, telles que celles des fausses positions ou des courbes d'erreurs; mais les tâtonnements se distinguent ici de ceux que nous avons signalés plus haut, en ce que, soit qu'on les effectue graphiquement ou numériquement, ils correspondent à des constructions stables, ce qui n'a pas lieu dans l'autre cas. Cette circonstance permet même de réduire le nombre des essais, attendu que si l'un d'eux ne s'éloigne pas trop de satisfaire aux données de la question, on peut adopter l'hypothèse sur laquelle il est basé, et modifier l'une des données, la demi-ouverture, qui n'est jamais déterminée avec une rigoureuse précision, en l'altérant de quelques centimètres, de manière que les équations de condition soient satisfaites.

La solution que nous proposons conduit à des formes de l'intrados différentes des formes généralement usitées, mais dont le tracé peut néanmoins s'effectuer par les procédés qu'on emploie lorsqu'il s'agit d'anses de panier. En cela nous nous conformons aux habitudes des ingénieurs : seulement, il arrive à ceux-ci de

déterminer les rayons de courbure de manière à donner à l'intrados une forme qui diffère le moins possible de celle d'une demi-ellipse, ou de n'employer qu'un seul arc de cercle, sans qu'aucune raison les porte à préférer ces courbes à d'autres, sinon la simplicité de leur construction; tandis que, d'après notre théorie, les rayons de courbure varient suivant une loi différente de celle qui a lieu dans l'ellipse, et dans le cercle où les rayons de courbure sont constants.

Le tracé de l'intrados, au moyen de ses rayons de courbure que nous pouvons construire géométriquement, nous offre une solution du problème. L'exactitude de cette solution ne dépend que de celle du tracé, et se trouve suffisante dans la plupart des cas.

2. Nous avons cru devoir faire précéder l'exposé de notre théorie d'une discussion sur l'indétermination du problème des voûtes en berceau, indétermination qui ne peut être levée qu'en ayant égard à la compressibilité de la matière des voussoirs; mais la théorie de la déformation des corps solides d'une structure analogue à celle des pierres à bâtir nous a paru trop peu avancée pour tenter utilement d'en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. Nous avons donc dû diriger nos recherches d'un autre côté, en nous proposant d'obtenir des résultats indépendants, autant que possible, de la compressibilité des matériaux. Nous croyons avoir atteint notre but en substituant à la voûte en berceau une construction purement idéale, dont on peut soumettre toutes les circonstances au calcul, sans craindre d'y rencontrer l'indétermination dont nous venons de parler, et telle, néanmoins, qu'en la comparant à la voûte proposée, on puisse affirmer évidemment que si la première est en équilibre, il en sera de même *a fortiori* de la seconde. Les conditions que l'on fixe en envisageant le problème de cette manière sont confirmées *a posteriori* par une discussion relative aux effets produits par les surcharges accidentelles.

La considération des différents modes d'action des matériaux

qui composent le massif, sur les voussoirs, met en évidence une autre indétermination qui se présente à un haut degré près des plans de tête, dans les arches dont les parements extérieurs sont extradossés *en gradins*. Pour éviter la difficulté que présente cette nouvelle indétermination, nous sommes obligé de substituer à l'arrangement plus ou moins fortuit des matériaux du massif, une autre disposition idéale présentant quelque analogie avec les constructions usitées, et qui jouit de la propriété de donner lieu à des pressions normales à l'extrados et déterminées. L'action des matériaux du massif sur les reins de la voûte provenant de cette disposition idéale est la même que si la voûte était chargée d'un fluide ayant la densité et la forme du massif. Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous adoptons, d'accord en cela avec de savants ingénieurs.

L'application des équations de l'équilibre au système idéal dont nous nous occupons ne peut se faire sans restrictions : on sait que ces équations ne sont satisfaites que lorsque les corps, après avoir été comprimés ou distendus, sont parvenus à un état permanent, sous l'influence des forces extérieures. Les résultats que nous déduisons de ces équations sont donc uniquement relatifs à l'état normal de la voûte après le décintrement, et la question de *l'inflexion* reste entière : on observera toutefois que nous fournissons les moyens de l'aborder, en déterminant la forme finale de la voûte. Quoique nous ne traitions point cette question *in extenso*, nous indiquons cependant les causes qui peuvent produire l'*inflexion*, et les moyens d'en éviter les principales. Nous sommes porté à croire que si les pieds-droits sont inébranlables et les joints de la voûte très-fins, une construction réalisée suivant nos principes ne donnera lieu qu'à une diminution de flèche si petite, qu'on pourra presque ne pas s'en préoccuper.

Sous les restrictions qui précèdent, nous avons mis le problème en équation, et ramené les principales difficultés analytiques à l'in-

tégration de l'équation différentielle de la courbe intrados. Cette équation contient un radical recouvrant un polynôme du quatrième degré; et son intégration, qui dépend des fonctions elliptiques, exige, comme on le sait, la décomposition du polynôme en ses facteurs du premier degré, ou la résolution d'une équation du quatrième. L'expression algébrique des racines est ici nécessaire pour conserver à la question toute sa généralité; nous avons pu l'obtenir par la réduction de ces racines en séries ordonnées suivant les puissances des épaisseurs, en bornant là, comme dans tous nos calculs, l'approximation aux termes du second ordre, ce qui suffit parfaitement. A l'aide de développements analogues, nous avons réussi à éviter l'emploi des fonctions elliptiques de troisième espèce, et obtenu une intégrale qui se simplifie notablement dans le cas assez ordinaire où la voûte et le massif peuvent être considérés comme ayant la même densité. La faible charge des voûtes de pont au-dessus de la clef rend le module peu différent de l'unité, de sorte que l'on peut suppléer aisément aux tables de fonctions elliptiques. Enfin, nous présentons deux vérifications analytiques qui, jointes à des confirmations d'une autre nature, ne nous permettent pas d'avoir le moindre doute sur l'exactitude de nos développements.

Nous limitons l'usage de l'équation de courbe intrados à la détermination de l'inconnue principale, regardant le calcul des différences finies comme plus praticable lorsqu'il s'agit de calculer une suite de coordonnées de divers points d'une courbe : la méthode que nous indiquons à ce sujet fait tout dépendre de l'expression du rayon de courbure, et nous affranchit du besoin de recourir aux fonctions elliptiques pour effectuer ces calculs.

Les constantes introduites par l'intégration sont au nombre de trois. Ce sont : 1° la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef; 2° l'épaisseur à la clef; 3° une ligne égale à la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le voussoir de clef. En supposant donnée la première de ces constantes,

l'une des deux autres reste arbitraire dans les arches du genre de celles en *arc de cercle,* où la direction du joint des naissances n'est point fixée. Si l'on prend pour la troisième constante une valeur indiquée par la résistance des matériaux, l'épaisseur à la clef en résulte. Dans les arches en *anse de panier,* où le joint inférieur est sensiblement horizontal, les deux dernières constantes sont nécessairement déterminées; mais il peut se faire que leurs valeurs données par le calcul répondent à des pressions auxquelles les voussoirs soient incapables de résister, ou tellement faibles, qu'il en résulterait un emploi peu économique des matériaux : il devient alors nécessaire de modifier les données dans un sens que nous indiquons suivant le cas. Il est d'ailleurs convenable de se ménager la possibilité de faire varier les données dans de certaines limites, afin de pouvoir, au besoin, tenir compte de l'effet des surcharges accidentelles.

L'épaisseur à la clef est l'inconnue à la détermination de laquelle se ramène la solution du problème des arches de pont, et, en l'absence de tables, on n'en peut obtenir la valeur que par des approximations successives. Nous donnons, dans chaque cas, des valeurs approchées qui diffèrent assez peu des valeurs exactes de l'inconnue dont il s'agit, pour servir utilement de point de départ dans les calculs d'approximations successives.

L'importante question de la poussée contre les culées, dont la solution sert de base aux calculs relatifs à l'établissement de ces dernières, est résolue au moyen de nos formules, dès que la détermination de l'épaisseur à la clef est effectuée.

Nous terminons la première partie de notre mémoire en présentant le résultat de comparaisons entre des arches établies suivant nos principes et des arches en *arc de cercle* ayant même épaisseur aux naissances. Ces dernières offrent moins de convexité vers les reins; et la différence des deux intrados paraît assez petite pour qu'on soit tenté d'adopter l'arc de cercle, à cause de la facilité qu'il offre dans la construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence : en effet, nous

faisons voir, dans le cas de l'*arc de cercle*, qu'à l'endroit où celui-ci s'écarte le plus de l'intrados construit suivant notre théorie, la résultante des pressions dans les joints peut se rapprocher de l'extrados, jusqu'à n'en être plus distante que d'une quantité égale au tiers de l'épaisseur des voussoirs : cela donne lieu, vers l'extrados, à des pressions par unité de surface, doubles de celles qui ont lieu dans l'autre arche, tandis que la pression vers l'intrados décroît jusqu'à devenir nulle. Il est facile d'en conclure que les voussoirs devront, dans ce cas, présenter une résistance double de celle qu'exigerait l'application de notre théorie. Les intrados des arches *en anse de panier* diffèrent aussi de nos courbes par une moindre convexité vers les reins, et donnent lieu à des remarques analogues aux précédentes.

La convexité vers les reins dans les arches de pont présente des avantages dont il est bon de profiter : car, outre la plus grande facilité qui en résulte pour l'écoulement des eaux, elle offre un aspect agréable et un caractère de hardiesse que l'on aime à rencontrer dans les constructions de ce genre.

INDÉTERMINATION DU PROBLÈME DE L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES EN BERCEAU.

3. On est dans l'habitude, lorsqu'il s'agit d'appliquer les principes de la statique, de considérer les corps comme absolument durs et incompressibles, et il est exact de dire, comme l'a fait remarquer M. Poncelet, que lorsque les corps compressibles ou extensibles sont parvenus à un état permanent, sous l'influence de forces extérieures, l'action de ces forces est la même que si ces corps étaient vraiment invariables de forme. Nous raisonnerons dans cette hypothèse, afin de n'employer que les principes les plus simples de la statique.

Considérons donc une portion de voûte comprise entre deux plans de joint quelconques, et supposons connue l'action, sur cette voûte, de la portion du massif de maçonnerie qui agit sur elle, ainsi que le poids même de cette portion de voûte; nous dési-

gnerons par R la résultante de ces deux forces, qui en général ne se réduiront point à un couple. Les autres forces extérieures qui sollicitent la voûte sont les pressions ou réactions qui s'exercent sur chacun des plans de joint extrêmes; soient T et T′ les résultantes de ces forces. La voûte étant en berceau, et les plans de tête perpendiculaires à l'axe, l'action des forces reste la même dans deux tranches d'égale épaisseur, déterminées par des sections parallèles aux plans de tête; nous pouvons dès lors considérer l'équilibre d'une tranche infiniment petite, ou simplement appliquer le principe relatif à l'équilibre d'un corps sollicité par trois forces situées dans un même plan, principe qui consiste en ce que la résultante de deux des forces est égale et opposée à la troisième. Prenons donc un point quelconque r, sur la direction de R; puis, par ce point, menons deux droites qui rencontrent les surfaces des joints extrêmes en deux points t et t', et décomposons R suivant ces directions : les composantes de R pourront théoriquement être regardées comme égales et opposées aux réactions inconnues T et T′, d'après le principe énoncé. Si l'on réduit, en effet, les surfaces de contact aux seuls points t et t', et que l'on ait égard à l'hypothèse relative à la dureté parfaite, en supposant d'ailleurs les points t et t' susceptibles de réagir dans tous les sens, les réactions T et T′ deviendront effectivement égales et opposées aux composantes de R obtenues ci-dessus.

En réalité, pour que les forces égales et opposées à ces composantes puissent être regardées comme donnant l'expression des réactions T et T′, il faudra, 1° que leur point de concours r, situé sur R, soit tellement choisi qu'elles ne deviennent point des forces de traction, à moins qu'on ne veuille avoir égard à l'adhésion des mortiers (le maximum de leur intensité dépendrait alors de cette adhésion); 2° les directions des composantes devront faire, avec les normales aux surfaces de joint, des angles inférieurs à l'angle du frottement, et dans le cas où l'on aurait égard à la cohésion des mortiers, ces angles devront rester plus petits que le plus grand des deux angles de frottement et de cohésion; 3° enfin, les points

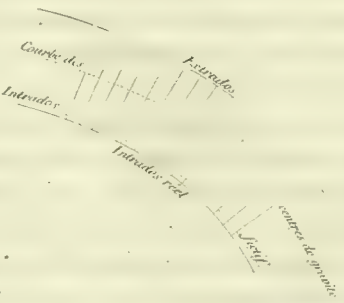
t et t' ne devront point être assez voisins de l'intrados ou de l'extrados, eu égard à l'intensité de T et T′, pour que les voussoirs se brisent vers ces parties. Les intensités T et T′ se trouveront limitées par la considération de l'étendue hypothétique des surfaces de contact et de la position des points t et t'; il faudra que T et T′ rentrent dans les limites qui en résulteront.

Malgré ces restrictions, qui limitent l'étendue dans laquelle les points r, t et t' peuvent être pris arbitrairement sur la direction de R et les surfaces extrêmes, le problème qui consiste à déterminer T et T′ reste susceptible d'une infinité de solutions. (On a coutume de limiter encore les solutions en partageant la voûte en deux parties symétriques au moyen d'un plan vertical mené par l'axe et le sommet; et par motif de symétrie on admet que la réaction T qui a lieu au sommet est horizontale.) Toutefois, quel que soit le système de valeurs que l'on admette pour T et T′, ces valeurs une fois fixées, les résultantes des réactions dans tous les plans de joints compris entre les extrêmes se trouvent déterminées; on les construit graphiquement avec la plus grande facilité. En effet, considérant le premier voussoir à partir du sommet, on compose l'action de la charge qui le sollicite, avec son propre poids, puis la réaction T qui a lieu au sommet de la voûte, avec la résultante des premières forces; la résultante des trois forces est égale et opposée à la réaction du deuxième voussoir sur le premier, et par conséquent égale à la réaction du premier sur le deuxième, et de même sens que cette réaction résultante. On obtient ainsi de proche en proche toutes les réactions intermédiaires, et la dernière, obtenue par le même procédé, doit, si l'on opère bien, coïncider avec celle T′ faisant partie du système de valeurs T et T′ d'où l'on est parti. Les réactions intermédiaires sont assujetties, quant à leurs intensités, directions et points d'application, aux mêmes conditions que ci-dessus, pour que l'équilibre puisse avoir lieu; et ce n'est que lorsqu'on a trouvé un système de valeurs de T et T′ tel que toutes les autres réactions qui en résultent satisfassent à ces conditions, que l'on est

fondé à regarder l'équilibre de la voûte comme pouvant être stable. Ordinairement, quand on a trouvé une solution, il est rare qu'on n'en trouve pas une infinité d'autres comprises entre des limites plus ou moins resserrées, mais il est impossible de prévoir laquelle de ces solutions se réalisera, ou même si l'équilibre aura lieu, sans introduire dans le calcul la considération de la compressibilité de la matière des voussoirs. Or, avons-nous dit, la théorie de la déformation des corps solides tels que les pierres à bâtir, est trop peu avancée pour que l'on puisse en faire la base d'une théorie de l'équilibre des voûtes. C'est ce qui nous a mis dans la nécessité de substituer à une voûte proposée la construction idéale dont il a été question au n° 2, et qui va être décrite dans un instant. Rappelons cependant que le mode d'action sur les voussoirs, du massif qui charge la voûte, doit offrir un nouveau genre d'indétermination dont nous aurons à nous débarrasser en procédant d'une manière analogue; mais pour ne point compliquer inutilement les discussions, nous supposerons d'abord que l'action de la charge s'exerce normalement à l'extrados des voussoirs, sauf à ramener ensuite à ce cas celui dont nous nous occupons actuellement.

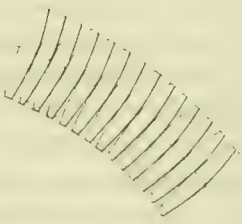
ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UNE VOÛTE EN BERCEAU SOUMISE À L'ACTION DE FORCES AGISSANT NORMALEMENT À L'EXTRADOS.

4. Considérons une portion de voûte comprise, d'une part, entre deux plans parallèles aux plans des têtes, et distants d'une quantité quelconque λ, qu'on pourra, si l'on veut, supposer égale à l'unité linéaire ou même infiniment petite, et, d'autre part, terminée par deux plans perpendiculaires à l'extrados.



Supposons la voûte divisée en voussoirs infiniment petits, par des plans de joint normaux à l'extrados. De cette division résultera la possibilité d'assigner la position du centre de gravité de chaque voussoir élémentaire : nous nommerons *courbe des centres de gravité* la courbe passant par tous ces centres.

Prenons sur chacune des normales un point voisin de l'intrados situé à une distance du centre de gravité correspondant, égale à celle qui sépare l'extrados de ce même centre; nous obtiendrons une nouvelle courbe que nous appellerons, pour abréger, *intrados fictif*.



Imaginons maintenant que, sans altérer en rien le poids des voussoirs élémentaires, la position de leur centre de gravité et l'action des forces normales à l'extrados, on les déforme de manière à réduire la surface de contact de deux voussoirs voisins, à l'étendue de l'élément superficiel correspondant aux arêtes ou génératrices qui ont leurs pieds sur la *courbe des centres de gravité*. Faisons, de plus, abstraction des frottements des voussoirs et de la résistance qu'oppose l'adhésion des mortiers à leur glissement les uns sur les autres.

Il est évident que si l'équilibre peut exister dans un système établi suivant ces hypothèses, il existera *a fortiori* dans un système où des séries de voussoirs infiniment petits seront changées en voussoirs de dimensions finies, et lorsqu'on remplacera le contact de deux arêtes par celui des surfaces de joint comprises entre l'extrados et l'intrados fictif, c'est-à-dire lorsque la presque totalité de la surface de chaque joint sera rétablie, de manière à donner lieu aux frottements, et à pouvoir mettre en jeu l'adhésion des mortiers, suivant le besoin; le rôle de ces forces étant de s'opposer au glissement quand il tend à se produire. Nous dirons plus; c'est que ces dernières forces ne se développeront pas, tant du moins

que la voûte restera soumise aux seules forces qu'on aura fait entrer dans les équations de son équilibre : en effet, puisque l'équilibre est supposé devoir exister sans l'intervention des frottements et adhésions, il n'y aura aucune tendance au mouvement dans un sens déterminé pour quelque voussoir que ce soit, et comme le frottement ne prend naissance que par suite de cette tendance, il est clair qu'il ne se produira aucun frottement; il en sera de même des effets de l'adhésion des mortiers. Ces forces ne se développant point dans notre voûte à son état normal, il est inutile, comme on le voit d'ailleurs assez clairement, de les faire entrer dans les équations de son équilibre.

Pour compléter la transformation de la construction idéale en la construction réelle proposée, il eût fallu rétablir le contact des voussoirs dans toute l'étendue comprise entre l'extrados et l'intrados, tandis que nous l'avons étendu seulement à l'espace compris entre la première de ces courbes et l'intrados fictif, comme cela aurait lieu si l'on pratiquait dans les joints un refouillement d'une profondeur égale à la très-petite distance qui sépare l'intrados fictif de l'intrados réel, distance qui n'atteindra jamais qu'un petit nombre de centimètres. Nous allons donner la raison de la nécessité qu'il en soit ainsi, du moins théoriquement. Dans la construction idéale, la résultante des pressions dans les joints passe par l'arête de contact située sur la *courbe des centres de gravité,* ou bien par le milieu du joint limité, comme nous venons de le dire dans la construction réelle; et l'on peut admettre qu'après le rétablissement du contact des surfaces planes de joint, la pression se distribuera uniformément sur ces surfaces, de même qu'on admet en pratique que les pressions se distribuent uniformément sur les surfaces quand les résultantes passent par leurs *centres de gravité.* C'est sur cette hypothèse que l'on s'appuie pour déduire des expériences connues les coefficients de résistance à l'écrasement. On sera d'autant mieux fondé à admettre l'égalité de la répartition des pressions, qu'on pourra la faciliter par l'introduction dans les joints d'une mince couche de ciment très-fin.

Si nous avions étendu la surface de joint jusqu'à l'intrados réel, la compressibilité de la matière des voussoirs eût pu avoir pour effet de déplacer la résultante des pressions, en tendant à la ramener vers le milieu du nouveau joint, et nous eussions eu à considérer le lieu géométrique de son point d'application aux divers voussoirs; l'introduction des coordonnées de cette courbe dans les équations du problème les compliquerait beaucoup plus que ne le fera la considération de l'intrados fictif qui, dans tous les calculs, exclura l'intrados réel. Pour nous, moyennant les conventions précédentes, les courbes *des centres de gravité* et des *résultantes des pressions* se confondront en une seule et même courbe. Quant à la condition relative au refouillement des joints, pour que ces courbes se confondent théoriquement, on pourra juger, d'après le faible intervalle qui sépare les intrados réel et fictif, du peu d'importance qu'il y aurait à s'y conformer pratiquement, dans le plus grand nombre des cas. Si l'on s'abstient d'effectuer ce refouillement, il n'en pourra résulter qu'une faible variation de la pression par unité de surface dans l'étendue de chaque joint.

Enfin, disons que la résultante des pressions étant assujettie à passer par les centres de gravité, c'est-à-dire très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et à être normale aux plans de joint, la voûte acquerra par cela même un grand degré de stabilité. En effet, quand la voûte sera soumise accidentellement à des charges auxquelles on n'aura point eu égard en fixant les conditions de son établissement, l'action de celles-ci sera, tant que l'équilibre pourra subsister, de déplacer le point d'application et la direction de la résultante des pressions en faisant varier l'intensité de cette dernière. Or, pour que le point d'application de la résultante puisse se déplacer dans un sens ou dans l'autre, sans trop se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados, il est évident qu'il doit coïncider avec le point milieu de l'épaisseur lorsque les surcharges dont il s'agit n'ont pas lieu, c'est-à-dire lorsque la voûte est soumise à l'action des seules forces qu'on a fait entrer dans le calcul qui a servi de base à sa construction. D'un autre côté, la direction

de la résultante des pressions devant pouvoir s'écarter de celle qui répond à l'absence des surcharges accidentelles, sans cependant faire avec la normale aux plans de joint un angle qui atteigne le plus grand des deux angles du frottement et de la cohésion, il est également évident que la résultante des pressions doit être normale aux plans de joint dans l'état ordinaire de la voûte. Or l'équation (*d*) du numéro suivant exprime précisément la même condition à laquelle il nous sera facile de satisfaire. Il résulte de ces considérations que le système dont nous nous occupons jouira d'une très-grande stabilité, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut. Nous aurions presque pu nous dispenser de les présenter ici, tant elles sont évidentes : nous ferons seulement observer qu'en nous fondant sur ces considérations, il nous eût été facile d'éviter la substitution d'un système idéal à la réalité; mais il nous a semblé bon de présenter nos idées dans l'ordre où elles se sont produites.

Quant à la stabilité au point de vue de l'effet de surcharges accidentelles considérables; pour la constater sûrement, il resterait à s'assurer que, sous l'influence de ces surcharges, la résultante des pressions ne peut nulle part se rapprocher de l'intrados ou de l'extrados d'une quantité inférieure au tiers de l'épaisseur des voussoirs; que la pression maximum par unité de surface n'excédera pas la charge que peuvent supporter les matériaux sans inconvénient; enfin, que la direction de la résultante ne s'écartera de la normale aux plans de joint, que de quantités inférieures aux angles de frottement et de cohésion.

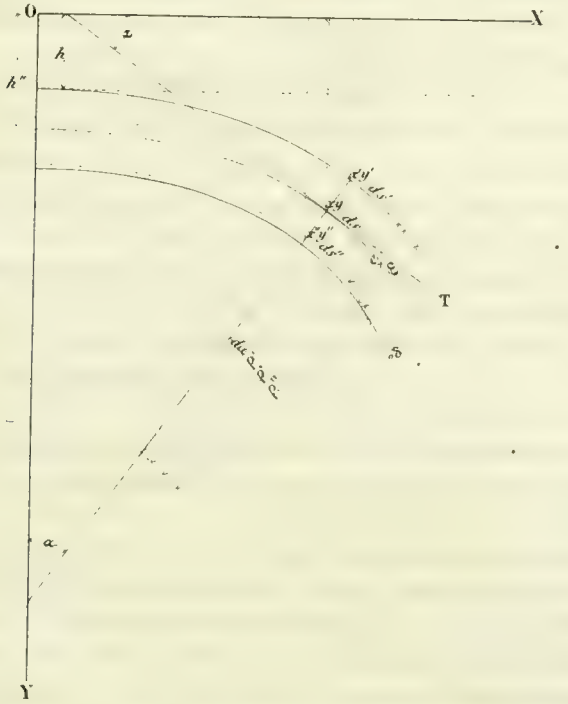
5. Ceci posé, avant de former les équations de l'équilibre du système idéal décrit ci-dessus, nous devons rappeler ce que nous avons dit, n° 3, relativement à l'application aux corps compressibles, des équations d'équilibre établies pour des corps de forme invariable, et faire remarquer que les conséquences auxquelles nous pourrons être conduit, s'appliqueront seulement à la voûte parvenue à son état permanent. Si nous déterminons la forme que doit conserver la voûte dans cet état, nous ne serons pas dispensé

pour cela de rechercher la forme qu'on doit lui donner pendant qu'elle repose sur ses cintres, forme qui soit telle, qu'après le décintrement elle se change en celle qui répond à l'état permanent. En un mot, la question de *l'inflexion de la voûte* restera tout entière; mais nous aurons fourni le moyen de l'aborder en déterminant une donnée indispensable de la question, la forme finale de la voûte : n'ayant point l'intention de la traiter ici, nous nous contenterons d'indiquer les causes qui peuvent contribuer à produire *l'inflexion* et les moyens d'éviter les principales.

Une des causes de l'inflexion des voûtes est dans la diminution de longueur de l'arc de la voûte, mesuré dans le sens de l'extrados ou dans celui de l'intrados, d'où résulte une diminution de la flèche ou un surbaissement : cette diminution de longueur de la voûte provient de la compression qu'éprouvent ses parties, et souvent de celle du mortier dans les joints; il importerait donc de diminuer l'épaisseur de ceux-ci, et d'employer, pour les remplir, des mortiers ou ciments qui se solidifient promptement ou avant que les effets de la compression puissent devenir sensibles. Disons que les constructeurs habiles se sont rendu compte de ces effets, et qu'ils emploient, pour les prévenir, les moyens dont il est question ici. Mais une autre cause de l'inflexion ou du surbaissement, à laquelle on ne paraît pas avoir beaucoup fait attention, provient de l'habitude où l'on est d'opérer le décintrement avant d'avoir achevé le massif ou tout au moins chargé les reins: or les formes d'arches généralement adoptées ne s'éloignent pas beaucoup de celles que notre théorie assigne aux voûtes chargées; si donc ces formes conviennent à l'équilibre sous l'influence de la charge, elles ne conviennent plus en l'absence de cette charge, et la voûte, abandonnée à elle-même lors du décintrement, doit se déformer en se surbaissant, ce qui arrive effectivement. On éviterait la plus grande partie de cet effet, en n'opérant le décintrement qu'après la construction entière du massif. Il pourrait bien se produire encore une inflexion, mais elle serait générale, et la déformation beaucoup moindre que dans le cas

contraire, où la clef s'abaisse, tandis que les reins se relèvent; le surbaissement final se trouverait donc considérablement diminué, il ne proviendrait plus alors que du resserrement des joints et de la compression des voussoirs.

Maintenant, désignons par :



x', y' les coordonnées d'un point quelconque de l'extrados, rapportées à des axes OX et OY, l'un horizontal, l'autre vertical, et parallèles aux plans des têtes;

α l'angle de la tangente en ce point avec l'axe des x;

x, y les coordonnées du point de la *courbe des centres de gravité* situé sur la normale à l'extrados menée par le point (x', y');

x'', y'' les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la même normale;

ds', ds et ds'' les éléments de chacune des trois courbes précédentes, compris entre la normale à l'extrados et une autre normale menée par le point infiniment voisin, dont $x' + dx'$, $y' + dy'$ sont les coordonnées;

ε l'épaisseur de la voûte au point (x', y'), c'est-à-dire la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados réel;

e l'épaisseur fictive, ou la partie de la normale comprise entre l'extrados et l'intrados fictif;

δ la distance qui sépare le milieu de l'épaisseur réelle du voussoir de la position de son centre de gravité, de sorte qu'on ait la relation $\frac{1}{3}\varepsilon - \delta = \frac{1}{2}e$;

ρ', ρ et ρ'' les rayons de courbure des trois courbes en leurs points situés sur la même normale;

dP le poids du voussoir infiniment petit, compris entre les deux normales infiniment voisines;

ϖ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs;

N' la pression normale exercée sur l'extrados, par unité de surface, au point (x', y');

T la résultante des pressions exercées perpendiculairement au premier joint de la partie de voûte considérée, par les parties extérieures de la construction;

T_1 la résultante des pressions exercées perpendiculairement au dernier plan de joint, par la voûte elle-même, sur les parties de la construction avec lesquelles elle est en contact : à cause de la réaction égale et contraire à l'action, T_1 exprimera en même temps l'intensité de la réaction reçue par le dernier voussoir; le sens de cette réaction sera contraire à celui de T_1;

t et t_1 les pressions par unité de surface correspondantes à T et T_1;

μ la hauteur variable d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait, sur une base horizontale, la pression t par unité de surface, d'où $\varpi\mu = t$;

μ_1 la hauteur de la colonne correspondante à t_1, de sorte que l'on ait $\varpi\mu_1 = t_1$;

i le rapport de la densité des matériaux qui composent la charge de la voûte à celle des voussoirs, de sorte que le poids de l'unité de volume des premiers soit $i\varpi$.

Les forces extérieures à l'arc de voûte sont :

1° La pression résultante T qui agit en un point (x, y) de la *courbe des centres de gravité*, perpendiculairement à la normale à l'extrados ou parallèlement à la tangente à cette courbe, c'est-à-dire en faisant l'angle α avec l'axe de x; ses composantes suivant X et Y, sont respectivement $T\cos\alpha$, et $T\sin\alpha$.

2° La pression T_1 agissant à l'autre extrémité de l'arc de voûte en un point (x_1, y_1) de la courbe des centres de gravité, suivant une direction opposée à celle de la tangente à l'extrados, ou faisant avec l'axe des x l'angle $180° + \alpha_1$; de telle sorte que ses composantes suivant X et Y, sont $-T_1\cos\alpha_1$ et $-T_1\sin\alpha_1$.

3° Les divers poids dP des voussoirs, dont les points d'application appartiennent à la courbe des centres de gravité : leurs composantes suivant X et Y, sont zéro et dP.

4° La pression exercée normalement sur chacun des voussoirs élémentaires avec l'intensité N′ par unité de surface. Or, la profondeur de la voûte parallèlement à l'axe étant λ, la surface élémentaire de l'extrados est $\lambda ds'$, d'où résulte $N'\lambda ds'$ pour la valeur de l'action exercée sur un voussoir élémentaire. On la supposera dirigée vers le centre de courbure. (S'il en était autrement, comme cela pourrait avoir lieu, dans le cas d'arches complétement submergées ou destinées à recouvrir des conduites souterraines, le signe de N′ se trouverait changé.) Les coordonnées des points d'application de cette force sont celles x' et y' de l'extrados. On obtiendra ses composantes, en observant que la normale fait avec l'axe des x, l'angle $90° + \alpha$, et avec l'axe des y l'angle α, dont les cosinus sont respectivement $-\sin\alpha$ et $+\cos\alpha$; les composantes de cette force sont donc :

$$\text{suivant X, } -N'\lambda ds'\sin\alpha = -N'\lambda dy';$$

$$\text{suivant Y, } +N'\lambda ds'\cos\alpha = +N'\lambda dx'.$$

Si nous appliquons maintenant à la portion d'arc de voûte les six équations d'équilibre d'un corps solide qui doivent également être satisfaites dans le cas d'un système de corps solides, nous remarquerons que toutes les forces agissant dans des plans parallèles, la somme des projections de ces forces sur un axe perpendiculaire à ces plans est nécessairement nulle. L'une des équations dite *de translation* est ainsi naturellement satisfaite. Si, pour plus de simplicité, on suppose λ infiniment petit, ce qui réduit toutes les forces à être situées dans un même plan, celui des xy, les directions des forces coupant les deux axes ou bien leur étant parallèles, les moments de rotation autour de ces axes seront nécessairement nuls, et deux des équations dites *de rotation* seront également satisfaites : en sorte qu'il suffit d'écrire les équations qui expriment que les sommes des projections des forces sur les axes X et Y sont nulles, et celle exprimant que la somme des moments de ces forces autour d'un troisième axe perpendiculaire au plan des deux premiers, est également nulle.

Ces équations sont

$$\left.\begin{aligned}
&-\mathrm{T}_1\cos\alpha_1 + \mathrm{T}\cos\alpha - \int \mathrm{N}'\lambda\,dy' = 0,\\
&-\mathrm{T}_1\sin\alpha_1 + \mathrm{T}\sin\alpha + \int \mathrm{N}'\lambda\,dx' + \int d\mathrm{P} = 0,\\
&\left.\begin{aligned}
&-y_1\,\mathrm{T}_1\cos\alpha_1 + y\,\mathrm{T}\cos\alpha - \int \mathrm{N}'\lambda y'\,dy'\\
&+x_1\,\mathrm{T}_1\sin\alpha_1 - x\,\mathrm{T}\sin\alpha - \int \mathrm{N}'\lambda x'\,dx' - \int x\,d\mathrm{P}
\end{aligned}\right\} = 0.
\end{aligned}\right\} (a)$$

Nous passerons facilement aux équations relatives à l'équilibre d'un voussoir élémentaire en réduisant dans les équations (a) les différences $\alpha_1 - \alpha$, à la différentielle $d\alpha$, $x_1 - x$, et $y_1 - y$ à dx et dy; les intégrales contenues dans les mêmes équations se réduiront à un de leurs éléments, et les différences de deux termes composés de même en α, x, y, T, et α_1, x_1, y_1, T_1, se réduiront aux différentielles de ces termes. De cette manière, les équations différentielles du problème seront

$$\left.\begin{aligned} &-d.\mathrm{T}\cos\alpha - \mathrm{N}'\lambda dy' = 0,\\ &-d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{N}'\lambda dx' + d\mathrm{P} = 0; \end{aligned}\right\} (b)$$

$$-d.y\,\mathrm{T}\cos\alpha + d.x\,\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda(y'dy' + x'dx') - x\,d\mathrm{P} = 0. \quad (c)$$

Nous allons changer la forme des deux premiers termes de la dernière de ces équations, en effectuant comme il suit les différentiations indiquées :

$$d.y\,\mathrm{T}\cos\alpha = y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + \mathrm{T}\cos\alpha\,dy,$$
$$d.x\,\mathrm{T}\sin\alpha = x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha + \mathrm{T}\sin\alpha\,dx.$$

Au moyen de ces relations, et en observant que l'on a $\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}$, $\sin\alpha = \frac{dy'}{ds'}$, nous pourrons mettre l'équation (c) sous la forme

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}dy - \frac{dy'}{ds'}dx\right) - \mathrm{N}'\lambda(y'dy' + x'dx') - x\,d\mathrm{P} = 0.$$

Or nous pouvons simplifier cette équation au moyen des équations (b); multiplions la première de celles-ci par y et la deuxième par x, puis retranchons, il viendra

$$-y\,d.\mathrm{T}\cos\alpha + x\,d.\mathrm{T}\sin\alpha - \mathrm{N}'\lambda(y\,dy' + x\,dx') - x\,d\mathrm{P} = 0.$$

De cette équation et de la précédente on déduit

$$\mathrm{T}\left(\frac{dx'}{ds'}dy - \frac{dy'}{ds'}dx\right) + \mathrm{N}'\lambda[(y'-y)\,dy' + (x'-x)\,dx'] = 0;$$

mais comme les points (x, y) et (x', y') sont situés sur la même normale à l'extrados, les coordonnées x et y satisfont à l'équation de cette normale, qui peut se mettre sous la forme

$$(y'-y)\,dy' + (x'-x)\,dx' = 0,$$

et l'équation dont nous nous occupons se réduit à

$$\frac{dx'}{ds'}\,dy - \frac{dy'}{ds'}\,dx = 0, \qquad (d)$$

en supprimant le facteur T, qui ne peut être nul : on en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

Ainsi l'équation (c) indique que la tangente à la *courbe des centres de gravité* doit être parallèle à la tangente à l'extrados.

Exprimons analytiquement la condition fournie par l'équation (d) : pour cela nous observerons que les différences des coordonnées des points de l'extrados et de la *courbe des centres de gravité* situés sur la même normale, ne sont autre chose que les projections sur les directions de ces coordonnées, de la distance $\frac{1}{2}e$ qui sépare le centre de gravité de l'extrados; nous aurons donc les relations

$$x - x' = -\frac{1}{2}e\sin\alpha,$$

$$y - y' = +\frac{1}{2}e\cos\alpha;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = dx' - \frac{1}{2}e\cos\alpha\,d\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\,de,$$

$$dy = dy' - \frac{1}{2}e\sin\alpha\,d\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\,de.$$

Mettant ces valeurs de dx et dy dans l'équation (d), celle-ci devient

$$\frac{1}{2}e\left(\cos\alpha\frac{dy'}{ds'} - \sin\alpha\frac{dx'}{ds'}\right)d\alpha + \frac{1}{2}\left(\cos\alpha\frac{dx'}{ds'} + \sin\alpha\frac{dy'}{ds'}\right)de = 0.$$

Or le facteur de $d\alpha$ se réduit à zéro, et celui de de à $\frac{1}{2}$, à cause de $\frac{dy'}{ds'} = \sin\alpha$, et $\frac{dx'}{ds'} = \cos\alpha$; il en résulte

$$de = 0,$$

ou, en intégrant

$$e = \text{constante.}$$

Telle est la condition exprimée finalement par l'équation des moments[1]; nous en déduirons immédiatement une relation entre l'épaisseur variable ε et la quantité δ qui sépare le point milieu de l'épaisseur du voussoir de son centre de gravité; cette relation indiquée plus haut est

$$\frac{1}{2}\varepsilon - \delta = \frac{1}{2}e,$$

d'où

$$\varepsilon = e + 2\delta, \qquad (e)$$

équation qui fixera la valeur de ε quand celle de δ aura été déterminée, et dans laquelle il est bien entendu que e désigne désormais une constante.

Les équations du problème se trouvent actuellement réduites au système des équations (b) et (e). Toutefois, dans le but de simplifier l'intégration des premières, nous allons former avec celles-ci un système de deux nouvelles équations propres à les remplacer, et que nous emploierons par la suite avec les équations (b). Écrivons ces équations sous la forme

$$d.\mathrm{T}\cos\alpha = -\mathrm{N}'\lambda\sin\alpha\, ds'$$

$$d.\mathrm{T}\sin\alpha = +\mathrm{N}'\lambda\cos\alpha\, ds' + d\mathrm{P}.$$

[1] Il eût été facile d'établir *a priori* cette condition, en observant que les plans de joint sont normaux à l'extrados, et que la courbe des centres de gravité est perpendiculaire aux plans de joint, ce qui établit le parallélisme de cette courbe et de l'extrados, et entraîne comme condition la constance de la quantité $\frac{1}{2}e$. De cette manière, les quatre forces qui sollicitent le voussoir élémentaire passent par un même point, le centre de gravité, et l'équation des moments est naturellement satisfaite. L'on eût pu ainsi poser immédiatement les équations (b) sans passer par les équations (a). Mais il nous a paru convenable de suivre, autant que possible, une méthode uniforme.

Multiplions, d'une part, la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutons; puis, d'autre part, multiplions la première par $\sin\alpha$ et la deuxième par $\cos\alpha$, et retranchons : nous aurons

$$\cos\alpha\, d.\mathrm{T}\cos\alpha + \sin\alpha\, d.\mathrm{T}\sin\alpha = \sin\alpha\, d\mathrm{P},$$

$$\cos\alpha\, d.\mathrm{T}\sin\alpha - \sin\alpha\, d.\mathrm{T}\cos\alpha = \cos\alpha\, d\mathrm{P} + \mathrm{N}'\lambda ds';$$

la différentiation donne d'ailleurs

$$d.\mathrm{T}\cos\alpha = \cos\alpha\, d\mathrm{T} - \mathrm{T}\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$d.\mathrm{T}\sin\alpha = \sin\alpha\, d\mathrm{T} + \mathrm{T}\cos\alpha\, d\alpha.$$

Pour former avec ces valeurs celles des premiers membres des équations précédentes, il suffit de multiplier la première par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$, et d'ajouter; puis ensuite de multiplier la première par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et de retrancher; on obtient ainsi immédiatement

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{T} &= \sin\alpha\, d\mathrm{P}, \\ \mathrm{T}d\alpha &= \cos\alpha\, d\mathrm{P} + \mathrm{N}'\lambda ds'. \end{aligned}\right\} (f)$$

Telles sont les combinaisons que nous nous proposions d'obtenir. On pourrait former immédiatement ces équations en égalant à zéro les sommes des projections des forces qui sollicitent un voussoir, sur deux axes, l'un tangent à l'extrados, l'autre normal à cette courbe. Il faudrait seulement faire attention à ce que, si l'on prend pour l'un des axes la normale menée par l'une des extrémités de l'élément ds', la projection de T sur la partie de cet axe dirigée vers le centre de courbure est nulle, et la projection de la force $(\mathrm{T} + d\mathrm{T})$ sur la même partie s'obtient en multipliant par $\cos(90° + d\alpha)$ ou $-\sin d\alpha$; la composante a dès lors pour expression $-\mathrm{T}d\alpha$, en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs. Les autres composantes s'obtiendraient sans difficulté.

6. Nous allons maintenant nous occuper de déterminer la position des centres de gravité et le poids d'un voussoir élémentaire.

Considérons le voussoir compris entre deux plans normaux infiniment voisins, faisant entre eux l'angle $d\alpha$ des deux tangentes consécutives : décomposons la surface base du voussoir en tranches infiniment minces au moyen d'arcs de cercle de rayons variables r, décrits du centre de courbure; soit dr la largeur d'une de ces tranches, sa surface sera $rd\alpha\, dr$, et, si nous prenons les moments par rapport à une droite située dans le plan de la base, et passant par le centre de courbure, le moment élémentaire de la tranche aura pour expression $r^2 d\alpha\, dr$. En se rappelant que ρ' désigne le rayon de courbure de l'extrados, on aura, pour expression de la somme des moments élémentaires

$$d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r^2 dr = \frac{1}{3}\left[\rho'^3 - (\rho'-\varepsilon)^3\right] d\alpha,$$

ou en réduisant,

$$\varepsilon\rho'^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\varepsilon^2}{3\rho'^2}\right) d\alpha.$$

Soit d'une autre part dS la surface base du voussoir élémentaire, son expression est

$$dS = d\alpha \int_{\rho'-\varepsilon}^{\rho'} r dr = \frac{1}{2}\left[\rho'^2 - (\rho'-\varepsilon)^2\right] d\alpha = \varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right) d\alpha;$$

celle de la distance du centre de gravité au centre de courbure est d'ailleurs $\rho' - \left(\frac{1}{2}\varepsilon - \delta\right)$; il s'ensuit que le moment de la surface est

$$\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)\left(\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon + \delta\right)d\alpha.$$

Égalant maintenant la somme des moments au moment de la somme, on aura, en supprimant les facteurs communs,

$$1 - \frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{\delta}{\rho'}\right);$$

on en tirera ensuite, en développant, réduisant et résolvant, la valeur suivante,

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'}}\ (*).$$

(*) Pour ceux des lecteurs qui connaîtraient nos articles sur les voûtes insérés dans la *Revue de l'Architecture*, nous allons montrer que l'expression de δ donnée dans le premier article s'accorde exactement avec celle que nous venons de trouver, malgré la différence de forme que présentent les deux expressions.

La valeur de δ obtenue dans ce Recueil a été tirée de l'équation

$$(\rho' - \delta)^2 - \rho(\rho - \delta) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

qui donne

$$(\rho - \delta)(\rho - \delta - \rho) = -\frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

d'où

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho - \delta}.$$

Or la courbe des centres de gravité n'était point assujettie à être parallèle à l'extrados. Si nous joignons cette condition qui revient à

$$\rho' = \rho + \frac{1}{2}\varepsilon - \delta,$$

La quantité $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ étant toujours une petite fraction, on est en droit de développer le deuxième membre de l'équation précédente, suivant les puissances de cette quantité, ce qui donne

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\rho'} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2} + \text{etc.}\right);$$

mais, par la suite, nous nous contenterons d'avoir égard aux termes du premier et du deuxième ordre de petitesse, en regardant le rapport $\frac{\varepsilon}{\rho'}$ comme étant du premier, ce qui réduira la valeur de $\frac{\delta}{\rho'}$ à

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2}{\rho'^2}, \qquad (g)$$

et nous dirons que cette quantité est du deuxième ordre.

Quant au poids du voussoir, son expression sera

$$dP = \varpi\lambda dS = \varpi\lambda\varepsilon\rho'\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)d\alpha,$$

ou bien

$$dP = \varpi\lambda\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\rho'}\right)ds'.$$

Cette expression et la précédente (g) ont lieu indépendamment de toute condition tirée des équations de l'équilibre; nous allons

---

d'où

$$\rho - \delta = \rho' - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

l'expression précédente deviendra

$$\delta = \frac{\frac{1}{12}\varepsilon^2}{\rho' - \frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Or cette relation est identique avec celle que nous venons d'obtenir dans le mémoire actuel.

les combiner avec l'équation (*e*), de manière à en déduire de nouvelles valeurs qui satisfassent à cette équation. Substituons dans l'équation (*g*) la valeur (*c*) de ε bornée à son premier terme, puisque nous négligeons les termes d'ordre supérieur au deuxième; il viendra d'abord

$$\frac{\delta}{\rho'} = \frac{1}{12}\frac{e^2}{\rho'^2}; \qquad (h)$$

puis ensuite, mettant cette valeur dans l'équation (*e*), on aura

$$\varepsilon = e\left(1 + \frac{1}{6}\frac{e}{\rho'}\right). \qquad (i)$$

Pour former avec cette valeur celle de $d\mathrm{P}$, on peut remplacer par e l'ε qui entre dans la parenthèse du deuxième membre, car cette parenthèse étant multipliée par ε en dehors, il n'en résultera qu'une erreur du troisième ordre : on aura ainsi

$$d\mathrm{P} = \varpi\lambda e\left(1 + \frac{1}{6}\frac{e}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{e}{\rho'}\right) ds';$$

puis, en effectuant le produit des parenthèses, et y négligeant les termes du deuxième ordre, de manière à ne négliger finalement que ceux du troisième,

$$d\mathrm{P} = \varpi\lambda e\left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right) ds'. \qquad (j)$$

Maintenant, les valeurs de ε et de $\frac{d\mathrm{P}}{ds'}$ ne se trouvent dépendre que du rayon de courbure.

Il reste à substituer cette valeur de $d\mathrm{P}$ dans les équations (*b*) et (*f*); nous allons le faire, et en même temps y remplacer la résultante T par son expression $\lambda e\mu\varpi$, dans laquelle λe est l'étendue de la surface du joint, et μ la hauteur du prisme dont le poids produirait la pression T sur la surface λe, si elle était horizontale. Disons, en passant, que l'usage de la hauteur μ est ici le même que celui des hauteurs manométriques dans la mécanique

des fluides; il a, comme ces dernières, l'avantage de rendre plus saisissable pour l'esprit l'intensité des pressions, que tel ou tel nombre de kilogrammes par mètre carré : il sert, d'un autre côté, à mettre en évidence l'homogénéité des différents termes des équations, de telle sorte qu'il n'y entre plus que des lignes et des rapports numériques. Ces considérations nous ont décidé à remplacer partout les pressions par unité de surface, au moyen des hauteurs qui les représentent; les premières, que nous avons désignées par t, sont d'ailleurs liées à celles-ci par la relation

$$t = \varpi\mu. \qquad (k)$$

Nous écrirons donc

$$\mathrm{T} = \varpi\lambda e\mu, \quad d\mathrm{T} = \varpi\lambda e\, d\mu.$$

Ces valeurs et celle (j) de $d\mathrm{P}$ étant portées dans les équations (b) et (f), on aura, en divisant ensuite par $\varpi\lambda e$,

$$\left.\begin{aligned} d.\mu\cos\alpha &= -\frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,dy', \\ d.\mu\sin\alpha &= +\frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,dx' + \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds', \\ d\mu &= \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\sin\alpha\, ds', \\ \mu d\alpha &= \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)\cos\alpha\, ds' + \frac{\mathrm{N}'}{\varpi e}\,ds'. \end{aligned}\right\} (l)$$

Les deux premières de ces équations ne peuvent être intégrées sans que l'on se donne l'expression de la variable N′ en fonction de l'une des coordonnées; les deux dernières, au contraire, quoiqu'elles n'en soient que des combinaisons, conduisent facilement aux valeurs de μ et du rayon de courbure ρ', quel que soit N′. En effet, à cause de $\sin\alpha\, ds' = dy'$ et $\frac{ds'}{\rho'} = d\alpha$, on peut mettre la troisième équation (l) sous la forme

$$d\mu = dy' - \tfrac{1}{3}e\sin\alpha\, d\alpha;$$

or cette équation s'intègre immédiatement, et si l'on désigne par μ_0 et h les valeurs de μ et y' qui ont lieu pour $\alpha = 0$, on aura, en intégrant à partir de ces limites,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha). \qquad (m)$$

D'autre part, substituons la valeur de μ tirée de cette équation, dans la dernière équation (l) divisée par $d\alpha$, et observons que $\frac{ds'}{d\alpha} = \rho'$, nous aurons

$$\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - \cos\alpha) = \left(\rho' - \frac{1}{3} e\right) \cos\alpha + \frac{N'}{\varpi e} \rho';$$

tirant ensuite la valeur de ρ', il viendra

$$\rho' = e \frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3} e (1 - 2\cos\alpha)}{\frac{N'}{\varpi} + e\cos\alpha}. \qquad (n)$$

Les équations (m) et (n) sont équivalentes aux deux premières équations (l), et pour pouvoir faire usage des unes et des autres, il devient indispensable de préciser la valeur de N' en fonction des coordonnées; c'est ce que nous allons essayer de faire en examinant les diverses manières dont les charges que supporte la voûte peuvent agir sur les voussoirs.

INDÉTERMINATION DE L'ACTION DES CHARGES SUR LES REINS DES VOÛTES DANS LES ARCHES DE PONT.

7. Nous ne nous occuperons point dans ce mémoire des arches dans lesquelles les plans de joint s'étendent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados. Dans les autres cas, on distinguera l'action exercée sur la voûte par la construction en assises horizontales qui forme les parements extérieurs, et celle que produit la masse, plus ou moins irrégulièrement disposée, des matériaux qui remplissent l'espace intermédiaire.

La disposition irrégulière des matériaux d'un massif formé par un blocage de maçonnerie ou composé de parties semi-fluides,

tel qu'un massif de terre ou de béton, rend tout à fait impossible la détermination de leur action sur la voûte. Tout ce que l'on pourrait faire de mieux à cet égard serait de recourir au calcul des probabilités pour découvrir le mode d'action le plus probable de cette partie du massif.

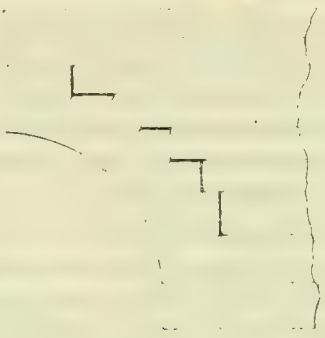
Nous allons voir que la disposition presque régulière de la construction par assises horizontales présente autant de difficultés.

La répartition de la charge sur les différents voussoirs dépend, dans ce cas, de la pose des assises horizontales dont les extrémités s'appuient sur les reins de la voûte, et des tassements qui se produisent pendant la construction et après le décintrement. Les effets qui se produisent pendant la pose, et le tassement, dépendent essentiellement du soin qu'apportent les ouvriers pendant la construction, et de la nature des matériaux employés : de là naît l'impossibilité de tenir compte, dans le calcul, de circonstances si variables et si difficiles à apprécier. C'est à cette variation que tient l'indétermination des actions exercées par les assises horizontales sur les voussoirs des plans de tête. Pour bien nous rendre compte des effets de la pose des assises horizontales, il nous suffira d'examiner les cas extrêmes qu'elle peut présenter.

Le plus souvent, dans les constructions de voûtes chargées, les voussoirs des plans de tête ne se terminent point vers l'extrados par une surface cylindrique ayant cette courbe pour directrice, mais bien par deux surfaces planes, l'une horizontale et passant par l'arête supérieure du voussoir, l'autre verticale et passant par l'arête inférieure située sur l'extrados. Au moyen de cette disposition *en gradins*, on met de niveau les faces horizontales des voussoirs avec celles des assises de maçonnerie qui forment les parements extérieurs de la voûte.

Nous examinerons diverses circonstances de la pose des assises, dans cette disposition par rapport aux voussoirs. Il est facile de voir que les faces verticales des assises peuvent être plus ou moins serrées, et même que la face verticale de contact d'une assise avec le voussoir peut ne supporter aucune pression, soit

pendant la pose, soit après que le tassement a été produit; cela dépendra principalement de la pose de l'assise considérée et de celle des assises voisines. Il pourra donc y avoir un plus ou moins grand nombre de voussoirs dont les têtes ne recevront des assises



adjacentes aucune pression horizontale; de même que pour d'autres voussoirs, ces pressions pourront aussi être plus ou moins considérables. D'un autre côté, la pression verticale qu'une pierre appartenant à une assise exercera sur la face horizontale de la tête du voussoir correspondant à l'assise inférieure, dépendra de plusieurs circonstances, telles que l'exécution plus ou moins parfaite des surfaces de joint, et la longueur de la partie de la pierre considérée engagée entre les assises supérieure et inférieure, du côté opposé à la tête du voussoir : on conçoit encore une exécution ou une pose assez imparfaites, pour que quelques-unes des faces horizontales de joint communes à l'assise et au voussoir inférieur ne supportent aucune pression; de même aussi, il pourra arriver que ces pressions soient très-grandes, comme dans le cas où la pierre dont il s'agit aurait une plus grande épaisseur vers la tête du voussoir que vers le côté opposé[1]. Il est permis encore de se

[1] Ayant bien saisi ces particularités, on s'expliquera aisément les ruptures que présentent parfois les voussoirs dans une direction perpendiculaire à celle des plans de joint, et vers le tiers ou la moitié de leur longueur à partir de l'intrados. Lorsque les résultantes des pressions sur les plans de joint des voussoirs passent

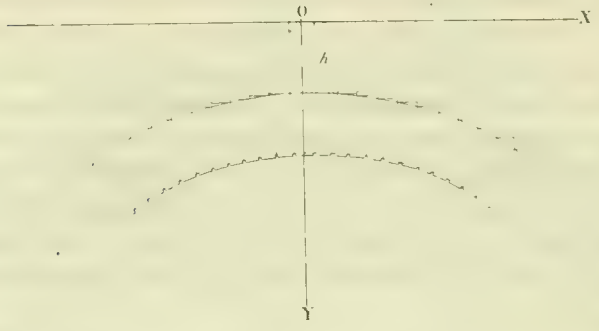
représenter un cas dans lequel les pressions horizontales et verticales transmises par les assises à la tête du voussoir seraient nulles en même temps : ce serait celui où le système des assises horizontales se tiendrait de lui-même en équilibre, comme dans les constructions égyptiennes; la voûte serait simplement touchée, sans être pressée par ces assises, et ne serait d'aucune utilité dans la construction, de telle sorte qu'on pourrait la supprimer, et qu'elle devrait se tenir en équilibre d'elle-même si l'on voulait la conserver.

De ce qui précède, il faut conclure qu'il est impossible d'assigner aucune valeur déterminée aux composantes horizontale et verticale de l'action exercée par les parties du massif sur chaque voussoir; il est donc également impossible de les soumettre à aucun calcul précis. Nous serons obligé, pour lever la difficulté qui résulte de cette indétermination, de procéder à l'égard du massif comme nous l'avons fait pour la voûte; nous lui substituerons une disposition idéale donnant lieu à des pressions normales déterminées : il y aura ensuite à examiner s'il est convenable de passer, sans modifier le jeu des forces, du système idéal dont il s'agit, à telle disposition des matériaux que l'on se proposera de réaliser.

près de l'intrados, les joints s'ouvrent vers l'extrados, d'une quantité plus ou moins appréciable à l'œil. Le voussoir est alors dans le cas d'un solide encastré vers l'une de ses extrémités, et sollicité à l'autre par une force non dirigée dans le sens de sa longueur. Cette force est ici la résultante des pressions horizontales et verticales exercées par les assises contiguës; il y a possibilité de rupture dès que cette résultante prend une direction oblique par rapport à la longueur du voussoir. La rupture tend à se produire le plus près possible de la section d'encastrement ou de la courbe de la résultante des pressions; et elle y est facilitée, non-seulement parce que le moment de la force qui produit la rupture va en croissant vers ce point, tandis que le moment des résistances à la rupture décroît avec la section du voussoir, mais encore parce que la pression totale exercée par les voussoirs adjacents se trouve concentrée dans le voisinage de cette section, et qu'il en résulte en ces points une désagrégation de la matière du voussoir, qui n'attend pour se manifester que le concours d'une nouvelle force. Ces considérations indiquent l'importance qu'il peut y avoir à assurer la direction normale de l'action de la charge sur les voussoirs.

DISPOSITION DE LA CHARGE EXTÉRIEURE D'UNE ARCHE, DONNANT LIEU À DES PRESSIONS NORMALES DÉTERMINÉES.

8. Dans le but d'abréger les descriptions, disons comment on pourra passer de la disposition *en gradins* dont il a été question dans le numéro précédent, à la disposition idéale que nous nous proposons d'étudier. Supposons d'abord, dans la première, la division de la voûte en voussoirs effectuée au moyen de plans normaux infiniment rapprochés : les deux faces de la tête de chaque



voussoir qui déterminent les gradins seront infiniment étroites; imaginons actuellement qu'on sépare le corps et la tête des voussoirs suivant la surface extrados, c'est-à-dire suivant la surface qui passe par les arêtes extérieures des plans de joint normaux; on aura isolé de chaque voussoir un prisme triangulaire ayant pour base un triangle rectangle de côtés infiniment petits, et dont l'hypoténuse répond à la face de contact de ce prisme et du voussoir. Substituons enfin aux assises horizontales de la disposition ci-dessus, une série de prismes verticaux ayant pour bases les faces horizontales des prismes triangulaires que nous venons de définir, et limités, dans le sens vertical, par un même plan horizontal dont le niveau ne soit pas inférieur à celui du point le plus

élevé de l'extrados. On obtiendra de cette manière une disposition dans laquelle chaque voussoir se trouve accompagné d'un prisme triangulaire et d'un prisme quadrangulaire, et telle que les actions exercées par le massif sur les voussoirs seront normales à l'extrados et déterminées.

En effet, dans le système que nous examinons, la force qu'un voussoir reçoit du massif est la pression normale exercée par la face du prisme triangulaire par laquelle il est en contact avec lui, en faisant toutefois abstraction du frottement; mais on pourrait dire que cette force ne se développe pas, si l'on admettait que la face hypoténuse et la face verticale du prisme triangulaire fussent en contact parfait au moment de la pose, l'une avec le voussoir, l'autre avec le prisme quadrangulaire adjacent; du moins, il n'aurait lieu qu'en vertu de la compressibilité de la matière du prisme, qui lui permettrait de descendre un tant soit peu sous l'influence du poids du prisme superposé et du glissement occasionné par l'inflexion de la voûte. Nous négligerons donc ici le frottement, ce qui revient à supposer normale l'action du prisme sur le voussoir. Déterminons maintenant l'intensité de cette action; pour cela, nous aurons à considérer l'équilibre du prisme triangulaire.

Afin de simplifier les notations, nous placerons l'axe des x dans le plan horizontal qui limite les prismes quadrangulaires à leur partie supérieure.

Les forces que reçoit le prisme triangulaire sont au nombre de quatre : ce sont les trois pressions exercées perpendiculairement sur ses trois faces longitudinales, et le poids de ce prisme; nous devons faire abstraction de ce poids, qui est une force infiniment petite du deuxième ordre à cause des deux dimensions infiniment petites du prisme, et ne doit point, pour cette raison, figurer dans des équations entre les autres forces qui sont infiniment petites du premier ordre.

Soit ds' le côté hypoténuse de la base du prisme triangulaire, les côtés horizontal et vertical de cette base seront dx' et dy'; les étendues superficielles des faces correspondantes seront respecti-

vement $\lambda ds'$, $\lambda dx'$ et $\lambda dy'$. N' désignant comme ci-dessus l'intensité de la pression normale par unité de surface, l'intensité de la pression exercée par le voussoir sur le prisme sera $N'\lambda ds'$, et comme cette force est dirigée du centre de courbure vers l'extrados, ses composantes horizontale et verticale seront $N'\lambda ds' \sin\alpha$ et $-N'\lambda ds' \cos\alpha$.

Soit H' la pression horizontale par unité de surface exercée par le prisme triangulaire sur la partie adjacente du massif, et que, réciproquement, celle-ci exerce sur la face verticale du précédent; la force exercée contre le prisme par la partie adjacente du massif sera $H'\lambda dy'$, et dirigée vers les x négatifs, la convexité de l'élément ds' étant supposée du côté des x positifs.

Enfin, la face horizontale du prisme triangulaire reçoit une force verticale qui n'est autre chose que le poids du prisme quadrangulaire correspondant, ou $i\varpi y'\lambda dx'$, en désignant par i le rapport de la densité du massif à celle de la voûte, de sorte que $i\varpi$ représente le poids de l'unité de volume du massif, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

Égalons à zéro les sommes des projections horizontales et verticales des forces qui sollicitent le prisme triangulaire; nous aurons

$$N'\lambda ds' \sin\alpha - H'\lambda dy' = 0; \quad -N'\lambda ds' \cos\alpha + i\varpi y'\lambda dx' = 0,$$

ou bien

$$N' = H', \quad N' = i\varpi y';$$

ou encore

$$N' = H' = i\varpi y'. \qquad (o)$$

La pression normale N' par unité de surface se trouve ainsi déterminée; et de ce que cette pression et la pression H' ont pour valeur commune la quantité $i\varpi y'$, on en conclut que le mode de disposition des matériaux du massif dont nous nous occupons ici, donne lieu à la même distribution des pressions, que si le massif était un liquide de densité correspondante au poids $i\varpi$ de l'unité de volume.

Nous aurions pu, comme plusieurs auteurs, partir immédiatement de l'hypothèse de la fluidité; mais il nous a paru bon d'indiquer à quel mode de disposition répond cette hypothèse que nous allons adopter dans ce qui va suivre. Nous signalerons à ce sujet la tendance d'un bon nombre d'ingénieurs à remplacer généralement la disposition *en gradins* des parements extérieurs par celle résultant d'un *extrados* continu, avec assises horizontales coupées obliquement en leur intersection avec l'extrados. Cette disposition de l'appareil des têtes peut donner lieu à des pressions normales, mais leurs intensités restent indéterminées; il ne faudrait que séparer les prismes triangulaires, des assises horizontales, pour diminuer notablement l'indétermination et se rapprocher de notre disposition idéale : si l'on avait à redouter la rupture de ces prismes en leurs angles aigus, on pourrait les construire d'une matière plus résistante, et même, dans certains cas, les rattacher aux pierres supérieures, c'est-à-dire les faire alors de la même pièce que celles-ci.

On dira peut-être que, si l'on applique aux appareils consistant en assises horizontales et voussoirs *en gradins* les formules relatives à l'équilibre du système formé de prismes disposés verticalement et reposant sur des prismes triangulaires détachés des voussoirs, ou celles relatives à l'hypothèse de la fluidité des matières du massif, on ne courra aucun risque relativement à la stabilité de la construction proposée, puisque celle-ci donne lieu à des liaisons résultant du croisement des pierres des assises horizontales, que ne présente pas la disposition du massif en prismes verticaux, et que, d'autre part, le passage de l'état fluide à l'état solide établit des liaisons favorables à la stabilité, et sur lesquelles on n'a pas compté. Nous n'invoquerons point ces raisonnements, qui sont plus spécieux qu'exacts, attendu que les liaisons établies dans la construction ont pour résultat précisément d'empêcher les charges de se répartir sur les reins de voûte, comme elles le feraient si ces liaisons manquaient absolument, ou dans le cas de la fluidité.

Nous avons indiqué, dans la note du n° 7, la nécessité d'assu-

rer la direction normale des pressions exercées par le massif; nous croyons donc ne pouvoir mieux faire, et sur ce point nous sommes d'accord avec de savants ingénieurs, qu'en adoptant l'hypothèse de la fluidité, et en engageant les constructeurs à se conformer, dans l'appareillage des parements extérieurs, aux conséquences de cette hypothèse, par l'adoption de dispositions propres à la réaliser, ou à en choisir qui se rapprochent le plus possible de celle que nous avons décrite, et que nous allons soumettre au calcul.

APPLICATION DES FORMULES DE L'ÉQUILIBRE AU CAS OÙ LES PRESSIONS NORMALES EXTÉRIEURES AUX VOUSSOIRS SONT PROPORTIONNELLES À LA HAUTEUR DE LA CHARGE QUI S'ÉLÈVE AU-DESSUS DE CEUX-CI.

9. Nous partirons de la valeur de N′ obtenue dans le numéro précédent, et qui donne

$$\frac{N'}{\varpi} = iy'.$$

En substituant cette valeur dans les deux premières équations (l), on a

$$d.\mu\cos\alpha = -\frac{iy'}{e}\,dy',$$

$$d.\mu\sin\alpha = +\frac{iy'}{e}\,dx' + \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e}{\rho'}\right)ds'.$$

Quant à l'équation (m), elle reste la même,

$$\mu - \mu_0 = y' - h - \frac{1}{3}\,e\,(1 - \cos\alpha),$$

et l'équation (n) devient

$$\rho' = e\,\frac{\mu_0 + y' - h - \frac{1}{3}\,e\,(1 - 2\cos\alpha)}{iy' + e\cos\alpha}. \qquad (p)$$

Cette expression du rayon de courbure de l'extrados offre un moyen très-simple de construire cette courbe : nous reviendrons

plus tard sur ce sujet. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration des équations différentielles ci-dessus, ou mieux de la première d'entre elles, comme plus simple, ce qui suffira, puisque la valeur de μ résulte d'une intégration effectuée précédemment.

On obtient immédiatement, en intégrant la première de ces équations, à partir des limites μ_0, 1 et h relatives à μ, $\cos\alpha$ et y',

$$\mu_0 - \mu\cos\alpha = \frac{i}{2e}(y'^2 - h^2);$$

pour éliminer μ, multiplions par $\cos\alpha$ l'équation qui donne la valeur de $\mu - \mu_0$, et ajoutons membre à membre avec celle-ci, il viendra

$$\mu_0(1-\cos\alpha) = (y'-h)\cos\alpha - \tfrac{1}{3}e(1-\cos\alpha)\cos\alpha + \frac{i}{2e}(y'^2-h^2). \quad (q)$$

En exprimant dans cette équation $\cos\alpha$ en fonction de $\tang\alpha$ dont la valeur est $\frac{dy'}{dx'}$, on aurait l'équation différentielle de la courbe extrados, qui semble présenter, pour l'intégration, plus de facilité que l'équation différentielle de l'intrados; mais il convient mieux d'obtenir l'équation de l'intrados[1], et dans ce but nous ne nous laisserons point arrêter par des difficultés qui sont plutôt apparentes que réelles.

Pour passer de l'équation (q) à celle relative à l'intrados, il suffit de remplacer y' par sa valeur en fonction de y''; en effet, $\cos\alpha$ conserve la même valeur pour les points des trois courbes situés sur une même normale à l'extrados, ces courbes étant parallèles en vertu de la constance de $\frac{1}{2}e$. Or les coordonnées y' et y'' ne diffèrent que d'une quantité égale à la projection verticale de e; on a donc

$$y' = y'' - e\cos\alpha:$$

[1] Nous voulons parler ici de l'*intrados fictif*, que nous désignerons simplement par la dénomination d'intrados, à moins que nous ne prévenions du contraire.

nous déduirons de cette équation la valeur initiale de y'', en faisant à la fois $y' = h$ et $\alpha = 0$; soit h'' cette valeur de y'', il vient

$$h = h'' - e, \qquad (r)$$

équation qui, combinée avec la précédente par voie d'addition et de soustraction, donne

$$y' + h = y'' + h'' - e(1 + \cos\alpha),$$
$$y' - h = y'' - h'' + e(1 - \cos\alpha);$$

multipliant celles-ci membre à membre, il vient

$$y'^2 - h^2 = y''^2 - h''^2 - 2e(y''\cos\alpha - h'') - e^2(1 - \cos^2\alpha);$$

substituant, enfin, cette valeur et la précédente dans l'équation (q), nous aurons

$$\mu_0(1 - \cos\alpha) = (y'' - h'')\cos\alpha + \frac{2}{3}e(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+ \frac{i}{2e}(y''^2 - h''^2) - i(y''\cos\alpha - h'') - \frac{ie}{2}(1 - \cos^2\alpha).$$

C'est ici le lieu de remarquer que si l'on considère la quantité e comme étant du premier ordre de petitesse par rapport aux rayons de courbure, ou aux coordonnées que l'on suppose de même ordre, la quantité μ_0 est du premier ordre de grandeur par rapport à ces dernières : en effet, le deuxième membre de cette équation ne contient que deux termes ayant e en dénominateur, et qui sont pour cela du premier ordre de grandeur, réunis sous la forme $\frac{i}{2e}(y''^2 - h''^2)$; la différence de ces termes reste en général d'un ordre de grandeur supérieur à celui des coordonnées, puisque le facteur de cette différence $y'' - h''$ est en général d'un ordre de grandeur plus élevé que e : il faut donc que le deuxième membre, et par suite le premier, soient du premier ordre de grandeur, généralement. On observera que si, vers le sommet de

l'intrados, $y'' - h''$ devient très-petit et même nul, le facteur $1 - \cos\alpha$ devient nul en même temps, et l'ordre de μ_0 reste indéterminé vers le sommet, d'après l'équation précédente; mais l'expression (p) de ρ' montre que le produit de e par μ_0 est constamment égal au produit de quantités de l'ordre des coordonnées. Nous sommes donc autorisé à regarder μ_0 comme étant du premier ordre de grandeur.

Posons, pour abréger et simplifier les discussions,

$$q^2 = \frac{2e\mu_0}{i}; \qquad (s)$$

la quantité q sera, d'après ce qui vient d'être dit, de l'ordre de grandeur des coordonnées et des rayons de courbure. Multiplions l'équation ci-dessus par $\frac{1}{\mu_0}$ ou par sa valeur $\frac{2e}{iq^2}$, il viendra

$$1 - \cos\alpha = \frac{y''^2 - h''^2}{q^2} + \frac{2e}{iq^2}(y'' - h'')\cos\alpha + \frac{4e^2}{3iq^2}(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$- \frac{2e}{q^2}(y''\cos\alpha - h'') - \frac{e^2}{q^2}(1 - \cos^2\alpha)^2.$$

Cette équation est du deuxième degré par rapport à $\cos\alpha$; mais observons que $\cos^2\alpha$ n'affecte que des termes du deuxième ordre, de sorte que si, comme nous sommes convenu de le faire, nous négligeons ceux du troisième, il suffira ici d'y substituer à $\cos\alpha$ et à $1 - \cos\alpha$, leurs valeurs obtenues en négligeant ceux du premier. Or la valeur de $1 - \cos\alpha$ est $\frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$ aux termes près du premier ordre, d'après l'équation précédente, d'où résulte pour la valeur de $\cos\alpha$, au même degré d'approximation, $1 - \frac{y'^2 - h''^2}{q^2}$: nous pourrons donc, en ne négligeant que les termes du troisième ordre, mettre le deuxième terme du deuxième membre sous la forme

$$\frac{4e^2}{3iq^2}\,\frac{y'^2 - h''^2}{q^2}\cos\alpha,$$

et écrire le dernier terme de ce membre ainsi qu'il suit :

$$-\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}\left(1-\frac{y'^2-h''^2}{q^2}\right)\cos\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente deviendra

$$1-\cos\alpha=\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2}+\left[\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''\right.$$
$$\left.+\frac{4e^2}{3iq^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}-\frac{e^2}{q^2}\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\cos\alpha;$$

on en déduit

$$\cos\alpha\left\{1+\frac{2e}{iq^2}(y''-h'')-\frac{2e}{q^2}y''+\frac{e^2}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right\}$$
$$=1-\frac{y''^2-h''^2+2h''e-e^2}{q^2},\quad (t)$$

ou bien en ajoutant et retranchant $\frac{2e}{q^2}h''$ dans la parenthèse du premier membre, et tirant la valeur de $\cos\alpha$,

$$\cos\alpha=\frac{1-\frac{y'^2-h''^2+e(2h''-e)}{q^2}}{1-\frac{e(2h''-e)}{q^2}+\frac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}}.\quad (u)$$

Telle est l'équation différentielle de l'intrados qu'il reste à intégrer, en y supposant $\cos\alpha$ exprimé en fonction de $\tang\alpha$ ou de $\frac{dy''}{dx}$.

10. Avant de procéder à l'intégration de cette équation, nous aurons à exprimer les quantités μ et ρ'', puis ensuite ε ou δ, en fonction des ordonnées de l'intrados.

L'équation (m) donne immédiatement, au moyen de la valeur ci-dessus de $y'-h$,

$$\mu-\mu_0=y''-h''+\frac{2}{3}e(1-\cos\alpha);$$

et si nous observons que e est du deuxième ordre par rapport à μ,

on aura une expression de μ exacte jusque dans les termes du deuxième ordre relativement à cette quantité, en mettant à la place du facteur $1 - \cos\alpha$ la valeur obtenue plus haut en négligeant les termes du premier ordre; le dernier terme du second membre de l'équation précédente pourra s'écrire $\frac{2}{3} e \frac{y''^2 - h''^2}{q^2}$, ou, en vertu de l'équation (s), $\frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2)$: il vient donc

$$\mu - \mu_0 = y'' - h'' + \frac{i}{3\mu_0}(y''^2 - h''^2). \qquad (v)$$

Quant à l'expression du rayon de courbure, observons qu'en vertu du parallélisme des trois courbes, on a

$$\rho' = \rho'' + e;$$

substituant cette valeur et celle de y' dans l'équation (p) dont nous chasserons les dénominateurs, nous aurons

$$(\rho'' + e)[iy'' + (1 - i)e\cos\alpha] = e\mu_0 + e(y'' - h'') + e^2(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{3}e^2(1 - 2\cos\alpha);$$

divisant tout par i, et ayant égard à la relation (s), puis effectuant les réductions qui se présentent, il viendra d'abord

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) + ey'' + \frac{1-i}{i}e^2\cos\alpha = \frac{q^2}{2} + \frac{e}{i}(y'' - h'') + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i}(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{3i}e^2\cos\alpha,$$

puis ensuite

$$\rho''\left(y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}q^2 - eh'' + \frac{2}{3}\frac{e^2}{i} + \frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{1}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha,$$

et enfin

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\frac{1-i}{i}e(y'' - h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3} - i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (w)$$

Nous reviendrons plus loin sur cette expression du rayon de courbure, et nous indiquerons le parti qu'on en peut tirer pour substituer à l'emploi de l'intégrale de l'équation (u), celui des constructions graphiques. Actuellement, nous nous bornerons à opérer la vérification de cette expression, en observant qu'on doit pouvoir la tirer de l'équation (u) par la différentiation.

En effet, différentions cette équation en y faisant préalablement disparaître le dénominateur du deuxième membre, il viendra

$$-\left[1-\frac{e(2h''-e)}{q^2}+\frac{2e}{iq^2}(1-i)(y''-h'')+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}\right]\sin\alpha\, d\alpha$$
$$+\cos\alpha\left[\frac{2e}{iq^2}(1-i)+\frac{2e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\right]dy''=-\frac{2y''}{q^2}dy''.$$

Or, on a $dy''=\sin\alpha\, ds''=\rho''\sin\alpha\, d\alpha$; substituant cette dernière valeur à la place de dy'', et supprimant ensuite le facteur commun $\sin\alpha\, d\alpha$, on aura

$$\frac{2}{q^2}\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''}{q^2}\cos\alpha\right]=1-\frac{2eh''}{q^2}+\frac{e^2}{q^2}$$
$$+\frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y''-h'')}{q^2}+\frac{e^2}{iq^2}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{y''^2-h''^2}{q^2}.$$

Nous pouvons mettre dans le dernier terme du second nombre au lieu de $\frac{y''^2-h''^2}{q^2}$, la quantité $1-\cos\alpha$, d'après ce qui a été dit ci-dessus; puis, en transposant le dernier terme de la parenthèse du premier membre, et multipliant par q^2, nous aurons

$$2\rho''\left[y''+\frac{1-i}{i}e\cos\alpha\right]=q^2-2eh''+e^2+\frac{2(1-i)}{i}e(y''-h'')$$
$$+\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)(1-\cos\alpha)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{\rho''y''}{q^2}\cos\alpha.$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième

ordre, on peut mettre à la place de ρ'', sa valeur obtenue en négligeant les termes du premier, et l'équation donne ici $2\rho''y'' = q^2$, en négligeant ces termes; il en résulte que le dernier se réduit à $-\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$, et, par suite, la somme des deux derniers à $\frac{e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)-\frac{2e^2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\cos\alpha$. Mettant ces valeurs, achevant la réduction des termes en e^2, puis tirant la valeur de ρ'', il vient

$$\rho'' = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh'' + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i} + 2\frac{1-i}{i}e(y''-h'') - \frac{2}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha},$$

valeur identique avec celle obtenue précédemment.

Nous pouvons déjà remarquer que, dans l'hypothèse $i = 1$, cette expression devient plus simple que celle (p) du rayon de courbure de l'extrados. On pourra encore observer que, dans la même hypothèse, le second membre de l'équation (a) ne contient que des puissances paires de y'', d'où il est facile de conclure que la courbe qu'elle représente devient alors symétrique par rapport à l'axe des x. Le numérateur de la valeur de ρ'' conserve le même signe pour des valeurs égales et de signe contraire de y'', tandis que le dénominateur change de signe. Le rayon de courbure prend alors des valeurs égales et de signe contraire, comme cela doit être, puisque les courbures en deux points symétriquement placés par rapport à l'axe de x sont nécessairement de sens contraires.

Actuellement la détermination de la distance δ du centre de gravité au milieu de l'épaisseur du voussoir devient très-simple: en effet, nous déduisons de l'équation (h)

$$\delta = \frac{1}{12}\frac{e^2}{\rho'};$$

on peut substituer ici ρ'' à la place de ρ', puisque leur différence est égale à e, et qu'il n'en peut résulter qu'une erreur du troisième ordre que nous négligeons; de plus, on peut à ρ'' substi-

tuer sa valeur, en y négligeant les termes du premier ordre, laquelle se réduit à $\frac{q^2}{2y''}$; alors il vient simplement

$$\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{q^2}y'' = \frac{i}{12}\frac{e}{\mu_0}y'', \qquad (x)$$

en ayant égard à la relation (s).

L'expression (i) de l'épaisseur variable ε se change de même en

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y''. \qquad (y)$$

Dans le système que nous considérons, les épaisseurs croissent donc proportionnellement aux ordonnées de l'intrados, et la constante e est l'épaisseur qui aurait lieu au point où l'intrados couperait l'axe des x si cette intersection était possible.

DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS.

11. Nous avons à former l'expression du coefficient différentiel $\frac{dy''}{dx''}$, dont la valeur en fonction de $\cos\alpha$ est

$$\frac{dy''}{dx''} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1};$$

on a d'abord, en renversant les deux membres de l'équation (u),

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1 - \frac{e(2h''-e)}{q^2} + \frac{2(1-i)}{i}\frac{e(y''-h'')}{q^2} + \frac{1}{i}\left(\frac{4}{3}-i\right)\frac{e^2(y''^2-h''^2)}{q^4}}{1 - \frac{y'^2-h'^2+e(2h'-e)}{q^2}};$$

élevant au carré les deux membres de cette équation, retranchant l'unité, et réduisant ensuite au même dénominateur, on aura, en supprimant les termes qui se détruisent, et négligeant ceux du troisième ordre,

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \text{ ou } \frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{1}{\left[1 - \frac{y''^2 - (h'' - e)^2}{q^2}\right]^2} \left\{ 2\,\frac{y''^2 - h''^2}{q^2} - \frac{(y''^2 - h''^2)^2}{q^4} \right.$$

$$+ \frac{4(1-i)}{i}\,\frac{e(y'' - h'')}{q^2} - \frac{4\,e\,h''\,(y''^2 - h''^2)}{q^4}$$

$$\left. + \frac{8}{3i}\,\frac{e^2(y''^2 - h''^2)}{q^4} - \frac{8(1-i)}{i}\,\frac{e^2\,h''\,(y'' - h'')}{q^4} + \frac{4(1-i)^2}{i^2}\,\frac{e^2\,(y'' - h'')^2}{q^4} \right\}.$$

Multipliant haut et bas par q^4 et mettant le facteur commun $y'' - h''$ en évidence, si, de plus, on pose

$$R^2 = (y'' - h'') \left\{ \left[2q^2 - (y''^2 - h''^2) \right] (y'' + h'') + 4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2 \right.$$

$$- 4\,eh''\,(y'' + h'') + \frac{8}{3i}\,e^2\,(y'' + h'')$$

$$\left. - 8\,\frac{1-i}{i}\,e^2\,h'' + 4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2\,(y'' - h'') \right\}, \quad (z)$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{dy''^2}{dx''^2} = \frac{R^2}{[q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2]^2},$$

et l'on en tirera

$$dx'' = \pm\,\frac{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2}{R}\,dy''. \qquad (a')$$

Telle est l'équation qu'il reste à intégrer.

On sait que l'intégration d'une expression de cette espèce, dans laquelle R^2 est un polynôme du quatrième degré en y'', consiste dans la réduction aux fonctions elliptiques. Sous la forme (a'), l'intégration n'est pas même ramenée aux quadratures, à cause de la valeur infinie que prend le coefficient de dy'', quand y'' est égal à h'', et c'est le cas qui se présente pour le premier élément de l'intégrale. Or la réduction aux fonctions elliptiques exige la décomposition du polynôme R^2 en facteurs du premier degré, et cette décomposition nous présentera une circonstance favorable à la

réduction de l'intégrale aux quadratures; nous commencerons donc par opérer la décomposition du polynôme R^2 en ses facteurs du premier degré.

DÉCOMPOSITION DU POLYNÔME R^2 EN SES FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ. LIMITES DE LA COURBE INTRADOS DANS LE SENS DES y.

12. La question dont il s'agit se résout ordinairement par la détermination des racines du polynôme R^2 égalé à zéro. Dans le cas actuel, l'un des facteurs $y'' - h''$ est déjà connu, et il ne resterait plus qu'à résoudre une équation du troisième degré; mais la forme des racines étant trop compliquée, lorsqu'on fait usage de la formule de Cardan, pour que nous songions à appliquer cette dernière, et l'exactitude rigoureuse de la valeur des racines n'étant point nécessaire ici, puisque la valeur du polynôme n'est exacte que jusqu'aux termes du deuxième ordre inclusivement, nous devrons recourir à un autre procédé, celui de la réduction des racines en séries ordonnées suivant les puissances de c, dans lesquelles nous négligerons les termes d'ordres supérieurs au second.

Nous commencerons par déterminer les parties de chacun des facteurs du polynôme du troisième degré, qui sont indépendantes des termes du premier et du second ordre : pour cela nous rechercherons les facteurs du polynôme en faisant abstraction de ces termes, dont la suppression le réduit à

$$(y'' + h'')\,[2q^2 - (y''^2 - h''^2)].$$

L'un des facteurs du premier degré est en évidence; en égalant à zéro l'autre facteur, il vient

$$y''^2 = h''^2 + 2q^2.$$

Posons

$$H^2 = h''^2 + 2q^2, \qquad (b')$$

on tirera de l'équation précédente,

$$y'' = \pm H,$$

de sorte que les deux facteurs cherchés seront $H + y''$ et $H - y''$ (nous changeons ici le signe de la différence $y'' - H$ à cause du signe — qui affecte y''^2 dans le facteur du deuxième degré). Le produit des trois facteurs, en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre, est donc

$$(y'' + h'')\,(H + y'')\,(H - y'').$$

Désignons maintenant par $\alpha' e$, $\beta' e$, $\gamma' e$ les termes du premier ordre qui doivent entrer dans la composition des facteurs que nous nous proposons de déterminer, de telle sorte que le produit de ces facteurs soit, à des termes près du deuxième ordre,

$$(y'' + h'' + \alpha' e)\,(H + y'' + \beta' e)\,(H - y'' + \gamma' e);$$

il s'agit de déterminer les valeurs de α', β' et γ' de manière que les termes du premier ordre provenant du produit de ces facteurs soient identiques avec ceux qui font partie du polynôme proposé, quel que soit y''. Quant aux termes de l'ordre de y'', il n'y a point à s'en occuper, puisqu'ils sont nécessairement identiques avec ceux du polynôme, en vertu de la décomposition que nous venons d'effectuer. Formons donc l'expression des termes du premier ordre que peut fournir le produit des facteurs ci-dessus : on aperçoit immédiatement que ces termes ne peuvent provenir que du produit du terme du premier ordre de chacun des facteurs, par le produit des termes des deux autres facteurs qui sont de l'ordre de y''. On a de la sorte, pour les termes dont il s'agit,

$$\alpha' e\,(H + y'')\,(H - y'') + \beta' e\,(y'' + h'')\,(H - y'') + \gamma' e\,(y'' + h'')\,(H + y'').$$

Or la somme de ces termes devant être égale, pour toute valeur de y'', à la somme des termes du premier ordre qui entrent dans la composition du polynôme du troisième degré, laquelle est

$$4\,\frac{1-i}{i}\,eq^2 - 4\,eh''\,(y'' + h''),$$

nous allons égaler les coefficients des mêmes puissances de y'' dans ces deux sommes, et en faisant abstraction du facteur commun e, nous aurons les trois équations de condition

$$\alpha' H^2 + (\beta' + \gamma') H h'' = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') H - (\beta' - \gamma') h'' = -4 h'',$$
$$-\alpha' - \beta' + \gamma' = 0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha' = -(\beta' - \gamma');$$

substituant cette valeur dans la première et multipliant la seconde par h'', il vient

$$(\beta' + \gamma') H h'' - (\beta' - \gamma') H^2 = 4 \frac{1-i}{i} q^2 - 4 h''^2,$$
$$(\beta' + \gamma') H h'' - (\beta' - \gamma') h''^2 = -4 h''^2;$$

puis en soustrayant,

$$-(\beta' - \gamma')(H^2 - h''^2) = 4 \frac{1-i}{i} q^2;$$

mais on a (b')

$$H^2 - h''^2 = 2 q^2,$$

il en résulte

$$\beta' - \gamma' = -2 \frac{1-i}{i},$$

et, en substituant cette valeur dans la deuxième des équations de condition,

$$(\beta' + \gamma') H + 2 \frac{1-i}{i} h'' = -4 h'',$$

ou

$$(\beta' + \gamma') H = -\frac{2}{i}(1+i) h'';$$

on en tire

$$\beta' + \gamma' = -\frac{2}{i}(1+i) \frac{h''}{H}.$$

En ayant égard à la valeur ci-dessus de α' en β' et γ', puis se servant des expressions de la différence et de la somme de ces deux dernières quantités que nous venons de trouver, on formera les valeurs suivantes:

$$\alpha' = 2\,\frac{1-i}{i},$$

$$\beta' = -\,\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{H},$$

$$\gamma' = +\,\frac{1-i}{i} - \frac{1+i}{i}\,\frac{h''}{H}.$$

Actuellement, désignons les termes du deuxième ordre respectivement par $\alpha'' e^2$, $\beta'' e^2$, $\gamma'' e^2$, de sorte que le produit des trois facteurs soit

$$(y'' + h'' + \alpha' e + \alpha'' e^2)\,(H + y'' + \beta' e + \beta'' e^2)\,(H - y'' + \gamma' e + \gamma'' e^2);$$

nous aurons simplement à identifier les termes du deuxième ordre fournis par ce produit, avec ceux du polynôme du troisième degré, puisque ceux du premier et ceux de l'ordre de h'' se trouvent identiques en vertu des calculs précédents. Remarquons à ce sujet que les termes du deuxième ordre de ce produit proviendront d'abord du produit de chaque terme de cet ordre faisant partie d'un facteur, par le produit des deux autres facteurs débarrassés de leurs termes du premier et du deuxième ordre; puis ensuite du produit de deux termes du premier ordre contenus dans deux facteurs différents, par l'autre facteur débarrassé de ses termes du premier et du deuxième ordre. Cette remarque nous permettra d'écrire immédiatement les termes du deuxième ordre dont il s'agit, et en les égalant à ceux contenus dans le polynôme du troisième degré, on aura l'équation

$$\left.\begin{aligned}&\alpha'' e^2 (H^2 - y''^2) + \beta'' e^2 (y'' + h'')(H - y'') + \gamma'' e^2 (y'' + h'')(H + y'')\\ &+ \alpha'\beta' e^2 (H - y'') + \alpha'\gamma' e^2 (H + y'') + \beta'\gamma' e^2 (y'' + h'')\end{aligned}\right\}$$

$$= \left\{\begin{aligned}&\frac{8}{3i}\,e^2 (y'' + h'') - 8\,\frac{1-i}{i}\,e^2 h''\\ &+ 4\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 (y'' - h''),\end{aligned}\right.$$

qui se décompose, en égalant séparément les coefficients des mêmes puissances de γ'', en les trois équations suivantes :

$$\alpha''H^2+(\beta''+\gamma'')Hh''+\alpha'(\beta'+\gamma')H+\beta'\gamma'h''=\frac{8}{3i}h''$$
$$-8\frac{1-i}{i}h''-4\frac{(1-i)^2}{i^2}h'',$$

$$(\beta''+\gamma'')H-(\beta''-\gamma'')h''-\alpha'(\beta'-\gamma')+\beta'\gamma'=\frac{8}{3i}+4\frac{(1-i)^2}{i^2},$$

$$-\alpha''-\beta''+\gamma''=0.$$

La dernière de ces équations donne

$$\alpha''=-(\beta''-\gamma'');$$

substituant cette valeur dans la première, multipliant la deuxième par h'', et transposant les termes connus dans les seconds membres, il viendra

$$(\beta''+\gamma'')Hh''-(\beta''-\gamma'')H^2=-\alpha'(\beta'+\gamma')H-\beta'\gamma'h''+\frac{8h''}{3i}-4\frac{(1-i)^2}{i^2}h''-8\frac{1-i}{i}h'',$$

$$(\beta''+\gamma'')Hh''-(\beta''-\gamma'')h''^2=+\alpha'(\beta'-\gamma')h''-\beta'\gamma'h''+\frac{8h''}{3i}+4\frac{(1-i)^2}{i^2}h'';$$

soustrayons la première de la seconde, nous aurons

$$(\beta''-\gamma'')(H^2-h''^2)=\alpha'[(\beta'+\gamma')H+(\beta'-\gamma')h'']+8\frac{(1-i)^2}{i^2}h''+8\frac{1-i}{i}h'';$$

mais nous avons trouvé plus haut les valeurs de $(\beta'+\gamma')H$ et $\beta'-\gamma'$; elles donnent immédiatement

$$(\beta'+\gamma')H+(\beta'-\gamma')h''=-\frac{4}{i}h'':$$

au moyen de cette relation et de la valeur de α', le second membre de l'équation précédente se réduit à

$$-\frac{8}{i^2}(1-i)h''+\frac{8}{i^2}(1-i)^2h''+8\frac{1-i}{i}h''=0;$$

cette même équation donne par suite

$$\beta''-\gamma''=0.$$

Reprenant la deuxième équation de condition, nous aurons, en vertu de $\beta'' - \gamma'' = 0$ et des valeurs déterminées précédemment de α', $\beta' - \gamma'$, β' et γ',

$$(\beta'' + \gamma'')\,\mathrm{H} = \frac{(1-i)^2}{i^2} - \frac{(1+i)^2}{i^2}\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{8}{3i};$$

d'où, en ayant égard à la même équation $\beta'' - \gamma'' = 0$,

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}}\left[1 + \frac{2}{3}i + i^2 - (1+i)^2\frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}\right].$$

En vertu de cette égalité des valeurs de β'' et γ'', celle de α'' se réduit à zéro,

$$\alpha'' = 0.$$

Dans le but de simplifier les calculs qui vont suivre, nous donnerons aux expressions de β'' et γ'' une autre forme. Faisons disparaître le dénominateur H^2 de la parenthèse; en tenant compte de la relation (b'), nous aurons

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)(h''^2 + 2q^2) - (1+i)^2 h''^2\right];$$

réunissons les termes affectés des facteurs h''^2 et q^2, il viendra finalement

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right].$$

Au moyen des valeurs de α', β', γ', α'', β'', γ'' que nous venons de déterminer, les trois facteurs dont nous proposions de former les expressions en négligeant les termes des ordres supérieurs au second, deviennent respectivement

$$\gamma'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e,$$

$$\mathrm{H} - \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 + \gamma'',$$

$$\mathrm{H} + \frac{1-i}{i}e - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{\mathrm{H}}e + \frac{1}{i^2\mathrm{H}^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2 - \gamma''.$$

Posons pour abréger

$$\Theta = H - \frac{1+i}{i}\frac{h''}{H}e + \frac{1}{i^2 H^3}\left[\left(1 + \frac{2}{3}i + i^2\right)q^2 - \frac{2}{3}ih''^2\right]e^2, \quad (c')$$

les deux derniers facteurs deviendront

$$\Theta + \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right), \quad \Theta - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right);$$

et leur produit pourra s'écrire

$$\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2,$$

de sorte que la valeur (z) de R^2 prendra la forme

$$R^2 = (y'' - h'')\left(y'' + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]. \quad (d')$$

13. Les limites de la courbe intrados dans le sens des y, s'obtiendront en posant $\frac{dy}{dx} = 0$, condition qui sera remplie, d'après l'équation (a'), lorsque l'on aura $R = 0$. Or la décomposition que nous venons d'opérer, de la fonction R^2 en facteurs, donne le moyen de déterminer les limites dont il s'agit, en posant chacun des facteurs égal à zéro : il en résulte, pour valeur des ordonnées maxima et minima de la courbe, les quantités suivantes, que nous disposons par ordre de grandeur,

$$-\left(\Theta - \frac{1-i}{i}e\right), \quad -\left(h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right), \quad +h'', \quad +\left(\Theta + \frac{1-i}{i}e\right).$$

L'ordre de grandeur de ces quantités ne paraît pas évident si l'on ne remonte point aux valeurs de Θ et H en fonction de h'', et si l'on ne se rappelle pas que h'' est positif d'après la nature de la question. D'ailleurs l'ordre que nous venons d'établir est simplement subordonné aux trois conditions suivantes

$$h'' < \Theta - 3\frac{1-i}{i}e, \quad h'' + \frac{1-i}{i}e > 0, \quad h'' < \Theta + \frac{1-i}{i}e,$$

qui évidemment se réalisent dans le cas de la question qui nous occupe.

Nous allons faire voir maintenant que la courbe se compose de deux branches séparées, l'une située tout entière du côté des y positifs, et comprise entre deux parallèles à l'axe des x menées aux distances h'' et $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, l'autre située du côté des y négatifs, et comprise entre deux autres droites parallèles menées aux distances $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$.

En effet, la condition que le radical R reste réel exige que le polynôme R^2 soit positif. Or ce polynôme est du quatrième degré en y'' et le terme affecté de y''^4 est négatif : si l'on fait $y'' = \pm\infty$, la valeur de R^2 devient infinie et négative; elle ne change de signe que lorsqu'on fait décroître la valeur absolue de y'' en la ramenant aux limites extrêmes $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$, $+\left(\Theta + \frac{1-i}{i} e\right)$. Donc la courbe ne contient aucun point situé en dehors de ces limites. La valeur de R^2 commence à devenir positive lorsque y'' atteint ces valeurs, puisqu'il n'existe pas de racines égales; et, si l'on continue de faire décroître la valeur absolue de y'', on voit que R^2 reste positif jusqu'à ce que y'' atteigne les valeurs où il change de signe, ce qui a lieu aux limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $+h''$; le signe de R^2 se trouve changé entre ces limites et devient négatif. On doit conclure de cet examen que la courbe est composée de deux branches, l'une située entre les limites $-\left(\Theta - \frac{1-i}{i} e\right)$ et $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$, l'autre comprise entre les limites $\Theta + \frac{1-i}{i} e$ et h''; et qu'en outre l'espace compris entre les limites $-\left(h'' + 2\frac{1-i}{i} e\right)$ et $+h''$ n'en renferme aucun point, non plus que les espaces situés au delà des limites extrêmes.

L'équation (a') fait connaître l'ordonnée du point où la tangente est parallèle à l'axe des y; en effet, en ce point on a $\frac{dx''}{dy} = 0$,

et l'équation (a') fournit, pour satisfaire à cette condition, la relation

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'' = \pm \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}.$$

Les limites obtenues et la détermination des points où la tangente est verticale vont nous permettre d'aborder la discussion de la forme de la courbe, et de fixer l'usage que l'on devra faire du double signe du radical R de l'équation (a'). Observons qu'en vertu de ce double signe la courbe est symétrique par rapport à un axe parallèle à l'axe des y, dont la position ne dépend que du choix de la constante introduite par l'intégration, de sorte qu'ayant déterminé les circonstances de la forme de la courbe en ne considérant à la fois qu'un seul des deux signes, il suffira d'avoir égard à la symétrie, pour se figurer les parties de la courbe que l'on n'aura point étudiées.

Occupons-nous en premier lieu de la branche située du côté des y positifs, et partons de $y'' = h''$. Supposons d'abord R positif ou considérons le signe $+$ dans l'expression (a') de dx''. Les limites que nous avons reconnues, de la valeur de y'', nous obligent à faire dy'' positif; or le numérateur de dx'' est positif, tant que l'on a $y''^2 < q^2 + (h'' - e)^2$, la valeur de x'' croît depuis $y'' = h''$ jusqu'à $y'' = \sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$. A cette valeur de y'', le numérateur devient nul et change ensuite de signe, ce qui rend dx'' négatif au-delà de cette valeur; ainsi l'abscisse décroît d'abord depuis le point dont il s'agit, jusqu'à la limite $\Theta + \frac{1-i}{i} e$, de y'' : or cette limite ne pouvant être dépassée, il faut faire décroître y'', et afin que la courbe ne s'arrête point brusquement, nous devons changer le signe de R de sorte que $\frac{dy''}{R}$ se trouve encore positif. De cette manière le numérateur reste négatif, jusqu'à ce que y'' ait atteint dans sa décroissance la valeur $+\sqrt{q^2 + (h'' - e)^2}$; et

l'abscisse continue de diminuer jusqu'en cet endroit : mais au delà, le numérateur reprend sa valeur positive, et le rapport $\frac{dy'}{R}$ étant toujours positif, x'' croît de nouveau jusqu'à ce que y'' ait atteint la limite h''. Au delà de ce point, il faut faire croître y'', c'est-à-dire prendre dy'' positif et aussi le signe de R; il en résulte de nouveaux accroissements de x'' égaux aux précédents, pour les mêmes accroissements dy'' et les mêmes valeurs de y''. La courbe présente dès lors une reproduction périodique des mêmes formes qui lui donne quelque ressemblance avec les cycloïdes allongées.

Si l'on considère la branche située du côté des y négatifs, on reconnaîtra sans peine qu'elle présente une forme tout à fait analogue à celle de l'autre branche; et cette branche serait exactement symétrique avec la première, par rapport à l'axe des x, si l'on avait $i = 1$. On reconnaîtra de plus que la condition de continuité dans les parties de cette branche exigera que l'on choisisse le signe de R de manière que $\frac{dy''}{R}$ reste positif comme dans la première. Et l'on conclura de cette convention que le signe de R sera nécessairement contraire dans les parties correspondantes des deux branches.

Nous nous sommes étendu longuement sur la discussion de la forme des deux branches de la courbe, quoique nous ne devions utiliser qu'une faible partie de l'une d'elles; mais nous avions à fixer relativement aux signes de $\frac{dy''}{R}$ et de R des conventions dont l'une nous servira pour l'intégration de l'équation (a'), et l'autre, pour la vérification des coefficients que nous présentera l'intégrale de cette expression.

RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE DE L'EXPRESSION (a') AUX QUADRATURES.

14. Nous avons reconnu, après avoir établi cette expression, l'impossibilité de lui appliquer la méthode des quadratures, et nous en avons indiqué la cause, dans la présence du facteur $\sqrt{y'' - h''}$

au dénominateur de la valeur de dx''. Nous aurons recours au procédé de l'intégration par parties, pour faire disparaître cette difficulté, en faisant passer le facteur dont il s'agit du dénominateur au numérateur.

Posons

$$V^2 = \left(y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e\right)\left(\Theta^2 - (y'' - \frac{1-i}{i}\,e)^2\right),$$

la valeur de R deviendra

$$R = V\sqrt{y'' - h''},$$

et l'équation (a') pourra s'écrire

$$\pm\, dx'' = \frac{q^2 - 2\,h''c + c^2 - (y''^2 - h''^2)}{V\sqrt{y'' - h''}}\,dy''.$$

En intégrant et séparant les intégrales, il vient

$$\pm\, x'' = (q^2 - 2\,h''c + e^2)\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} - \int\frac{(y'' + h'')\sqrt{y'' - h''}}{V}\,dy''.$$

Effectuons la première intégration par parties, nous aurons

$$\int\frac{dy''}{V\sqrt{y'' - h''}} = \frac{2\sqrt{y'' - h''}}{V} - 2\int\sqrt{y'' - h''}\,d\,\frac{1}{V}.$$

Or on a

$$d\,\frac{1}{V} = -\frac{dV}{V^2} = -\frac{2V\,dV}{2V^3} = -\frac{1}{2V}\,\frac{d.V^2}{V^2}.$$

D'un autre côté, en appliquant à l'expression de V^2 la différentiation logarithmique, il vient

$$\frac{d.V^2}{V^2} = \frac{dy''}{y'' + h'' + 2\,\frac{1-i}{i}\,e} - \frac{2\left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)dy'}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}\,e\right)^2},$$

et, par suite,

$$d\frac{1}{V} = -\frac{1}{2}\frac{dy''}{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}} + \frac{\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy''}{\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]^{\frac{3}{2}}\sqrt{y''+h''+2\frac{1-i}{i}e}}.$$

Au moyen de ces expressions, on aura finalement

$$\pm x'' = 2(q^2-2h''e+e^2)\frac{\sqrt{y''-h''}}{\sqrt{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]}} + (q^2-2h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\,dy''}{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}} - 2(q^2-2h''e+e^2)\int\frac{\sqrt{y''-h''}\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy''}{\sqrt{y''+h''+2\frac{1-i}{i}e}\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \int\frac{\sqrt{y''-h''}\,(y''+h'')\,dy''}{\sqrt{\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]}}.$$

On devra remarquer qu'aucun des éléments de ces intégrales ne devient infini pour des valeurs de y'' comprises entre h'' et $\sqrt{q^2+(h''-e)^2}$, les seules dont nous ayons à faire usage, et que, par conséquent, ces intégrales sont propres à recevoir l'application de la méthode des quadratures. Mais nous renoncerons à faire usage de l'expression précédente de x'', qui serait plus longue à calculer que celle que nous obtiendrons plus loin, dût-on, dans celle-ci, calculer par quadratures les deux fonctions elliptiques de première et deuxième espèce qu'elle renferme.

RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES, DE L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA COURBE INTRADOS[1].

15. Nous mettrons d'abord la valeur de R^2 sous la forme d'un carré parfait, en posant

$$(y''-h'')\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)=\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]z^2, \quad (e')$$

relation de laquelle on tire

$$z=\pm\sqrt{\frac{(y''-h'')\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)}{\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2}},$$

et qui donne, en effet, pour la valeur de R^2,

$$R^2=\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]^2 z^2;$$

d'où

$$R=\left[\Theta^2-\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)^2\right]z. \quad (f'')$$

Nous supposons ici R susceptible de prendre le double signe; et comme y'' ne peut recevoir de valeurs qui rendent négatif le facteur de z, ainsi qu'il résulte des limites fixées précédemment, il suit de là que z a nécessairement le signe de R.

Tirons actuellement de l'équation (e') la valeur de y'' en z; il viendra d'abord, en développant,

$$y''^2-h''^2+2\frac{1-i}{i}y''e-2\frac{1-i}{i}h''e=\Theta^2z^2-y''^2z^2+2\frac{1-i}{i}ey''z^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2z^2,$$

[1] Ceux des lecteurs qui, étrangers à la théorie des fonctions elliptiques, craindraient de ne pouvoir suivre les développements dans lesquels nous allons entrer, pourront passer immédiatement aux n^os^ 29 et 30, où nous indiquons une solution numérique et une solution graphique fondées sur la détermination de l'intrados au moyen de son rayon de courbure.

puis, en ordonnant,

$$y''^2(1+z^2)+2\frac{1-i}{i}e(1-z^2)y''=\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]z^2 + 2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2.$$

Multiplions tous les termes de cette équation par $1+z^2$, et résolvons-la par rapport au produit $y''(1+z^2)$ considéré comme étant l'inconnue, il viendra

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)$$
$$\pm\sqrt{z^2(1+z^2)\left[\Theta^2-\frac{(1-i)^2}{i^2}e^2\right]+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2(1-z^2)^2+\left(2\frac{1-i}{i}h''e+h''^2\right)(1+z^2)}.$$

Désignons par Z^2 la quantité comprise sous le radical, nous aurons, en supposant provisoirement Z susceptible de prendre le double signe,

$$y''(1+z^2)=-\frac{1-i}{i}e(1-z^2)+Z. \qquad (g')$$

Or différentions l'équation (e'), nous aurons

$$\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)dy''+(y''-h'')dy''=2z\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]dz - 2z^2\left(y''-\frac{1-i}{i}e\right)dy'',$$

ou, en réunissant les termes affectés des mêmes différentielles et divisant par le facteur commun 2,

$$\left[y''+\frac{1-i}{i}e+z^2(y''-\frac{1-i}{i}e)\right]dy''=z\left[\Theta^2-(y''-\frac{1-i}{i}e)^2\right]dz;$$

mais le premier membre étant ordonné par rapport à y'', et le facteur de dz dans le second étant remplacé par sa valeur tirée de (f'), cette équation devient

$$\left[y''(1+z^2)+\frac{1-i}{i}e(1-z^2)\right]dy''=Rdz;$$

d'un autre côté, le facteur de dy'' est égal à Z, d'après (g') : on a donc

$$Z\,dy'' = R\,dz,$$

d'où

$$\frac{dy''}{R} = \frac{dz}{Z}. \qquad (h')$$

Nous avons établi, dans le n° 13, que le rapport $\frac{dy''}{R}$ doit rester positif; il suffira, pour faire usage de l'équation (h'), de donner à Z un signe tel, que le rapport $\frac{dz}{Z}$ soit également positif.

Formons actuellement la valeur de Z^2 : cette valeur, en ordonnant par rapport à z, et supprimant les termes qui se détruisent, devient

$$Z^2 = z^4\,\Theta^2 + z^2\left[\Theta^2 - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + h''^2\right] + \frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e + h''^2,$$

ou bien

$$Z^2 = z^4\,\Theta^2 + z^2\left[\Theta^2 + h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2.$$

Nous avons encore besoin de décomposer la quantité Z^2 en ses facteurs du second degré; mais pour cela nous calculerons préalablement la valeur du coefficient du deuxième terme : formons donc le carré de la valeur de Θ équation (c'); nous aurons, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$\Theta^2 = H^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2H^2}\left[\left(1 + \frac{2}{3}\,i + i^2\right)2q^2 - \frac{4}{3}\,ih''^2 + (1+i)^2h''^2\right]e^2.$$

En ayant égard à l'équation (b'), puis opérant les réductions, cette valeur deviendra

$$\Theta^2 = h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,i + i^2\right)e^2. \qquad (i')$$

Or les termes qui suivent Θ^2, dans le coefficient du deuxième terme de la valeur de Z^2, sont

$$h''^2 + 2\,\frac{1-i}{i}\,h''e - 3\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 :$$

en faisant la somme de ces termes et de Θ^2, le facteur de z^2 devient

$$2\,h''^2 + 2\,q^2 - 4\,h''e + \frac{\frac{20}{3}\,i - 2\,i^2 - 2}{i^2}\,e^2,$$

et la valeur de Z^2 se réduit à

$$Z^2 = z^4\,\Theta^2 + 2\,z^2\left[h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{\frac{10}{3}\,i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2\right] + \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2;$$

mais au lieu de décomposer cette expression en facteurs, il sera plus simple de décomposer en facteurs le produit $Z^2\Theta^2$.

Posons, pour abréger,

$$m^2 = h''^2 + q^2 - 2\,h''e + \frac{\frac{10}{3}\,i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2, \qquad n^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i}\,e\right)^2,$$

il viendra

$$Z^2\,\Theta^2 = z^4\,\Theta^4 + 2\,z^2\,\Theta^2\,m^2 + n^2\,\Theta^2 :$$

il suffit d'égaler à zéro le second membre de cette équation, et d'en tirer les racines; ces racines sont

$$z^2\,\Theta^2 = -\,m^2 \pm \sqrt{m^4 - n^2\,\Theta^2}.$$

Posons encore

$$K^2 = m^4 - n^2\,\Theta^2,$$

et nous aurons, pour expression du polynôme ci-dessus décomposé en ses facteurs,

$$Z^2\,\Theta^2 = (z^2\,\Theta^2 + m^2 + K)\,(z^2\,\Theta^2 + m^2 - K).$$

Il reste à calculer les quantités $m^2 + K$, $m^2 - K$, et par suite m^4, puis le produit $-n^2\,\Theta^2$. Effectuons les deux dernières de ces opérations sans réductions d'abord; nous aurons, en écrivant séparément les valeurs des trois termes dont se compose $-n^2\,\Theta^2$,

$$m^4 = (h''^2 + q^2)^2 - 4(h''^2 + q^2)\,h''e + 2(h''^2 + q^2)\,\frac{\frac{10}{3}\,i - i^2 - 1}{i^2}\,e^2 + 4h''^2e^2$$

$$-\Theta^2 h''^2 = -h''^2(h''^2 + q^2) - h''^2 q^2 + 2\,\frac{1+i}{i}\,h''^2 e - \frac{1 + \frac{2}{3}\,i + i^2}{i^2}\,h''^2 e^2$$

$$-2\,\Theta^2\,\frac{1-i}{i}\,h''e = -2\,\frac{1-i}{i}\,(h''^2 + 2q^2)\,h''e + 4\,\frac{1-i^2}{i^2}\,h''^2 e^2$$

$$-\Theta^2\,\frac{(1-i)^2}{i^2}\,e^2 = -\frac{(1-i)^2}{i^2}\,(h''^2 + 2q^2)\,e^2.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, il viendra, toutes réductions faites, et à cause de $K^2 = m^4 - n^2\,\Theta^2$,

$$K^2 = q^4 - \frac{4}{i}\,q^2 h''e + \frac{4q^2e^2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1\right) + \frac{4h''^2e^2}{i^2}\,(2i - i^2).$$

Pour extraire la racine, nous mettrons en évidence le facteur q^4, ainsi qu'il suit :

$$K^2 = q^4\left\{1 - \frac{4}{i}\,\frac{h''e}{q^2} + \frac{4e^2}{i^2q^2}\left[\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}\,(2i - i^2)\right]\right\}.$$

Élevant les deux membres de cette équation à la puissance $\frac{1}{2}$, nous aurons

$$K = q^2\left\{1 - \frac{2}{i}\,\frac{h'e}{q^2} + \frac{2e^2}{i^2q^2}\left[\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 + \frac{h''^2}{q^2}\,(2i - i^2 - 1)\right]\right\},$$

et enfin

$$K = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{2e^2}{i^2}\left[\frac{8}{3} i - i^2 - 1 - (1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right]. \quad (j')$$

Soient maintenant

$$M^2 = m^2 + K, \qquad N^2 = m^2 - K; \quad (k')$$

nous aurons, au moyen de la valeur de m^2,

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= h''^2 + 2q^2 - \frac{2(1+i)}{i} h'' e \\ &\quad + \frac{1}{i^2}\left[\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^2 \frac{h''^2}{q^2}\right] e^2, \\ N^2 &= h''^2 + \frac{2(1-i)}{i} h'' e + \frac{(1-i)^2}{i^2}\left(1 + \frac{2h''^2}{q^2}\right) e^2, \end{aligned}\right\} \quad (l')$$

et la valeur de $Z^2\,\Theta^2$ décomposée en ses facteurs pourra s'écrire

$$Z^2\,\Theta^2 = (z^2\,\Theta^2 + M^2)\,(z^2\,\Theta^2 + N^2),$$

ou bien encore

$$Z^2\,\Theta^2 = M^2\,N^2\left(1 + z^2\frac{\Theta^2}{M^2}\right)\left(1 + z^2\frac{\Theta^2}{N^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$Z = \pm\frac{MN}{\Theta}\sqrt{\left(1 + z^2\frac{\Theta^2}{M^2}\right)\left(1 + z^2\frac{\Theta^2}{N^2}\right)}. \quad (m')$$

Soit φ un angle auxiliaire lié à z par la relation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Theta}{N} z, \quad (n')$$

le même angle sera donné en fonction de y'' par cette autre équation déduite de (e'),

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{\Theta}{N}\sqrt{\frac{(y''-h'')\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2}}. \quad (o')$$

On aura réciproquement, pour la valeur de z en fonction de φ,

$$z = \frac{N}{\Theta} \operatorname{tang} \varphi; \qquad (p')$$

cette équation donne, en différentiant,

$$dz = \frac{N}{\Theta} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Substituons la valeur (p') de z dans l'équation (m'), il viendra.

$$Z = \pm \frac{MN}{\Theta} \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2 \varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi)}.$$

Divisons membre à membre l'équation qui précède par celle-ci, et nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{\left(1 + \frac{N^2}{M^2} \operatorname{tang}^2 \varphi\right)(1 + \operatorname{tang}^2 \varphi)}},$$

ou

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{N^2}{M^2} \sin^2 \varphi}}.$$

En remplaçant ici $\cos^2 \varphi$ par sa valeur $1 - \sin^2 \varphi$, il vient

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{M^2 - N^2}{M^2} \sin^2 \varphi}}.$$

Posons

$$c^2 = \frac{M^2 - N^2}{M^2}, \quad (*) \qquad (q')$$

(*) La valeur de c^2 peut être mise sous une autre forme. En effet, les équations (k') donnent, par soustraction,

$$M^2 - N^2 = 2K;$$

d'où

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, ensuite,

$$c^2 = \frac{2K}{N^2 + 2K}.$$

et, de plus,

$$\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2\varphi, \qquad (r')$$

nous aurons

$$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{M}\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

L'équation (h') comparée à cette dernière donnera

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dy''}{R} = \frac{1}{M}\frac{d\varphi}{\Delta}, \qquad (s')$$

en faisant abstraction du double signe; et, si nous voulons que cette formule soit générale, il suffira que nous disposions des valeurs de φ et Δ, de telle sorte que le rapport $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, attendu que $\frac{dy''}{R}$ doit toujours l'être, d'après ce qui a été dit au n° 13.

Voici comment on fixera les signes de ces variables : nous avons vu qu'en vertu de l'équation (f'), z doit avoir le signe de R; il résulte de l'équation (n') que tang φ doit avoir aussi le signe du radical R. Or, d'après la variation de signe de ce radical que nous avons reconnue n° 13, il faut que tang φ soit de même signe que le rapport $\frac{dy''}{ds''}$, le sens positif de ds'' étant celui que l'on obtiendrait en suivant le contour de la courbe depuis les x infinis négatifs jusqu'aux x infinis positifs.

Ainsi, dans la branche inférieure, on fera varier φ de 0° à 90°, pour y'' compris entre h'' et $\Theta + \frac{1-i}{i}e$, ce qui donne tang φ positif : en faisant décroître y'' depuis la limite $\Theta + \frac{1-i}{i}c$ jusqu'à la limite inférieure h'', φ variera de 90° à 180°, et tang φ sera négatif; il est clair qu'en faisant de nouveau croître et décroître y'', les mêmes valeurs de tang φ se reproduiront périodiquement avec les mêmes signes, et que φ pourra varier de 180° à 270°, puis de 270° à 360°, et ainsi de suite, à cause de tang $(180° + \varphi) = \text{tang}\,\varphi$. On aura donc $d\varphi$ positif dans toute l'étendue de la branche inférieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit toujours positif, il suffira que l'on prenne dans cette branche le radical Δ avec le signe +.

Dans la branche supérieure ou située du côté des y négatifs, en faisant décroître y'' depuis $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$, on pourra faire varier φ de 0° à — 90°, ce qui rendra tangφ négatif, comme cela doit être; puis, en faisant croître y'' depuis la limite supérieure négative $-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ jusqu'à la limite inférieure négative $-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$, on devra faire varier φ de — 90° à — 180°, ce qui rendra tangφ positif : en continuant ensuite à faire décroître, puis croître successivement y'', φ prendra les valeurs — 270°, — 360°, etc. On aura donc $d\varphi$ négatif dans toute l'étendue de la branche supérieure, et pour que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ reste positif, il faudra que l'on prenne Δ négatif dans toute l'étendue de cette branche.

En résumé, il faudra, pour pouvoir faire servir l'auxiliaire φ à représenter la moitié de l'étendue indéfinie de la courbe intrados, lui attribuer des valeurs croissant indéfiniment à partir de zéro, dans la branche inférieure, en donnant à Δ le signe +; puis lui donner des valeurs négatives de grandeurs absolues indéfiniment croissantes, en faisant Δ négatif dans la branche supérieure. L'autre moitié résultera de la symétrie avec la première par rapport à un axe vertical passant par le point correspondant à $\varphi = 0$. On remarquera toutefois que les intégrales $\int\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\int\Delta d\varphi$ que fournira l'intégration conserveront les valeurs absolues qu'elles prendraient si Δ et l'amplitude φ étaient positives, puisque les deux quantités Δ et $d\varphi$ sont toujours de même signe. Fixons encore le signe de la fonction Z que nous avons laissé arbitraire dans l'équation (g'); observons que, d'après l'équation (h'), $\frac{dz}{Z}$ doit être positif, et que la différentielle de z tirée de (p') donne dz de même signe que $d\varphi$, c'est-à-dire positif dans la branche inférieure et négatif dans la branche supérieure : il faudra donc que l'on fasse pareillement Z positif dans la première et négatif dans la seconde; mais nous

n'aurons point à avoir égard à cette circonstance, attendu que Z n'entrera dans les équations finales que sous la forme Z^2 et $\frac{dz}{Z}$.

Au moyen de ces conventions, l'usage des doubles signes se trouve fixé, et il deviendra facile de procéder plus loin à la vérification susmentionnée des coefficients de l'équation de la courbe intrados.

16. L'équation (a') contient, outre le facteur $\frac{dy''}{R}$, un terme en y''^2 qu'il s'agit également de transformer. Or on tire de l'équation (g'),

$$y'' = \frac{Z - \frac{1-i}{i} e (1 - z^2)}{1 + z^2},$$

et il vient, en élevant au carré,

$$y''^2 = \frac{Z^2 - 2Z \frac{1-i}{i} e (1 - z^2) + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 (1-z^2)^2}{(1 + z^2)^2};$$

puis, à cause de l'équation (h'), on en déduit

$$y''^2 \frac{dy''}{R} = \frac{Z^2}{(1+z^2)^2} \frac{dz}{Z} - 2 \frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} dz + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}.$$

Au moyen de la même équation (h') et de cette valeur, l'équation (a') devient

$$\left.\begin{aligned} dx'' = \left[q^2 + (h'' - e)^2\right] \frac{dz}{Z} - \frac{Z^2}{(1+z^2)^2} \frac{dz}{Z} + 2 \frac{1-i}{i} e \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} dz \\ - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 \frac{dz}{Z}. \end{aligned}\right\} (t')$$

Sous cette forme, on voit qu'il n'y a point à se préoccuper du signe de Z, puisque cette quantité n'entre qu'au carré et en diviseur de dz, et qu'il n'en résulte que des facteurs positifs. Transformons d'abord le terme algébrique : le coefficient de dz, dans ce terme, ne contenant que des puissances paires de z, son déve-

loppement sous forme de fractions ne devra contenir également que des puissances paires de z; on pourra donc poser

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{a}{1+z^2} + \frac{a'}{(1+z^2)^2}.$$

La réduction au même dénominateur donne

$$1 - z^2 = a(1+z^2) + a',$$

et l'on en tire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z^2,

$$1 = a + a', \quad -1 = a,$$

et, par suite, $a' = 2$: il vient donc

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\frac{dz}{(1+z^2)^2} - \frac{dz}{1+z^2};$$

or, on a, par les formules connues de réduction,

$$2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{1+z^2} + \int\frac{dz}{1+z^2},$$

d'où, en différentiant,

$$2\frac{dz}{(1+z^2)^2} = d\frac{z}{1+z^2} + \frac{dz}{1+z^2};$$

ajoutant membre à membre cette équation et l'équation différentielle précédente, il vient, pour l'expression transformée,

$$\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = d\frac{z}{1+z^2}.$$

Transformons le facteur $\frac{Z^2}{(1+z^2)^2}$ du deuxième terme du second membre de (t'), et pour cela reprenons la valeur primitive de Z^2, nous aurons

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{z^4\Theta^2 + 2z^2m^2 + n^2}{z^4+2z^2+1};$$

extrayons maintenant de la fraction qui forme le second membre de cette équation, la partie entière qu'elle contient, la division donnera

$$\frac{Z^2}{(1+z^2)^2} = \Theta^2 - 2(\Theta^2 - m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2 - n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

Enfin, extrayons aussi la partie entière de la fraction $\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2$ qui affecte le dernier terme de l'équation (t'), nous aurons

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z^2+1-2}{z^2+1} = 1 - \frac{2}{z^2+1},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2 = 1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, l'équation (t') deviendra

$$dx'' = [q^2+(h''-e)^2]\frac{dz}{Z} - \left[\Theta^2 - 2(\Theta^2-m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - (\Theta^2-n^2)\frac{1}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z}$$
$$+ 2\frac{1-i}{i}e.d\frac{z}{1+z^2} - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\left[1 - \frac{4}{1+z^2} + \frac{4}{(1+z^2)^2}\right]\frac{dz}{Z};$$

ou, en réunissant les termes de même forme,

$$\left.\begin{aligned} dx'' = &-\left[\Theta^2 - q^2 - (h''-e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{dz}{Z} + 2(\Theta^2-m^2)\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} \\ &+\left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{1}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{Z} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{Z} + 2\frac{1-i}{i}e.d\frac{z}{1+z^2}. \end{aligned}\right\} (u')$$

17. Exprimons maintenant les facteurs qui contiennent z^2 en fonctions de φ, nous aurons d'abord, en vertu de l'équation (p'),

$$1 + z^2 = 1 + \frac{N^2}{\Theta^2}\tang^2\varphi = \frac{\Theta^2\cos^2\varphi + N^2\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi},$$

ou

$$1 + z^2 = \frac{\Theta^2 - (\Theta^2 - N^2)\sin^2\varphi}{\Theta^2\cos^2\varphi};$$

on en déduit

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1-\dfrac{\Theta^2-N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi}.$$

Posons

$$\frac{\Theta^2-N^2}{\Theta^2} = c^2 + c_1^2, \qquad (v')$$

il viendra

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi}.$$

Nous allons faire voir que c_1^2 est une quantité du deuxième ordre de petitesse. En effet, la relation précédente donne, en mettant pour c^2 sa valeur (q'),

$$1 - \frac{N^2}{\Theta^2} = 1 - \frac{N^2}{M^2} + c_1^2,$$

et il en résulte

$$c_1^2 = \frac{N^2}{M^2} - \frac{N^2}{\Theta^2} = \frac{N^2}{M^2\Theta^2}(\Theta^2 - M^2):$$

les valeurs (i') de Θ^2, et (l') de M^2, ne diffèrent que dans les termes du deuxième ordre, et la différence de ces termes se réduit à

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2+\frac{h'^2}{q^2}\right)e^2;$$

si l'on a égard à la relation (b'), on en déduit

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2}{q^2}e^2.$$

Or pour former la valeur de c_1^2, en négligeant les termes du troisième ordre, on doit négliger, dans les facteurs M^2, N^2 et Θ^2, les termes du premier et du deuxième ordre, puisque le facteur que nous venons de calculer est du second; ces facteurs se réduisent dès lors à H^2, h''^2 et H^2, et il vient simplement

$$c_1^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}. \qquad (w')$$

La valeur de c_1^2 est donc effectivement du deuxième ordre, ainsi que nous venons de l'annoncer. Nous profiterons de cette circonstance pour éviter les fonctions elliptiques de troisième espèce.

Considérons, en effet, la fonction

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi};$$

nous aurons, en développant cette fonction suivant les puissances de c_1^2, au moyen du théorème de Taylor, et nous bornant au terme en c_1^2,

$$\frac{1}{1-(c^2+c_1^2)\sin^2\varphi} = \frac{1}{1-c^2\sin^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^2}\,c_1^2,$$

et la valeur ci-dessus de $\frac{1}{1+z^2}$, en faisant usage de la formule (r'), pourra s'écrire

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\,c_1^2;$$

on tire de là

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^6}\,c_1^2,$$

puis, au moyen de l'équation (p'),

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{N}{\Theta}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} + \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{\Delta^4}\,\frac{h''}{H}\,c_1^2$$

(on remplace ici, dans le terme du deuxième ordre, le rapport $\frac{N}{\Theta}$ par $\frac{h''}{H}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et ne donne lieu, par suite, qu'à des erreurs du troisième).

En élevant au carré les deux membres de cette équation, il vient

$$\frac{z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{N^2}{\Theta^2}\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 2\,\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^6}\,\frac{h''^2}{H^2}\,c_1^2,$$

équation dans laquelle $\frac{h''}{H}$ tient la place de $\frac{N}{\Theta}$ au dernier terme, par les mêmes raisons que tout à l'heure.

Substituons maintenant les diverses valeurs que nous venons d'exprimer en fonctions de φ, dans l'équation (u') dont nous multiplierons préalablement tous les termes par M, puis à la place de $M\frac{dz}{Z}$, sa valeur $\frac{d\varphi}{\Delta}$ tirée de (s'), et enfin à la place de c_1^2, sa valeur (w'); il viendra, en négligeant des termes d'ordres supérieurs au second,

$$M\,dx'' = -\left[\Theta^2 - q^2 - (h'' - e)^2 + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ 2\,(\Theta^2 - m^2)\left[\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ \left[\Theta^2 - n^2 - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{q^2\Delta^4}\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2}\frac{d\varphi}{\Delta} + 2\frac{1-i}{i}e\frac{MN}{\Theta}.d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}.$$

Il devient indispensable de présenter ici le développement de chacun des coefficients, que l'on effectuera sans peine au moyen des valeurs de Θ^2, m^2 et n^2:

$$1^{er}\text{ coefficient} = -\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$2^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right],$$

$$3^{e}\text{ coefficient} = +2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right].$$

Le quatrième coefficient n'a point de changement à subir. Quant au dernier, observons qu'il suffit d'avoir égard au terme du premier ordre, dans la valeur du produit $\frac{MN}{\Theta}$, puisque ce dernier coefficient est lui-même du premier ordre. Or nous pouvons tirer

la valeur du rapport $\frac{M}{\Theta}$, de l'expression obtenue ci-dessus de la différence $\Theta^2 - M^2$; elle donne, en effet,

$$\frac{M^2}{\Theta^2} = 1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2},$$

en substituant l'unité au rapport $\frac{H^2}{\Theta^2}$ dans le terme du deuxième ordre; on en déduit

$$\frac{M}{\Theta} = 1 - \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{e^2}{q^2}.$$

Cette quantité ne différant de l'unité que par un terme du deuxième ordre doit être réduite à l'unité dans l'expression du produit $\frac{MN}{\Theta}$, ce qui réduit ce produit à la valeur de N développée jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; or, la valeur (l') de N^2 peut s'écrire

$$N^2 = \left(h'' + \frac{1-i}{i}\, e\right)^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{q^2}\, e^2,$$

et lors même que h'', qui est toujours $> e$, serait très-petit, on aurait encore, aux termes près du deuxième ordre,

$$N = h'' + \frac{1-i}{i}\, e + \ldots.$$

Le dernier coefficient a donc pour expression

$$2\,\frac{1-i}{i}\, h''e + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2.$$

Au moyen de ces valeurs des divers coefficients, l'équation différentielle ci-dessus devient

$$\begin{aligned} dx'' = &-\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}\,i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}\,i + i^2\right)e^2\right]\left[\frac{N^2}{\Theta^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h^4}{H^4}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2\left[q^2 - 2\,\frac{h''e}{i} + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1\right)e^2\right]\left[\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^4} + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^6}\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\,\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^2}\cdot\frac{}{\Delta} + 2\left[\frac{1-i}{i}\, h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Développons les produits indiqués dans le second membre, et négligeons les termes d'ordres supérieurs au deuxième, nous aurons

$$
\begin{aligned}
M\,dx'' = -\ & \left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
& + 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(1 - \frac{4}{3}i + i^2\right)e^2\right]\frac{N^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Theta^2}\frac{d\varphi}{\Delta^3} \\
& + 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1\right)e^2\right]\frac{\cos^4\varphi}{\Delta^5}d\varphi \\
& + 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^4}{H^4}e^2\frac{\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^7}d\varphi \\
& + 8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\Delta^7}d\varphi \\
& + 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}d\varphi \\
& + 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right]d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.
\end{aligned}
\qquad (x')
$$

18. Commençons par effectuer la réduction des termes du deuxième ordre qui ont Δ^7 en dénominateur. Ces termes peuvent s'écrire

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}e^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^7}\left(\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi;$$

et la dernière parenthèse de cette expression donne

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \left(1 - \frac{h''^2}{H^2}\right)\sin^2\varphi :$$

or on peut substituer dans cette valeur, à la place de $\frac{h}{H}$, le rapport $\frac{N}{M}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre, et, par suite, ne peut produire que des erreurs du troisième; il

en résulte que le facteur $1 - \frac{h''^2}{H^2}$ pourra être remplacé par c^2 d'après (q'), et que l'on aura, en ayant égard à la relation (r'),

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2, \qquad (y')$$

valeur exacte aux quantités près du premier ordre.

La somme des termes du deuxième ordre qui ont Δ^7 en dénominateur se réduit ainsi à

$$8\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{h''^2}{H^2} c^2 \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5} d\varphi. \qquad (z')$$

Les termes qui ont Δ^5 en dénominateur dans la valeur de $M dx''$ peuvent se grouper ainsi qu'il suit :

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$+ \frac{4}{i^2}(1+i^2)e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^5}\left(\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$+ \frac{16}{3i}e^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^6}\left(2\cos^2\varphi - \frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi.$$

(Dans les deux derniers termes, qui sont du deuxième ordre, on a remplacé le rapport $\frac{N^2}{\Theta^2}$ par $\frac{h''^2}{H^2}$ qui n'en diffère que de quantités du premier ordre.) Le premier de ces termes va se réduire aisément : en effet, on a, en ayant égard aux relations (v'), (r') et (w'),

$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 - \frac{\Theta^2 - N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi = 1 - (c^2 + c_1^2)\sin^2\varphi,$$

$$\frac{N^2}{\Theta^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \Delta^2 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}\frac{e^2}{q^2}\sin^2\varphi;$$

en substituant cette valeur, le premier terme donne

$$2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}d\varphi - 4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^2}c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}d\varphi. \qquad (a'')$$

Pour transformer le deuxième terme, écrivons la parenthèse sous la forme

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\left(\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + 2\,\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi;$$

puisqu'il s'agit ici de termes du second ordre, on aura d'après (y'),

$$\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = -\Delta^2 + 2\,\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le deuxième terme donnera

$$-\frac{4}{i^2}(1+i^2)\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi + \frac{8}{i^2}(1+i^2)\,\frac{h''^2}{H^2}e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi. \quad (b'')$$

Enfin écrivons la parenthèse du troisième terme sous la forme

$$2\cos^2\varphi - \frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\left(\cos^2\varphi + \frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi\right) - 3\,\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

on aura, comme tout à l'heure,

$$2\cos^2\varphi - \frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi = 2\,\Delta^2 - 3\,\frac{h''^2}{H^2}\sin^2\varphi,$$

et le troisième terme deviendra

$$\frac{32}{3i}\,e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi - \frac{16}{i}\,\frac{h''^2}{H^2}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi. \quad (c'')$$

Le seul terme qui contienne Δ^2 en dénominateur dans l'équation (x') est

$$4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi. \quad (d'')$$

Observons que l'ensemble des termes (z'), (a''), (b''), (c'') et (d'') est l'équivalent de la somme des cinq termes compris entre le premier et le dernier du second membre de (x'); il ne reste, pour former l'expression transformée de la valeur de $M\,dx''$, qu'à réunir

ces termes aux termes extrêmes du second membre de (x'). Effectuant cette réunion, et ordonnant en même temps, il vient

$$\left.\begin{aligned} M\,dx'' = &-\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(2 - \frac{4}{3}\,i + i^2\right)e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\ &+ 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{4}{3}\,\frac{e^2}{i}\right]\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi \\ &+ 12\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{H^3}\,e^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi \\ &+ 2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}. \end{aligned}\right\} (e'')$$

18 *bis*. Nous allons nous trouver obligé de donner des formules de réduction applicables à l'équation qui précède. Proposons-nous d'abord de réduire l'exposant élevé qui entre au dénominateur du troisième terme de son second membre.

On arrivera par la différentiation, et en opérant convenablement les réductions, à la formule suivante :

$$d\,\frac{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} = \left(m - \frac{m+n}{c^2}\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi + \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi$$
$$+ (2k-1)\,c^2\,\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi,$$

d'où l'on tire inversement

$$\frac{\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi}{\Delta^{2k+1}}\,d\varphi = \frac{1}{(2k-1)\,c^2}\left\{ d\,\frac{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}{\Delta^{2k-1}} + \left(\frac{m+n}{c^2} - m\right)\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-1}}\,d\varphi \right.$$
$$\left. - \frac{m+n}{c^2}\,\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi}{\Delta^{2k-3}}\,d\varphi \right\}. \quad (f'')$$

En faisant dans cette formule $m = 1$, $n = 1$ et $k = 2$, il viendra

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{ d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} + \left(\frac{2}{c^2} - 1\right)\frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

D'un autre côté, si l'on différentie l'expression $\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$ et que l'on opère les réductions, on arrivera à la relation

$$d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2}\left[\Delta\,d\varphi - (1-c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^3}\right],$$

d'où l'on déduit inversement

$$\frac{d\varphi}{\Delta^5} = \frac{1}{1-c^2}\left\{\Delta\, d\varphi - c^2\, d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right\}. \qquad (g'')$$

Substituant cette valeur de $\frac{d\varphi}{\Delta^5}$ dans l'expression différentielle ci-dessus, on aura

$$\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\,d\varphi = \frac{1}{3c^2}\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} - \frac{2-c^2}{1-c^2}\,d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2}\,\Delta\, d\varphi - \frac{2}{c^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Or cette expression différentielle affectant dans l'équation (e'') un terme du deuxième ordre, on peut y substituer à la place de c^2 sa valeur obtenue en négligeant ceux du premier et du deuxième, laquelle est, d'après les équations (g') et (l'),

$$c^2 = \frac{2q^2}{h''^2 + 2q^2} + \ldots = 2\,\frac{q^2}{\mathrm{H}^2} + \ldots :$$

on en tire

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mathrm{H}^2}{2q^2}, \quad 1 - c^2 = \frac{h''^2}{\mathrm{H}^2}, \quad 2 - c^2 = 1 + \frac{h''^2}{\mathrm{H}^2} = 2\,\frac{h''^2+q^2}{\mathrm{H}^2},$$

et, par suite,

$$\frac{2-c^2}{1-c^2} = 2\left(1 + \frac{q^2}{h''^2}\right), \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{2-c^2}{1-c^2} = \frac{\mathrm{H}^2}{q^2} + \frac{\mathrm{H}}{h''^2}.$$

Au moyen de ces diverses valeurs, le terme qui contient Δ^5 dans l'équation (e'') se transformera en

$$2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}c^2\left\{d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} - 2\left(1+\frac{q^2}{h''^2}\right)d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + \mathrm{H}^2\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{h''^2}\right)\Delta\, d\varphi - \frac{\mathrm{H}^2}{q^2}\,\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}. \qquad (h'')$$

Occupons-nous maintenant du facteur $\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi$; nous aurons

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1-\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi :$$

on peut écrire

$$-\frac{\sin^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\,\frac{1-c^2\sin^2\varphi-1}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{d\varphi}{\Delta^3}\right);$$

on en déduit

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-(1-c^2)\,\frac{d\varphi}{\Delta^3}\right),$$

puis, en ayant égard à l'équation (g''),

$$\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\,d\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{\Delta}-\Delta\,d\varphi+c^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right),$$

et le deuxième terme du second membre de (e'') devient

$$2\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]\left[\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{c^2}\Delta\,d\varphi+d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right]. \qquad (i'')$$

Réunissons les expressions (h'') et (i'') aux deux termes extrêmes du second membre de l'équation (e''), puis ordonnons; il viendra

$$\left.\begin{aligned}
M\,dx'' = {} & \left\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]-\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{1}{i^2}\left(2-\frac{4}{3}i+i^2\right)c^2\right]\right. \\
& \qquad\qquad -2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2h''^2}{q^2}e^2\left\{\frac{d\varphi}{\Delta}\right. \\
& -\left\{\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{H^2}{q^2}e^2\right\}\Delta\,d\varphi \\
& +2\left\{q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1+\frac{h''^2}{q^2}\right)c^2\right\}d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \\
& +2\left\{\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right\}d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} \\
& +2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2\,d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.
\end{aligned}\right\}(j'')$$

Avant d'écrire l'intégrale de cette expression, nous réduirons les coefficients de ses différents termes. Et d'abord considérons la quantité

$$\frac{2}{c^2}\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right]$$

qui fait partie des deux premiers coefficients : substituons à c^2 sa valeur

$$c^2 = \frac{2K}{M^2}$$

qu'on obtient en vertu de $M^2 - N^2 = 2K$, la quantité ci-dessus deviendra

$$M^2 \frac{q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{K}.$$

Soit, pour abréger,

$$K_1 = q^2 - \frac{2}{i} h'' e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i};$$

la valeur (j') de K pourra se mettre sous la forme

$$K = K_1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2,$$

et la même quantité deviendra

$$M^2 \frac{K_1}{K_1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2} = \frac{1}{1 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{e^2}{q^2}} M^2,$$

en divisant haut et bas par K_1, et substituant ensuite q^2 à la place de K_1, dans le terme du deuxième ordre; mais si nous réduisons en série le facteur de M^2, la quantité dont il s'agit aura pour expression

$$\left[1 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{e^2}{q^2}\right] M^2;$$

effectuant le produit indiqué ici au moyen de la valeur (l') de M^2, cette quantité deviendra

$$h''^2 + 2q^2 - 2\left(\frac{1+i}{i}\right) h'' e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3} i - 3i^2 - 3 - 2(1-i)^3 \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2$$
$$+ 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(1 + \frac{h^2}{q^2}\right)\left(2 + \frac{h^2}{q^2}\right) e^2.$$

Réduisons les termes du deuxième ordre, ces termes deviendront successivement

$$\frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i - 3i^2 - 3 + 2(1-i)^2\left(2 + 2\frac{h''^2}{q^2} + \frac{h''^4}{q^4}\right)\right\}e^2$$

$$= \frac{1}{i^2}\left\{\frac{26}{3}i - 3i^2 - 3 + 4 - 8i + 4i^2 + 2(1-i)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)\frac{h''^2}{q^2}\right\}e^2$$

$$= \frac{1}{i^2}\left\{1 + \frac{2}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right\}e^2,$$

et l'on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{c^2}\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}\right] &= h''^2 + 2q^2 - 2\frac{1+i}{i}h''e \\ &\quad + \frac{1}{i^2}\left[1 + \frac{2}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right]e^2.\end{aligned}\right\}\ (k'')$$

Cette valeur va nous servir à opérer la réduction des coefficients de $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\Delta d\varphi$ dans l'équation (j''); en effet, pour former le premier, nous devons ajouter au second membre de (k'') les termes

$$-q^2 + \frac{2}{i}h''e - \frac{1}{i^2}\left[2 - \frac{4}{3}i + i^2 + 2(1-i)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}\right]e^2.$$

En ajoutant et réduisant, il vient

$$\text{coeff. de } \frac{d\varphi}{\Delta} = h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{2i-1}{i^2}e^2.$$

Pour former le coefficient suivant, il faut ajouter au même membre les termes

$$-2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2}{q^2}e^2 - 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{H^2h''^2}{q^4}e^2,$$

et changer ensuite le signe du résultat : effectuant ces opérations, on a

$$\text{coeff. de } \Delta\, d\varphi = -\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,i + i^2 - 2\,(1-i)^2\,\frac{\mathrm{H}^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

On peut donner au coefficient de e^2 une autre forme en remplaçant H^2 par sa valeur $h''^2 + 2q^2$, d'où résulte $\frac{\mathrm{H}^2}{q^2} = 2 + \frac{h''^2}{q^2}$; on trouve, en faisant cette substitution,

$$\text{coeff. de } \Delta\, d\varphi = -\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

En réunissant les termes en e^2 du coefficient du terme suivant, on aura

$$\text{coeff. de } d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^3\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right].$$

Au moyen de ces valeurs réduites des coefficients, l'équation (j''') devient finalement

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{M}\,dx'' = {} & +\left[h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{2i-1}{i^2}\,e^2\right]\frac{d\varphi}{\Delta} \\
& -\left[h''^2 + 2q^2 - 2\,\frac{1+i}{i}\,h''e + \frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}\,i - 3i^2 - 3 - 2\,(1-i)^2\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]\Delta\, d\varphi \\
& +2\left[q^2 - \frac{2}{i}\,h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}\,i - i^2 - 1 - (1-i)^3\,\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} \\
& +2\left[\frac{1-i}{i}\,h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right] d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} \\
& +2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}\,e^2\, d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}.
\end{aligned}\right\} (l'')$$

19. Maintenant l'intégration de l'équation différentielle de l'intrados se trouve dépendre des fonctions elliptiques. En effet, posons, comme le fait Legendre,

$$F(c,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta},\qquad E(c,\varphi)=\int_0^{\varphi}\Delta\,d\varphi;\qquad (m'')$$

posons en même temps

$$\left.\begin{aligned}
A&=h''^2+q^2-2h''e+\frac{2i-1}{i^2}e^2,\\
B&=h''^2+2q^2-2\frac{1+i}{i}h''e+\frac{1}{i^2}\left(\frac{26}{3}i-3i^2-3-2(1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2,\\
C&=2\left[q^2-\frac{2}{i}h''e+\frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i-i^2-1-(1-i)^2\frac{h'^2}{q^2}\right)e^2\right],\\
D&=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right],\\
G&=2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2;
\end{aligned}\right\}\quad (n'')$$

nous aurons, en intégrant l'équation (l''), et supposant x'' nul en même temps que φ,

$$Mx''=A.F(c,\varphi)-B.E(c,\varphi)+C\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}+D\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2}+G\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3}\quad (o'')$$

(*) Nous ferons remarquer que les coefficients B et C, comparés aux expressions (l') et (j'), donnent

$$B=M^2,\quad C=2K.$$

Il est probable qu'en suivant dans l'intégration une marche plus directe, on aurait obtenu ces relations *a priori*. Cela eût été d'autant plus intéressant que nous ne pouvons affirmer leur exactitude que jusque dans les termes du deuxième ordre inclusivement. (Au lieu de rechercher les moyens de réduire les développements analytiques dans cette partie du Mémoire, nous avons préféré consacrer le temps dont nous pouvions disposer, au calcul des Tables que l'on trouvera à la fin de la deuxième partie.)

Les équations précédentes simplifient la valeur de c^2 qui devient

$$c^2=\frac{C}{B};$$

et l'on peut écrire $\sqrt{B}$ à la place de M, dans l'équation (o'').

Telle est l'équation de l'intrados qu'il s'agissait d'obtenir, et dans laquelle x'' se trouve implicitement affecté du double signe, en vertu de la relation (o'). Nous n'avons tenu compte que de l'un des deux signes en discutant les parties des deux branches de la courbe qui s'étendent vers les x positifs; la symétrie autour d'un axe qui se confond actuellement avec l'axe des y en vertu de la valeur nulle de la constante de l'intégration, nous a dispensé de nous occuper des deux signes à la fois. On voit maintenant qu'en ayant égard au double signe de $\operatorname{tang}\varphi$, l'équation (o'') représente la courbe dans toute son étendue.

On remarquera, ainsi que nous l'avons annoncé plus haut, que l'expression de x'' perd deux termes lorsqu'on suppose $i = 1$; en effet, cette hypothèse rend nuls les coefficients D et G, en même temps qu'elle simplifie les valeurs des trois premiers.

Avant de faire usage de l'équation (o'') en l'appliquant à la question des arches de pont, il convient d'indiquer un procédé rapide pour le calcul des fonctions F et E, et de vérifier l'exactitude des coefficients (n'').

CALCUL DES FONCTIONS F ET E.

20. On emploie deux procédés différents pour le calcul de ces fonctions, suivant que le module c est voisin de l'unité ou de zéro. Il est facile de voir que, dans la question des arches de pont, ce module diffère peu de l'unité : en effet, c^2 ne diffère de 1, en vertu de l'équation (q'), que de la quantité $\frac{N^2}{M^2}$; or le carré h''^2 de l'ordonnée du sommet de l'intrados est en général assez petit par rapport à $2q^2$, à cause de la grandeur du produit $e\mu_0$, équation (s); c^2 diffère donc peu de l'unité.

Dans cette hypothèse, on calcule une échelle de modules c_1, c_2, c_3, . . . , c_n par les formules suivantes:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \quad c_3 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}};$$

on calcule pareillement une série d'amplitudes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, par les équations

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = c \sin\varphi,$$
$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1,$$
$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = c_2 \sin\varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(2\varphi_n - \varphi_{n-1}) = c_{n-1} \sin\varphi_{n-1},$$

et l'on s'arrête, dans le calcul des modules, au module c_n qui devient égal à l'unité, du moins, au degré d'approximation que l'on veut obtenir; on poursuit le calcul des amplitudes jusqu'à celle φ_n qui correspond à $c_n = 1$, d'où résulte l'égalité de toutes les amplitudes suivantes. On a ensuite, entre les fonctions F des modules et amplitudes de mêmes indices, les relations

$$F(c_n, \varphi_n) = \log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_n\right), \quad (*)$$
$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{2}{1 + c_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$
$$F(c_{n-2}, \varphi_{n-2}) = \frac{2}{1 + c_{n-2}} F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(c_2, \varphi_2) = \frac{2}{1 + c_2} F(c_3, \varphi_3),$$
$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{2}{1 + c_1} F(c_2, \varphi_2),$$
$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1 + c} F(c_1, \varphi_1).$$

(*) Le logarithme qui figure ici est un logarithme népérien ou hyperbolique.

On en déduirait, en multipliant ces équations membre à membre,

$$F(c,\varphi)=\frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c_1}\cdot\frac{2}{1+c_2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1+c_{n-2}}\cdot\frac{2}{1+c_{n-1}}\log\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi_n\right);$$

mais le calcul de la fonction E exige, lorsque c diffère peu de l'unité, que l'on fasse usage des fonctions F intermédiaires.

Au moyen des modules, amplitudes et fonctions F précédemment calculées, les formules suivantes serviront au calcul de la fonction E:

$$E(c_n,\varphi_n)=\sin\varphi_n,$$

$$E(c_{n-1},\varphi_{n-1})=(1+c_{n-1})\,E(c_n,\varphi_n)+(1-c_{n-1})\,F(c_n,\varphi_n)-c_{n-1}\sin\varphi_{n-1},$$

$$E(c_{n-2},\varphi_{n-2})=(1+c_{n-2})\,E(c_{n-1},\varphi_{n-1})+(1-c_{n-2})\,F(c_{n-1},\varphi_{n-1})-c_{n-2}\sin\varphi_{n-2},$$

. . . . . .

$$E(c_2,\varphi_2)=(1+c_2)\,E(c_3,\varphi_3)+(1-c_2)\,F(c_3,\varphi_3)-c_2\sin\varphi_2,$$

$$E(c_1,\varphi_1)=(1+c_1)\,E(c_2,\varphi_2)+(1-c_1)\,F(c_2,\varphi_2)-c_1\sin\varphi_1,$$

$$E(c,\varphi)=(1+c)\,E(c_1,\varphi_1)+(1-c)\,F(c_1,\varphi_1)-c\sin\varphi.$$

Les formules qui précèdent peuvent paraître longues à calculer: pourtant il n'en est rien, dans le cas qui nous occupe : en général, il suffira de calculer un seul module et une seule amplitude, ce qui réduira le calcul de F et de E à l'emploi de la première et de la dernière formule de chaque série.

On pourrait profiter de la petite différence que nous admettons entre c et l'unité pour réduire les intégrales (m'') en séries ordonnées suivant les puissances de $(1-c^2)$; nous préférons nous en tenir aux formules que nous venons de reproduire, attendu qu'elles sont encore facilement applicables au calcul des fonctions F et E lorsque c diffère beaucoup plus de l'unité que nous ne l'avons supposé.

VÉRIFICATION DE L'EXACTITUDE DES COEFFICIENTS (n'').

21. Nous ne prétendons pas donner ici la vérification générale de ces coefficients, ce qui conduirait à des calculs fort pénibles; mais seulement les vérifier dans quelques cas particuliers. Nous allons différentier l'équation (o''), et pour cela, considérons la fonction

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k};$$

nous aurons, en différentiant,

$$d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^k} = \frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^k}d\varphi + k\,\frac{c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^{k+2}}d\varphi,$$

et, en faisant successivement dans cette formule $k=1$, $k=2$ et $k=3$, nous obtiendrons les différentielles des parties variables des derniers termes du second membre de (o''). Quant à celles des premiers termes, elles résulteront de la suppression du signe $\int$ dans les équations (m''). Nous aurons ainsi

$$\mathrm{M}\,dx'' = \mathrm{A}\,\frac{d\varphi}{\Delta} - \mathrm{B}\Delta d\varphi + \mathrm{C}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta} + c^2\,\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)d\varphi$$

$$+\mathrm{D}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^2}+2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right)d\varphi+\mathrm{G}\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^3}+3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^5}\right)d\varphi.$$

Or nous avons, équation (s'),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dy''}{\mathrm{R}},$$

et, d'après l'équation (a'),

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{dx''}{q^2+(h''-e)^2-y''^2},$$

en faisant abstraction du double signe; on en tire

$$\mathrm{M}\Delta\,\frac{dx''}{d\varphi} = q^2+(h''-e)^2-y''^2;$$

égalant le second membre de cette équation à la valeur de $M\Delta\frac{dx''}{d\vartheta}$ tirée de l'expression de Mdx'', il vient

$$q^2+(h''-e)^2-y''^2=A-B\Delta^2+C\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^2}\right)$$
$$+D\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta}+2c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right)+G\left(\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\Delta^2}+3c^2\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta^4}\right). \quad (p'')$$

Cette relation entre y'' et φ étant générale, doit pouvoir être aisément vérifiée dans certains cas particuliers.

Soit, en premier lieu, $y''=h''$ ordonnée du sommet de l'intrados, l'équation (o') donne $\text{tang}\varphi=0$, d'où $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$, et $\Delta=1$. Ces valeurs étant substituées dans l'équation (p''), il en résulte la relation suivante entre les coefficients,

$$q^2-2h''e+e^2=A-B+C+D+G. \quad (q'')$$

Soit, en second lieu, $y''=-\left(h''+2\frac{1-i}{i}e\right)$ ordonnée du point de la branche supérieure le plus voisin de l'axe des x, l'équation (o') donnera pareillement $\text{tang}\varphi=0$, et l'on aura comme tout à l'heure $\sin^2\varphi=0$, $\cos^2\varphi=1$; mais le point dont il s'agit appartenant à la branche supérieure, nous devrons, d'après ce qui a été dit au n° 15, donner à Δ le signe $-$, d'où résultera $\Delta=-1$. Substituant ces valeurs dans l'équation (p''), il viendra

$$q^2-2h''e+e^2-4\frac{1-i}{i}h''e-4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=A-B+C-D+G. \quad (r'')$$

Soustrayons membre à membre cette équation de la précédente, nous aurons d'abord

$$4\frac{1-i}{i}h''e+4\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2=2D,$$

puis, en divisant par 2 et transposant,

$$D=2\left[\frac{1-i}{i}h''e+\left(\frac{1-i}{i}\right)^2e^2\right].$$

Or cette valeur de D est précisément celle qui fait partie des équations (n''); il est donc seulement nécessaire de vérifier la relation (q'') pour que les deux équations (q'') et (r'') se trouvent à la fois vérifiées.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur les équations (n'') pour voir que la somme des termes de l'ordre de q^2 contenus dans les seconds membres, en y changeant le signe de B, se réduit effectivement à q^2, ainsi que l'exige la relation (q''). La somme des coefficients des termes du premier ordre qui ont tous $h''e$ pour facteur est $-2+2\frac{1+i}{i}-\frac{4}{i}+2\frac{1-i}{i}$, somme qui se réduit évidemment à -2, comme dans l'équation (q''). Enfin, cette même équation exige que la somme des coefficients de e^2, dans le second membre de (n''), se réduise à l'unité. Or cette somme est

$$\frac{1}{i^2}\left[2i-\frac{26}{3}i+\frac{32}{3}i+3i^2-4i^2-1+3-4+2(1-i)^2\left(\frac{h''^2}{q^2}-\frac{2h''^2}{q^2}+1+\frac{h''^2}{q^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{i^2}\left[4i-i^2-2+2(1-i)^2\right]=\frac{1}{i^2}(4i-i^2-2+2-4i+2i^2)=\frac{i^2}{i^2}=1.$$

On pourrait encore appliquer l'équation (p'') aux ordonnées extrêmes $y''=\Theta+\frac{1-i}{i}e$, et $y''=-\left(\Theta-\frac{1-i}{i}e\right)$ pour lesquelles on a $\operatorname{tang}\varphi=\pm\infty$ et $\sin^2\varphi=1$; mais alors on a $\Delta=\pm\sqrt{1-c^2}$, ou, d'après la note du n° 19, $\Delta=\pm\frac{\sqrt{B-C}}{\sqrt{B}}$, et la vérification ne pourrait s'opérer algébriquement qu'au moyen de développements fort longs dans lesquels nous nous dispenserons d'entrer, pensant que les vérifications précédentes et la comparaison des valeurs numériques fournies par l'équation (o'') avec de nombreux tracés déduits de l'expression (w) du rayon de courbure, prouvent suffisamment l'exactitude de nos formules.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES.

22. Avant de nous livrer à l'examen des deux cas principaux que présente la question des arches de pont, lesquels sont ceux

des arches dites *en arc de cercle* et des arches *en anse de panier*, nous croyons devoir résumer ici les diverses formules auxquelles nous sommes parvenu dans les numéros précédents, en les présentant dans l'ordre de leur application, et modifiant l'expression de quelques coefficients suivant les indications fournies par la note du n° 19; et cela, dans le but d'éviter de faire dépendre un coefficient de la différence de grands nombres peu différents. Il résulte de cette note que l'on a

$$B = M^2, \qquad C = 2K, \qquad c^2 = \frac{C}{B}.$$

Or, d'après la note du n° 15, on a d'ailleurs

$$M^2 = N^2 + 2K,$$

et, par suite,

$$B = M^2 = N^2 + C.$$

Enfin, nous avons trouvé dans le même n° 15,

$$\Theta^2 - M^2 = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2;$$

il en résulte

$$\Theta^2 = M^2 + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \frac{H^2}{q^2} e^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 \left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right) e^2.$$

Nous nous servirons de ces relations pour déduire des équations (s), (l'), (o'), (n''), (o''), etc., les formules qui vont figurer dans le tableau suivant :

Tableau des formules relatives à l'équation de la courbe intrados.

$$h'' = h + e$$

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$$

$$N^2 = h''^2 + 2\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(1 + 2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2$$

$$A = h''^2 + q^2 - 2h''e + \frac{2i-1}{i^2}e^2$$

$$C = 2\left[q^2 - \frac{2}{i}h''e + \frac{2}{i^2}\left(\frac{8}{3}i - i^2 - 1 - (1-i)^2\frac{h''^2}{q^2}\right)e^2\right]$$

$$B = C + N^2$$

$$D = 2\left[\frac{1-i}{i}h''e + \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 e^2\right]$$

$$G = 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\frac{h''^2}{q^2}e^2$$

$$\Theta^2 = B + 2\left(\frac{1-i}{i}\right)^2\left(2 + \frac{h''^2}{q^2}\right)e$$

$$c^2 = \frac{C}{B} \qquad (s'')$$

$$\tan g^2\varphi = \frac{\Theta^2}{N^2}\,\frac{(y''-h'')\left(y''+h''+2\frac{1-i}{i}e\right)}{\Theta^2 - \left(y'' - \frac{1-i}{i}e\right)^2}$$

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi$$

$$F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$E(c,\varphi) = \int_0^{\varphi}\Delta\, d\varphi$$

par les formules du n° 20, ou par les Tables de fonctions elliptiques.

$$\sqrt{B}.x'' = A.F(c,\varphi) - B.E(c,\varphi) + C\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} + D\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^2} + G\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' = \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y''.$$

Il résulte de l'inspection de ce tableau, que si l'on considère comme donné le rapport i de la densité du massif à celle de la voûte, les formules qui le composent ne se trouvent renfermer d'autres constantes indéterminées que les trois quantités e, μ_0 et h.

23. Les données ordinaires d'un projet d'arche sont : la demi-ouverture, la hauteur sous clef à partir des naissances, ou la flèche, puis la hauteur de la charge au-dessus de la clef, que nous avons désignée par h. (Nous verrons, dans la deuxième partie, comment on ramène à dépendre de ces données, la solution des questions où l'une d'elles serait remplacée par une condition relative à la différence de niveau des naissances et de la chaussée.) Il résulte de cette énumération, que le nombre des inconnues à déterminer se réduit effectivement aux deux seules quantités e et μ_0. On a coutume de ne point avoir égard à la charge h dans le calcul d'une arche, et cependant elle mérite plus d'attention. Disons d'abord que la hauteur de cette charge provient ordinairement, dans les ponts, d'un lit de maçonnerie en béton, reposant sur le plan horizontal tangent à l'extrados, d'une couche de cailloux, d'une autre de gravier, d'une couche de sable, et enfin du pavé lui-même, quant à la chaussée; dans les ponts-canaux, plusieurs de ces couches sont remplacées par une couche d'eau. Nous supposerons remplacée, pour le calcul, la hauteur de chacune d'elles par la hauteur d'une couche de la matière du massif qui aurait le même poids, ce qui se fera en la multipliant par le rapport de sa densité propre à celle du massif; et ce sera la somme de ces hauteurs réduites que nous désignerons par h.

Actuellement, distinguons les deux espèces d'arches dont nous devons nous occuper. L'équation de l'intrados que nous avons obtenue ci-dessus est celle d'une courbe qui diffère assez du cercle pour qu'on ne doive pas nous supposer l'intention de lui substituer un arc de cercle, même vers le sommet : néanmoins, pour éviter toute confusion, nous désignerons par *arches incomplètes* celles du genre des arches dites *en arc de cercle,* dans lesquelles les tangentes extrêmes à l'intrados réel feront, avec l'horizontale,

un angle moindre que 90°; et nous nommerons *arches complètes* les arches *en anse de panier* où ces tangentes extrêmes sont verticales. Ces dénominations se justifient par la considération des angles que font les tangentes menées au sommet et aux extrémités de l'intrados.

Soient f et g la flèche et la demi-ouverture données. Dans le cas des *arches incomplètes*, se donner ces deux quantités, revient à faire passer la courbe intrados par un point donné dont la position est celle des naissances, et il ne peut résulter de l'expression des coordonnées x'' et y'' en fonction de f et g, qu'une seule équation de condition entre les données et les inconnues du problème; d'où il suit que, dans les arches dont il s'agit, on peut prendre arbitrairement l'une des quantités e et μ_0. Dans le cas des *arches complètes*, outre cette condition résultant des données f et g, il en existe une autre introduite par la verticalité des tangentes extrêmes, et qu'on exprimera en écrivant dans l'équation propre à fournir le maximum de l'abscisse de l'intrados réel, à la place de y'', sa valeur en fonction de f. On a donc ici deux conditions qui suffiront pour déterminer e et μ_0.

La constante μ_0 est la valeur au sommet de l'arche, de la variable μ dont nous avons expliqué le caractère au n° 6. Cette variable exprime, ainsi que nous l'avons dit, la hauteur d'une colonne de la matière des voussoirs dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans les joints normaux. Cette quantité, d'après l'expression (v), croît depuis le sommet de l'arche avec les ordonnées, et il importe que la plus grande valeur qu'elle puisse prendre ne dépasse jamais une certaine limite fixée par la résistance des matériaux employés. Nous désignerons par μ_1 la valeur de μ au point inférieur de la voûte, ou dans le joint des naissances. Il est bon de connaître à peu près la plus grande des valeurs de μ ou de μ_1 qu'on puisse adopter. Or Navier, dans son *Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique*, n° 176, fixe la limite des pressions que l'on peut employer avec sécurité dans les arches, à 610 kilogrammes pour une surface de 25 centimètres

carrés. On en déduit $\mu = 100$ mètres, si l'on prend pour poids du mètre cube, $\varpi = 2440$ kilogrammes; c'est le poids du liais de Bagneux : les autres pierres employées aux environs de Paris donneraient des valeurs de μ un peu plus fortes, à cause de leur moindre densité. Suivant Navier, on ne s'exposerait donc point à trop charger les voûtes, toutes les fois que μ ou μ_1 ne dépasserait pas 100 mètres. Il va sans dire que les matériaux employés doivent présenter, quant à la résistance, les qualités des pierres employées dans les bonnes constructions, comme celles que Navier a dû avoir en vue, lorsqu'il a énoncé son assertion. Nous pouvons présenter un exemple frappant dans lequel on reconnaîtra facilement que la limite $\mu = 100$ mètres a été dépassée; les piliers prismatiques de l'aqueduc de Spolette ont plus de 100 mètres de hauteur, et sont chargés d'une énorme construction à leur partie supérieure : il est facile d'en conclure, malgré le défaut d'indications sur la dureté et la densité des pierres employées, que la valeur de μ à la partie inférieure des piliers, doit excéder 100 mètres.

Nous allons maintenant tirer de l'équation (v) une relation entre μ_0 et μ_1. Cette équation est

$$\mu - \mu_0 = y' - h'' + \frac{1}{3\mu_0}(y'^2 - h'^2);$$

nous rappellerons qu'on y a négligé les termes du deuxième ordre qui se trouveraient être du troisième par rapport à μ : or, si nous négligeons les différences des coordonnées de l'intrados réel et de l'intrados fictif, qui sont du deuxième ordre de petitesse, nous aurons, à ces différences près, au point inférieur de l'intrados,

$$y'' - h'' = f,$$

d'où

$$y'' + h'' = f + 2h'',$$

et

$$\frac{y'^2 - h'^2}{\mu_0} = \frac{f(f + 2h)}{\mu_0};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, et écrivant μ_1 au lieu de μ, on en déduira

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}; \qquad (t'')$$

on tire inversement de cette équation

$$\mu_0 = \mu_1 - f - i\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \qquad (u'')$$

expression dans laquelle f pourrait être négligé devant μ_1 au dénominateur du dernier terme.

L'usage de ces équations est facile à saisir : dans le cas des *arches incomplètes* où μ_0 est arbitraire, on fixera la limite μ_1 arbitrairement, mais de sorte qu'elle ne dépasse pas 100 mètres par exemple, et l'on déduira μ_0 de l'équation (u''). Lorsqu'il s'agira d'*arches complètes*, et que μ_0 et e auront été déterminés de manière à satisfaire aux deux conditions énoncées plus haut, on fera usage de l'équation (t'') pour calculer μ_1 et s'assurer que sa valeur ne dépasse pas la limite de μ qu'on aura adoptée; si elle la dépassait, il faudrait nécessairement modifier les données du projet.

CAS DES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

24. Nous avons vu dans le numéro précédent qu'une des deux constantes e et μ_0 reste arbitraire dans les *arches incomplètes :* cela résultera avec évidence des calculs qui vont suivre. En général, on n'a aucune raison de se donner *a priori* l'épaisseur à la clef, ou en un joint quelconque, tandis qu'au contraire on est intéressé, dans le but d'économiser les matériaux, à utiliser leur résistance, à faire supporter à chaque joint la plus grande charge possible par unité de surface. Il est clair, en effet, qu'un joint devant résister à une charge totale déterminée, si la pression par unité de surface est inférieure à celle maximum que la pierre

ou le mortier pourraient supporter sans inconvénient, la surface du joint, et par suite, le volume du voussoir seront plus grands que si la pression par unité de surface était portée au maximum, la pression totale restant la même. Nous ajouterons, à ce sujet, une observation qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, c'est que la condition que la résultante des pressions passe par le milieu de l'épaisseur est également favorable à la diminution de l'étendue des surfaces de joint; cela résulte de ce que la pression par unité de surface va en augmentant vers les extrémités de la surface de joint dont se rapproche la résultante des pressions : en effet, lorsqu'elle a atteint son maximum vers ces points, elle se trouve, dans les autres, plus ou moins au-dessous de ce maximum, et la pression totale devient moindre que pour un joint d'égale étendue dans lequel la résultante des pressions passerait par le milieu, et où la pression par unité de surface serait portée à la même valeur maximum que dans le premier. Donc, si la pression totale que supporte le premier est donnée, en faisant passer la résultante des pressions par le milieu du joint, on pourra réduire son étendue sans augmenter la pression maximum par unité de surface.

Ces considérations doivent engager les ingénieurs à adopter autant que possible les plus grandes valeurs des pressions par unité de surface dans les joints, ou de la quantité μ qui les représente. On pourra se donner généralement μ_1 *a priori*, pourvu qu'il n'excède pas 100 mètres suivant Navier, et l'on déduira μ_0 de l'équation (u'') que nous reproduisons en y joignant sa relation avec q^2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_0 = \mu_1 - f - i\,\dfrac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \\ q^2 = 2\,\dfrac{c\,\mu_0}{i}. \end{array}\right. \qquad (v'')$$

Disons cependant qu'on pourrait au besoin profiter de ce que la quantité μ_0 reste arbitraire pour l'assujettir à quelque condition particulière.

Il reste maintenant à déterminer e. Nous allons former une équation entre cette quantité, la flèche f et l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, que nous désignerons par y''_1. Rappelons que l'intrados fictif et l'intrados réel sont distants de la quantité 2δ, différence entre l'épaisseur réelle ε et l'épaisseur fictive e, mesurée suivant la normale [voir équation (e)]. Il en résulte que la valeur de l'ordonnée du point inférieur de l'intrados réel est

$$y''_1 + 2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en désignant par l'indice 1 les quantités qui se rapportent à ce point. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est

$$h'' + 2\delta_0;$$

mais la différence de ces ordonnées est égale à la flèche f, d'où il suit que l'on a

$$f = y''_1 - h'' - 2\delta_0 + 2\delta_1 \cos\alpha_1 :$$

mettant ici pour $2\delta_0$ et $2\delta_1$ leurs valeurs tirées de (x), et prenant la valeur de y''_1, il vient

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(h'' - y''_1 \cos\alpha_1).$$

Or le dernier terme du second membre étant du deuxième ordre, on peut y substituer à y''_1 et $\cos\alpha_1$ leurs expressions privées des termes du premier et du deuxième ordre. Remplaçant d'abord h'' par $y''_1 - f$, la parenthèse devient

$$y''_1(1 - \cos\alpha_1) - f;$$

mettant ensuite pour $1 - \cos\alpha_1$ sa valeur approchée $\frac{y_1''^2 - h''^2}{q^2}$ ou

$\frac{f(f+2h'')}{q^2}$, et $f + h''$ à la place de y''_1, l'expression précédente se réduit à

$$-f\left(1 - \frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right).$$

et il vient finalement

$$y''_1 = f + h'' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} f\left[1 - \frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right]. \qquad (w'')$$

On pourra le plus souvent négliger le dernier terme de cette expression.

Soit de même x''_1 l'abscisse du point inférieur de l'intrados fictif, on aura évidemment

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et la valeur de $\sin\alpha_1$ dans cette équation pourra se déduire de celle de $1 - \cos\alpha_1$ obtenue plus haut en négligeant les termes du premier et du deuxième ordre : nous aurons ainsi les deux relations

$$1 - \cos\alpha_1 = \frac{f(f+2h'')}{q^2},$$

$$1 + \cos\alpha_1 = 2 - \frac{f(f+2h'')}{q^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre et extrayant ensuite les racines,

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1} = \sqrt{\frac{f(f+2h'')}{q^2}\left[2 - \frac{f(f+2h'')}{q^2}\right]}.$$

La première des deux équations précédentes donnerait d'ailleurs la valeur approchée de $\frac{1}{2}\alpha_1$, en l'écrivant comme il suit :

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{f(f+2h'')}{2q^2}.$$

On a enfin

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'').$$

La valeur ci-dessus de x''_1, en passant tous les termes dans le premier membre, donne l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f + h'')\sqrt{\frac{f(f+2h')}{q^2}\left[2 - \frac{f(f+2h'')}{q^2}\right]} - g = 0, \quad (x'')$$

dans laquelle le second terme sera le plus souvent négligeable.

C'est maintenant du système des équations (s'') jointes à (v''), (w'') et (x''), qu'il s'agit de tirer la valeur de l'inconnue e. On comprend l'impossibilité de l'élimination et la nécessité de recourir aux méthodes de tâtonnements ou d'approximations successives. On pourra y procéder soit en s'aidant de tracés fondés sur l'expression (w) du rayon de courbure ρ'', soit au moyen des seuls calculs numériques. Voici, en nous en tenant pour le moment à ces derniers, comment il faudra s'y prendre : on attribuera à l'inconnue e une valeur hypothétique plus ou moins approchée, dont nous allons bientôt donner le moyen de fixer les limites; puis, s'étant donné μ_1 dans les limites indiquées plus haut, on calculera μ_0, q^2 et y''_1 par les équations (v'') et (w''); on calculera ensuite x'' par le système des équations (s'') dans lesquelles on fera $y'' = y''_1$, et l'on substituera cette valeur pour x''_1, dans le premier membre de l'équation (x'') qui devrait s'annuler, si la valeur hypothétique de e d'où l'on est parti se trouvait être égale à celle cherchée. Comme il n'en sera pas généralement ainsi, on fera varier ensuite cette quantité, et l'on recommencera les calculs, ce qui donnera, pour le premier membre de (x''), un résultat différent du précédent : une simple proportion suffira pour corriger en grande partie l'erreur de e; et, si l'on substitue la valeur qui a subi une première correction, on aura un troisième résultat déjà beaucoup plus voisin de zéro que les deux premiers. Enfin ces trois résultats fourniront un moyen de corriger la valeur de e au-

tant qu'il est nécessaire, soit en employant les courbes d'erreurs, soit en ayant recours à tout autre procédé d'interpolation. (Nous avons indiqué un de ces procédés déduit du théorème de Taylor, au § XLVI de l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, troisième article.)

LIMITES DE LA VALEUR DE e, DANS LES ARCHES *INCOMPLÈTES*, DITES *EN ARC DE CERCLE*[1].

25. Nous obtiendrons une limite inférieure de la valeur de e, en partant de cette considération, que le rayon de courbure de l'intrados au sommet est plus grand que le rayon du cercle passant par les naissances et tangent à l'intrados en son sommet. Cette assertion se vérifie aisément : en effet, d'après l'équation (w) dans laquelle on fera, pour plus de simplicité, abstraction des termes du premier et du deuxième ordre, le rayon de courbure va en décroissant à partir du sommet de l'intrados. Or, si le rayon de courbure au sommet était égal à celui de l'arc tangent et passant par les naissances, la diminution du rayon de courbure ne permettrait pas à la courbe d'atteindre les naissances, et celle-ci serait embrassée par l'arc de cercle dont le rayon est constant; il en serait de même *a fortiori* si le rayon de courbure de l'intrados se trouvait au sommet être plus petit que le rayon de l'arc tangent. Donc, pour que l'intrados passe par les naissances, il faut que ce rayon de courbure au sommet excède le rayon de l'arc tangent. On peut conclure de là que l'intrados embrasse l'arc de cercle vers le sommet, et de ce qu'ils passent tous deux par les naissances, il résulte que l'angle de la tangente extrême à l'intrados, avec l'axe des x, excède celui de la tangente à l'arc de cercle

[1] *P. S.* Les Tables que nous donnons à la fin de la deuxième partie de ce Mémoire dispenseront de recourir aux formules proposées aux n^{os} 25 et 27 pour obtenir une valeur approchée de l'inconnue e, dans le cas de $i = 1$. Si le rapport i ne différerait pas trop de l'unité, la solution déduite des mêmes Tables serait une solution approchée qui dispenserait encore de l'emploi de ces formules.

avec le même axe, ou bien que la normale à l'extrémité de l'intrados fait avec l'axe des y un angle plus grand que celui de la normale au cercle menée par le même point. Cette dernière remarque fournit le moyen de fixer une limite supérieure de la valeur de e.

Dans les calculs relatifs à ces limites, nous regarderons les *intrados* réel et fictif comme se confondant en une même courbe, et nous négligerons les termes du deuxième ordre.

Soient ρ''_0 le rayon de courbure de l'intrados au sommet, et r celui du cercle tangent à l'intrados en ce point et passant par les naissances.

La première proposition s'exprime analytiquement par l'inégalité

$$\rho''_0 > r.$$

Or on a entre la flèche, la demi-ouverture et le rayon r, l'équation

$$g^2 = f(2r - f),$$

d'où l'on tire

$$2r = \frac{g^2 + f^2}{f};$$

d'un autre côté, si nous faisons $y'' = h'' = h + e$ et $\cos\alpha = 1$ dans l'équation (w), nous aurons

$$2\rho''_0 = \frac{q^2 - 2eh - \frac{4}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}; \qquad (y'')$$

substituons ces valeurs dans l'inégalité $2\rho''_0 > 2r$ équivalente à la première, et pour q^2 sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$2e\,\frac{\frac{\mu_0}{i} - h - \frac{2}{3}\frac{e}{i}}{h + \frac{e}{i}} > f\left(1 + \frac{g^2}{f^2}\right),$$

d'où

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{2}{3}e - \frac{f}{2}\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right),$$

et, *a fortiori*,

$$2e\left[\mu_0 - ih - \frac{1}{2}f\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right)\right] > ihf\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right).$$

On en tire

$$e > ih\,\frac{f\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1 + \frac{y^2}{f^2}\right)}. \qquad (z')$$

Telle est la limite inférieure de e. Quant à la limite supérieure, elle se déduira de l'autre proposition, qu'on pourra traduire de cette manière : le cosinus de l'angle α_1 de la normale extrême à l'intrados avec l'axe des y, est plus petit que celui de la normale au cercle; or ce dernier cosinus a pour expression $\frac{r - f}{r}$ ou $1 - \frac{2f}{2fr}$; mais à cause de la valeur ci-dessus de $2r$ ou de $2rf$, la valeur de ce cosinus est $1 - \frac{2f^2}{g^2 + f^2}$; on a donc l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2 + f^2}.$$

Substituons à la place de $\cos\alpha_1$, sa valeur (u), en y mettant pour y'' la valeur y''_1 donnée par l'équation (w''), puis $h + e$ à la place de h'', et négligeons les termes du deuxième ordre; il viendra

$$\frac{1 - \frac{f(f + 2h) + 2e(f + h)}{q^2}}{1 - \frac{2e}{q^2}\left(h - \frac{1 - i}{i}f\right)} < 1 - 2\,\frac{1}{1 + \frac{g^2}{f^2}},$$

ou, en développant et réduisant,

$$-\frac{f(f + 2h)}{q^2} < \frac{2ef}{iq^2} - 2\,\frac{1}{1 + \frac{g^2}{f^2}} + \frac{4e}{q^2}\,\frac{h - \frac{1 - i}{i}f}{1 + \frac{g^2}{f^2}}.$$

Cette inégalité sera vraie, à plus forte raison, si, pour simplifier, on supprime au dernier terme la quantité $\frac{1-i}{i} f$, qui sera positive dans les cas ordinaires de la pratique; multipliant ensuite tout par q^2 ou par sa valeur $2\frac{e\mu_0}{i}$, il viendra

$$e < \frac{i}{2} \frac{f(f+2h)\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}, \qquad (a''')$$

inégalité qui donne la limite supérieure de la valeur de e. Cette limite et celle précédemment déterminée laissent entre elles un intervalle assez considérable : nous indiquerons, sans toutefois en garantir la généralité, un moyen de déduire de ces limites une valeur approchée de e; il consiste à doubler la limite inférieure, prendre la moitié de celle supérieure, et ensuite la moyenne des deux résultats, ce qui revient à ajouter à la limite inférieure le quart de la limite supérieure, ou à prendre pour valeur approchée de e, l'expression

$$\frac{\frac{i}{8} f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)(f+10h)}{2(\mu_0 - ih) - f\left(1+\frac{g^2}{f^2}\right)}.$$

Le calcul des valeurs limites ou de la valeur approchée de e, suppose qu'on a préalablement calculé μ_0 par la formule (v''), au moyen de la quantité donnée μ_1. La correction de la valeur approchée s'opère ainsi qu'il a été dit au numéro précédent.

CAS DES ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

26. Nous avons fait voir au n° 23 comment les deux conditions résultant d'une flèche et d'une demi-ouverture données, jointes à celle de la verticalité des tangentes extrêmes, suffisaient pour déterminer les deux constantes inconnues e et μ_0. Pour plus

de simplicité, nous substituerons à l'inconnue μ_0 la quantité q', liée à celle-ci par la relation

$$q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i},$$

de sorte qu'ayant déterminé q^2 et e, on déduira de cette équation la valeur de μ_0.

Nous exprimerons d'abord que la tangente extrême à l'intrados *réel* est verticale. Pour cela, observons que l'abscisse d'un point quelconque de cette courbe a pour expression

$$x'' - 2\delta \sin\alpha;$$

nous aurons donc aux naissances de cet intrados,

$$d(x'' - 2\delta \sin\alpha) = 0,$$

d'où

$$\frac{dx''}{dy''} - \sin\alpha \frac{d.2\delta}{dy''} - 2\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dy''} = 0.$$

Or nous avons, par l'une des équations (x),

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'';$$

on en tire

$$\frac{d.2\delta}{dy''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{2\delta}{y''}.$$

D'un autre côté, l'on a

$$\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha, \qquad d\alpha = \frac{ds''}{\rho''}, \qquad \frac{d\alpha}{dy''} = \frac{1}{\rho''}\frac{ds''}{dy''} = \frac{1}{\rho'' \sin\alpha};$$

substituant ces valeurs, il vient

$$\cot\alpha - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha - \frac{2\delta}{\rho''}\cot\alpha = 0,$$

ou

$$1 - \frac{2\delta}{y''}\sin\alpha \tang\alpha - \frac{2\delta}{\rho''} = 0,$$

et, par suite,

$$\sin\alpha \tang\alpha = \frac{y''}{2\delta}\left(1 - \frac{2\delta}{\rho''}\right).$$

Il y aurait à substituer à 2δ, α et ρ'', leurs valeurs en fonctions de y'', et à tirer la valeur de cette ordonnée; mais nous opérerons plus simplement. L'équation précédente montre que le produit $\sin\alpha\,\mathrm{tang}\alpha$ est très-grand, ou que α est voisin de 90°, comme on pouvait le prévoir. Cette circonstance permet de faire $\sin\alpha = 1$ et de négliger $\frac{2\delta}{\rho''}$ devant l'unité au deuxième membre : on a alors

$$\mathrm{tang}\alpha = \frac{y''}{2\delta}.$$

Éliminant $\mathrm{tang}\alpha$ entre cette équation et l'équation (a'), il viendra

$$\frac{y''}{2\delta} = \frac{R}{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2},$$

ou bien en affectant de l'indice 1, les variables de cette expression qui répondent aux naissances de l'intrados *réel*, et prenant la valeur du dénominateur du second membre,

$$q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1.$$

Désignons actuellement par y''_2 l'ordonnée du point de l'intrados *fictif* où la tangente est verticale, et pour lequel on a $\cot\alpha = 0$, la même équation (a') fournira la relation

$$y_2''^2 = q^2 + (h'' - e)^2,$$

ou, à cause de $h'' - e = h$,

$$y_2''^2 = q^2 + h^2.$$

Cette valeur permet de mettre l'équation précédente sous la forme

$$y_2''^2 - y_1''^2 = \frac{2\delta_1}{y''_1} R_1,$$

d'où

$$y''_2 - y''_1 = \frac{2\delta_1 R_1}{y''_1 (y''_2 + y''_1)}.$$

La différence des ordonnées des points de l'intrados *fictif* correspondants aux tangentes verticales des deux intrados est, comme on le voit, une quantité du deuxième ordre, ce qui permet de substituer dans le second membre y''_2, δ_2 et R_2 à y''_1, δ_1 et R_1, puis à ces quantités, leurs valeurs en y négligeant les termes du premier ordre; de cette manière, on a d'abord

$$y''_2 - y''_1 = \frac{\delta_2}{y''_2} R_2.$$

Actuellement, la valeur (z) de R^2 devient

$$R_2^2 = (y_2''^2 - h''^2)(2q^2 - y_2''^2 + h''^2),$$

et, en ayant égard à la valeur de $y_2''^2$,

$$R_2^2 = [q^2 - (h''^2 - h^2)][q^2 + h''^2 - h^2],$$

ou

$$R_2^2 = q^4 - (h''^2 - h^2)^2;$$

mais à cause de $h'' - h = e$, le dernier terme de cette expression est du deuxième ordre, ce qui la réduit à q^4. Substituant cette valeur et celle de δ_2 dans la différence ci-dessus, il vient

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6} \frac{e^2}{y''_2},$$

ou, à cause de $y_2''^2 = q^2 + h^2$,

$$y''_2 - y''_1 = \frac{1}{6} \frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

On en déduit finalement

$$y''_1 = \sqrt{q^2 + h^2} - \frac{1}{6} \frac{e^2}{\sqrt{q^2 + h^2}}.$$

Quant à l'angle $(90^\circ - \alpha_1)$ du dernier joint avec l'horizontale,

il se déduira de la valeur de tangα obtenue plus haut, et l'on aura

$$\text{tang}\,(90^\circ - \alpha_1) = \tfrac{1}{3}\,\tfrac{e^2}{q^2}.$$

Maintenant nous allons faire usage d'une autre expression de y''_1, que nous avons formée pour le cas des *arches incomplètes;* elle est

$$y''_1 = f + h'' + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{e^2}{q^2}\,(h'' - y''_1\cos\alpha_1):$$

or l'expression de tangα donne $y''_1\cos\alpha_1 = 2\,\delta_1\sin\alpha_1$; cette valeur n'introduirait dans y''_1 qu'un terme du quatrième ordre, nous devons donc n'en tenir aucun compte, de sorte que la valeur précédente se réduit à

$$y''_1 = f + h'' + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{e^2}{q^2}\,h''.$$

Il s'agit actuellement d'éliminer y''_1 entre cette équation et celle obtenue plus haut qui exprime la valeur de la même quantité. Cette dernière donne, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$y_1''^2 = q^2 + h^2 - \tfrac{1}{3}\,e^2. \qquad (c''')$$

Élevons la précédente au carré et éliminons $y_1''^2$, il viendra

$$q^2 + h^2 - \tfrac{1}{3}\,e^2 = (f + h'')^2 + \tfrac{2}{3}\,h''\,(f + h'')\,\tfrac{e^2}{q^2};$$

on en tire, à cause de $h = h'' - e$,

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \tfrac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f + h'')}{q^2}\right)e^2,$$

et en mettant au dernier terme, pour q^2, sa valeur approchée $f(f + 2h'')$,

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \tfrac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f + h'')}{f(f + 2h'')}\right)e^2. \qquad (d''')$$

Il reste à former l'équation qui lie la flèche f à la demi-ouverture g : on a ici, comme dans les *arches incomplètes*,

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1,$$

et nous avons vu qu'on peut faire $\sin\alpha_1 = 1$, tandis qu'on a

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''_1.$$

Substituons à y''_1 et q^2, leurs valeurs approchées $f + h''$ et $f(f + 2h'')$, il viendra

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{f + h''}{f(f + 2h'')}e^2,$$

et l'on aura l'équation de condition

$$x''_1 - \frac{1}{3}\frac{f + h''}{f(f + 2h'')}e^2 - g = 0. \qquad (e''')$$

La détermination des constantes e et q^2 dépend maintenant de la résolution du système des équations (d'''), (e''') et (c''') jointes aux équations (s'') dans lesquelles on fera $y'' = y_1''$ et $x'' = x''_1$. L'élimination ne sera pas plus praticable ici que dans l'autre cas; on sera encore réduit à l'emploi des méthodes de tâtonnement, et voici comment on devra s'y prendre :

On partira d'une valeur hypothétique de e plus ou moins approchée, que nous ferons bientôt connaître; puis, au moyen de l'équation (d''') dans laquelle on a $h'' = h + e$, on calculera la valeur correspondante de q^2. Celle de y''_1 sera donnée par l'équation (c''') ou celle qui la précède, et l'on se servira de cette valeur particulière de y'' pour calculer, au moyen des équations (s''), celle correspondante de x'' qui deviendra x''_1 : cette valeur devra être portée dans l'équation de condition (e''') qui pourra n'être pas satisfaite. Il faudra alors avoir recours aux méthodes de correction indiquées à la fin du n° 24, pour corriger la valeur de e d'où l'on est parti, et recommencer les calculs jusqu'à ce qu'on en ait dé-

terminé une qui satisfasse à l'équation (c'''). Toutefois, il ne faut pas oublier que la valeur de μ_1 ne doit pas dépasser certaines limites dont il a été question au n° 23. On devra donc, après avoir obtenu les valeurs de e et q^2 qui satisfont à l'ensemble des équations du problème, calculer la valeur de μ_0 par l'équation

$$-\mu_0 = \frac{iq^2}{2e}, \qquad (f''')$$

et en déduire celle de μ_1 par l'équation (t'') que nous reproduisons ici,

$$\mu_1 = \mu_0 + f + i\frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \qquad (g''')$$

ou de la suivante qu'on obtient en éliminant μ_0 et q^2 entre celle-ci et les équations (d''') et (f'''),

$$\mu_1 = i\frac{f(f+2h'')}{2e} + ih'' + f + \frac{1}{3}\left(2 - i + \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e. \qquad (h''')$$

En changeant h'' en $h + e$ dans les deux premiers termes, cette expression devient

$$\mu_1 = i\frac{f(f+2h)}{2e} + i(f+h) + f + \frac{1}{3}\left[2(1+i) + \frac{ih''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right]e.$$

Le dernier terme est très-petit, lors même que e atteint quelques mètres; il suffit, pour cette raison, de considérer les seuls premiers termes dans la discussion de la valeur de μ_1 : on reconnaît ainsi que cette grandeur μ_1 est d'autant moindre que e devient plus grand. Si donc la valeur trouvée de e est très-grande relativement, et qu'il en résulte une valeur assez petite de μ_1 ou de faibles pressions dans les joints, ce qui serait contraire aux principes de l'économie dans les constructions, on en conclura la nécessité de modifier les données. Du reste, nos formules basées sur l'hypothèse que e et μ sont l'un petit et l'autre très-grand cesseraient d'être applicables.

VALEUR APPROCHÉE DE e DANS LE CAS DES *ARCHES COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

27. La discussion qui nous a servi, n° 25, à fixer les deux limites de e, dans le cas des arches *incomplètes*, pourrait être reproduite ici; mais ce serait sans application utile à notre objet. En effet, si nous voulions appliquer les deux propositions sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour arriver aux deux inégalités (z'') et (a'''), nous devrions, dans les calculs qui les précèdent, remplacer q^2 par sa valeur (d''') en e, et nous obtiendrions, au lieu de l'inégalité (z'') qui donne une limite inférieure, l'expression d'une limite supérieure fort éloignée de la vraie valeur de e, et telle que nous pourrons, en partant d'autres considérations, obtenir une autre expression de la limite supérieure dont la valeur sera exactement moitié moindre.

Quant à la condition qui nous a fourni l'autre limite, et qui est exprimée par l'inégalité

$$\cos\alpha_1 < 1 - \frac{2f^2}{g^2+f^2},$$

à cause que $\cos\alpha_1$ est ici égal à zéro, elle se réduit à

$$\frac{2f^2}{g^2+f^2} < 1,$$

ou a

$$\frac{f}{g} < 1. \qquad (i''')$$

Cette condition, relative aux données seulement, ne peut rien fournir qui soit relatif aux limites de la valeur de e; elle conduit à cette conséquence remarquable, que les arches chargées doivent toujours être surbaissées.

Nous ne nous proposons ici que de donner une limite supé-

rieure de la valeur de e qui ne différera pas considérablement de la valeur exacte. Il résulte de la comparaison de nombreux tracés de notre courbe intrados avec des demi-ellipses ayant pour demi-axes les longueurs f et g, que l'intrados présente toujours plus de convexité vers les reins que la demi-ellipse correspondante, et que, par suite, il embrasse complétement cette dernière depuis le sommet jusqu'aux naissances. Cette circonstance indique que le rayon de courbure de l'ellipse au sommet est plus petit que celui de la courbe intrados au même point; écrivons cette inégalité, en mettant pour le rayon de courbure de l'ellipse son expression connue $\frac{g^2}{f}$, et pour le rayon de courbure de l'intrados, sa valeur ρ''_0 tirée de (γ''), nous aurons

$$\frac{g^2}{f} < \frac{\frac{1}{2}\,\frac{q^2 - 2eh - \frac{1}{3}\frac{e^2}{i}}{h + \frac{e}{i}}}{}.$$

Substituons pour q^2, sa valeur (d''), et faisons disparaître le dénominateur du second membre; il viendra, à cause de $h'' = h + e$,

$$2\left(\frac{e}{i} + h\right)\frac{g^2}{f} < f^2 + 2fh + 2fe - \frac{2}{3}\left(2\,\frac{1-i}{i} - \frac{h''}{f}\,\frac{(f+h'')}{(f+2h'')}\right)e^2;$$

or, i étant < 1, on peut le remplacer par l'unité, dans le premier membre, ce qui augmentera l'inégalité. On peut aussi négliger le terme en e^2 dans le second membre; car le facteur de e^2 est très-petit, d'abord parce que $1 - i$ et le rapport $\frac{h''}{f}$ sont très-petits, ensuite parce que les deux petits termes où entrent ces quantités sont de signes contraires et tendent à se détruire : on pourra donc écrire

$$2(e + h)\frac{g^2}{f} < f^2 + 2(e + h)f,$$

ou

$$2(e+h)\left(\frac{g^2}{f^2}-1\right)<f,$$

et l'on en déduit

$$e+h<\frac{1}{2}\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}. \qquad (j''')$$

L'élimination de q^2 entre l'équation (d''') et l'inégalité (z'') eût conduit à une limite supérieure de $e+h$, double de celle que nous venons de déterminer. On peut obtenir une valeur approchée de $e+h$ en prenant les $\frac{4}{5}$ de la valeur limite donnée par l'inégalité (j''') (nous donnons cette indication comme ressortant de nombreux calculs et tracés); on pourra même en faire usage pour se former une idée approchée des dimensions auxquelles on arrivera au moyen de valeurs données de f, g et h. La correction de la valeur de e s'effectuera comme il a été dit au n° 26[1].

S'il nous est permis de raisonner sur la valeur approchée de e, comme si elle était exacte, nous dirons que l'épaisseur augmente avec la flèche et aussi avec le rapport $\frac{f}{g}$, c'est-à-dire avec f, lorsque

[1] N. B. Les Tables qui sont à la fin du Mémoire nous ont permis de rechercher ultérieurement des formules empiriques pour calculer l'épaisseur à la clef ε_0, dans le cas des arches *complètes* où l'on a $i=1$. Nous avons trouvé, pour les surbaissements usités qui sont compris entre les limites $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$:

$$\varepsilon_0+h=\frac{0{,}79876\,f-0{,}22864\,g}{\frac{g^2}{f^2}-1},\ \text{à}\ \frac{1}{430}\ \text{près};$$

$$\varepsilon_0+h=\frac{f}{\frac{g^2}{f^2}-1}\left(0{,}92241-0{,}19839\frac{g}{f}\right)^{\frac{5}{3}},\ \text{à}\ \frac{1}{1440}\ \text{près}.$$

g reste constant, et nous ajouterons que lorsqu'on aura trouvé e et μ_1, l'un évidemment trop grand et l'autre beaucoup au-dessous de la limite 100 mètres par exemple, il faudra, pour diminuer e et augmenter μ_1, diminuer la flèche, ce qui augmentera en même temps le surbaissement; il n'y aura aucune difficulté à le faire, puisqu'il suffira, pour avoir la même hauteur de la clef au-dessus des eaux, d'exhausser les naissances. Si l'épaisseur était évidemment trop petite et donnait lieu par conséquent à de très-grandes valeurs de μ_1, ce serait l'indication d'un trop grand surbaissement, ou de trop petites valeurs de f; il serait moins facile de remédier à cet inconvénient.

Ces considérations montrent que les arches *en anse de panier* se prêtent plus difficilement aux conditions qu'on peut vouloir leur faire remplir, que les arches *incomplètes;* cela tient à ce que, dans les premières, tout se trouve déterminé au moyen des données, au lieu que, dans celles-ci, l'une des deux constantes reste arbitraire. Il ne faudra donc point s'étonner si nos formules relatives aux arches *en anse de panier* conduisent quelquefois à des valeurs de e et μ_1 inadmissibles dans la pratique.

La deuxième partie du Mémoire présentera des exemples propres à mettre en évidence les effets produits par la variation des données. Nous ne pouvions ici que les indiquer sommairement.

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES.

28. Nous n'aurons que peu de mots à dire concernant les piles. En admettant que le pont se compose d'arches égales, on voit que les poussées horizontales exercées au sommet des piles se font équilibre, et que chaque pile doit résister à une action verticale égale à la somme des composantes verticales des pressions exercées sur les joints des naissances des deux arches contiguës, augmentée du poids de la partie du massif qu'elle supporte directement.

Désignons par T_1 la valeur de la pression totale T dans le plan des naissances, et soit toujours λ la longueur de la voûte

parallèlement aux génératrices; on aura T_1 par l'équation (k) ou celle qui suit:

$$T_1 = \varpi \lambda e \mu_1; \qquad (k''')$$

la valeur de μ_1 sera donnée *a priori* dans le cas des arches *incomplètes*, et par l'équation (h''') dans le cas des arches *complètes*. Les composantes horizontale et verticale de cette pression seront

$$T_1 \cos\alpha_1, \quad T_1 \sin\alpha_1, \qquad (l''')$$

et l'on déduira la valeur de l'angle α_1, de l'expression de la tangente $\frac{dy''}{dx''}$, qui devient, en vertu de (a') et (d'),

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y''_1 - h'')\left[y''_1 + h'' + 2\frac{1-i}{i}e\right]\left[\Theta^2 - \left(y''_1 - \frac{1-i}{i}e\right)^2\right]}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y''^2_1}, \qquad (m''')$$

après qu'on y aura mis pour y''_1, sa valeur (w'') dans le cas des arches *incomplètes* : dans le cas des *anses de panier*, on a

$$\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha_1) = \frac{ie}{6\mu_0} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}.$$

La somme des projections verticales des pressions exercées par les deux arches voisines sur une pile, est généralement

$$2\,T_1 \sin\alpha_1.$$

Maintenant supposons que les plans de joint extrêmes des deux voûtes se rencontrent suivant les arêtes extrêmes des extrados, de sorte que la pile n'ait à supporter directement aucune partie du massif; la section horizontale de la pile sera égale à la somme des projections horizontales des surfaces de joint passant par les naissances; elle aura pour expression

$$2\,\lambda e \sin\alpha_1.$$

En divisant la somme des pressions verticales par cette section, on aura pour valeur de la pression par unité de surface que supportera la pile à sa partie supérieure,

$$\frac{T_1}{\lambda e},$$

ou, d'après l'équation (k'''),

$$\varpi \mu_1.$$

Dans cette hypothèse, on voit que la pression par unité de surface transmise verticalement à la pile sera précisément celle qui a lieu dans le plan des naissances; de sorte que si les assises de la pile présentent la même résistance que les voussoirs inférieurs, il suffira de donner à la pile, lorsqu'on n'aura égard qu'à la charge supérieure, une section horizontale égale à la somme des projections des plans de joint extrêmes.

S'il existe un intervalle horizontal entre les deux arêtes extérieures des deux derniers plans de joint, la pile aura à supporter directement une partie du poids du massif qui donnera lieu à une pression par unité de surface de beaucoup inférieure à $\varpi \mu_1$, de sorte qu'on pourra évidemment donner à la pile toute largeur qui ne sera point inférieure à la somme des projections horizontales des épaisseurs extrêmes, lorsqu'il suffira d'avoir égard à la charge supérieure.

Quant aux culées, elles sont d'abord soumises à l'action de la force totale T_1 [équation (k''')], faisant l'angle α_1 avec l'axe des x; les coordonnées de son point d'application sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \tfrac{1}{2} e \sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \tfrac{1}{2} e \cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} (n''')$$

mais les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées par le massif qu'elles encaissent. Pour déterminer la résul-

tante de ces actions et son point d'application, nous aurons recours à la relation (*o*) obtenue au n° 8, laquelle est

$$H' = i\varpi y',$$

H' désignant la pression horizontale par unité de surface exercée par les prismes triangulaires sur les parties adjacentes du massif. L'équilibre de celui-ci exige que la culée exerce des réactions égales et opposées. La pression transmise à la culée sur une étendue superficielle verticale $\lambda dy'$ située à la profondeur y', est donc

$$i\varpi\lambda y' dy',$$

et son moment

$$i\varpi\lambda y'^2 dy',$$

le tout, comme dans l'hypothèse de la fluidité.

Pour obtenir les valeurs de la résultante et de son moment, il suffit d'intégrer ces expressions entre des limites qui sont les ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados : soient y'_0 et y'_1 ces ordonnées, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (o''')$$

Intégrons maintenant les expressions différentielles précédentes et désignons par U et u l'intensité de la résultante et l'ordonnée de son point d'application, il viendra

$$U = \frac{i\varpi\lambda}{2}(y_1'^2 - y_0'^2), \qquad (p''')$$

$$Uu = \frac{i\varpi\lambda}{3}(y_1'^3 - y_0'^3);$$

et l'on en déduira, par division membre à membre,

$$u = \frac{2}{3}\frac{y_1'^3 - y_0'^3}{y_1'^2 - y_0'^2},$$

résultat qu'on mettra sous la forme

$$u = \frac{2}{3}\frac{y_0'^2 + y'_0 y'_1 + y_1'^2}{y'_0 + y'_1}, \qquad (q''')$$

afin de faire disparaître l'indétermination qui se manifesterait dans le cas où la différence de niveau $y'_1 - y'_0$ serait très-petite.

La partie de la culée située au-dessus du plan des naissances devra être construite d'après les mêmes principes que les murs de réservoirs, pour résister aux pressions élémentaires dont la force U se compose, à cela près qu'il faudra substituer la densité du massif à celle de l'eau et tenir compte de la pression représentée par la hauteur h qui s'exerce au niveau du sommet de l'extrados.

Connaissant maintenant les forces T_1 et U, leurs directions, et les coordonnées de leurs points d'application, on aura toutes les indications que la théorie abstraite de l'équilibre de la voûte et de son massif peut fournir, pour procéder au calcul de l'établissement des culées.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ETC.

29. Ayant déterminé par les procédés indiqués aux nos 22 et suivants, les valeurs des constantes e, μ_0 ou q^2, les coordonnées des points extrêmes de l'intrados seront connues : on se trouvera dès lors en mesure de procéder au calcul des coordonnées intermédiaires et des diverses quantités qui leur correspondent; on aura en même temps un moyen de vérifier l'exactitude des calculs, si l'on emploie la méthode des différences finies, comme nous allons le faire. Il est facile de se figurer quelle difficulté il y aurait à calculer, au moyen des formules (s''), l'abscisse x'' en fonction de l'ordonnée y'' qu'on se donnerait arbitrairement; en admettant qu'on fît ce calcul, il resterait à faire celui de l'inclinaison des joints, par l'équation différentielle (a'). Le moyen que nous allons indiquer, fondé sur l'emploi du rayon de courbure, aurait pu nous dispenser, à la rigueur, d'effectuer l'intégration des

équations différentielles du problème, mais la détermination des constantes aurait présenté plus de difficultés.

Nous allons nous proposer d'abord de calculer les différences finies des coordonnées de la courbe intrados, en prenant pour variable indépendante l'angle α des normales avec la verticale : nous ferons varier α de quantités constantes que nous désignerons par $\Delta\alpha$, et les coordonnées x'', y'' du point où la normale fait l'angle α varieront de quantités $\Delta x''$, $\Delta y''$ qu'il s'agit de déterminer. Nous ne prétendons point donner l'expression exacte de ces différences, mais seulement des expressions dont le degré d'approximation sera d'autant plus grand que la différence $\Delta\alpha$ sera elle-même plus petite. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on veuille tenir compte, dans les valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, des termes du deuxième ordre ou en e^2, afin qu'on soit sûr que les valeurs de x'' et y'' obtenues par les additions successives des $\Delta x''$ et $\Delta y''$ ne soient point en erreur dans les termes du premier ordre : il faudra, pour simplifier les calculs, choisir $\Delta\alpha$ de telle sorte que les termes en $\Delta\alpha$ soient, ainsi que ceux en $\Delta x''$ et $\Delta y''$, de l'ordre de e ou du premier ordre. La différence $\Delta\alpha$ sera assez petite quand elle n'excédera pas de beaucoup le rapport $\frac{e}{q}$ qui s'est présenté au commencement de nos calculs comme type des quantités du premier ordre.

Ceci posé, nous déduirons les expressions de $\Delta x''$, $\Delta y''$, de celles des différentielles dx'' et dy'', en mettant à profit une proposition due, nous le croyons, à Legendre, et qu'on peut énoncer de cette manière : Si dans un système d'équations différentielles du premier ordre, on change les différentielles en différences finies, on peut donner au résultat un degré d'exactitude qui s'étende aux termes du deuxième ordre inclusivement, en augmentant en même temps chaque variable dépendante ou indépendante de la moitié de sa différence finie.

Appliquons cette proposition aux valeurs suivantes de dx'' et dy'',

$$dx'' = \rho'' \cos\alpha \, d\alpha, \qquad dy'' = \rho'' \sin\alpha \, d\alpha,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,\\ \Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.\end{aligned}\right\}\quad (r''')$$

Or, observons qu'en présence du facteur $\Delta\alpha$, l'expression $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ n'a besoin d'être exacte que jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement; nous déduirons cette expression de celle (w) du rayon de courbure ρ'', en mettant cette dernière sous la forme

$$\rho'' = \psi(y'', \alpha),$$

et désignant par ψ une fonction des deux quantités y'' et α. Différentions cette expression, il viendra

$$d\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}\,dy'' + \frac{d\psi}{d\alpha}\,d\alpha;$$

si nous passons des différentielles aux différences finies, et que nous divisions tout par 2, nous aurons, aux quantités près du deuxième ordre,

$$\frac{1}{2}\Delta\rho'' = \frac{d\psi}{dy''}\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{\Delta\alpha}{2};$$

ajoutons maintenant, membre à membre, cette équation et celle qui donne la valeur de ρ'', il viendra

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi(y'', \alpha) + \frac{d\psi}{dy''}\frac{\Delta y''}{2} + \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{\Delta\alpha}{2};$$

mais, en vertu du théorème de Taylor, et en négligeant les termes du deuxième ordre, cette expression équivaut à

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \psi\left(y'' + \frac{1}{2}\Delta y'', \alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right). \qquad (^*)$$

(*) Nous aurions évité ce tour de démonstration en appliquant immédiatement la proposition de Legendre aux expressions de dx'' et dy'', mises sous la forme

$$\psi(y'', \alpha)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\alpha\,d\alpha.$$

Pour faire usage de cette formule dans le calcul des valeurs de $\Delta x''$ et $\Delta y''$, reprenons la valeur de ρ'' équation (w), que nous écrirons comme il suit :

$$\rho'' = \frac{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{i}h''e + \frac{2}{3i}e^2 + \frac{1-i}{i}ey'' - \left(\frac{4}{3i}-1\right)e^2\cos\alpha}{y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\alpha}. \qquad (s''')$$

En vertu de la formule précédente et de la définition de la fonction ψ, nous aurons

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \frac{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{i}h''e + \frac{2}{3i}e^2 + \frac{1-i}{i}e\left(y'' + \frac{1}{2}\Delta y''\right) - \left(\frac{4}{3i}-1\right)e^2\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}{y'' + \frac{1}{2}\Delta y'' + \frac{1-i}{i}e\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}. \qquad (t''')$$

Cette expression, qui contient plusieurs termes constants, se simplifiera notablement dans l'hypothèse $i = 1$; mais, quoi qu'il en soit, elle renferme encore l'inconnue $\frac{1}{2}\Delta y''$: rappelons à cet égard qu'il suffit ici d'étendre l'exactitude aux termes du premier ordre, d'où il suit qu'on peut substituer à $\frac{1}{2}\Delta y''$, sa valeur obtenue à ce degré d'approximation ; nous écrirons de cette manière

$$\frac{1}{2}\Delta y'' = \rho''\sin\alpha\,\frac{\Delta\alpha}{2}, \qquad (u''')$$

et ce sera cette valeur dont il faudra faire usage dans la formule (t''').

Résumons ces diverses opérations.

Après avoir fait choix d'un intervalle $\Delta\alpha$, d'après les principes énoncés plus haut, et avoir exprimé en *rapport d'arc au rayon* cette quantité qui répondra à un petit nombre de degrés tel que 2°, 3° ou 4°, on disposera un tableau par colonnes verticales en tête desquelles on écrira les diverses valeurs de α qui seront équi-

distantes; deux lignes horizontales seront réservées pour inscrire les valeurs de y'' et x'' (celles de ces valeurs que l'on connaît tout d'abord répondent à $\alpha = 0$, elles sont $h'' = h + e$ et zéro); on écrira ensuite les logarithmes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis de $\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$ et $\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$: au moyen des valeurs inscrites dans la première colonne verticale, on calculera ρ'' par la formule (s'''), et $\frac{1}{2}\Delta y''$ par la formule (u'''); il sera facile ensuite de calculer $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ par la formule (t'''), et les équations (r''') feront connaître $\Delta y''$ et $\Delta x''$. On inscrira ces diverses valeurs au fur et à mesure; puis, en ajoutant $\Delta y''$ à la valeur de y'' inscrite en tête de la colonne, et de même $\Delta x''$ à x'', on aura les valeurs de y'' et x'' qui devront être inscrites en tête de la colonne suivante. La vérification des calculs contenus dans deux colonnes verticales consécutives s'obtiendra en prenant la moyenne arithmétique des deux valeurs de ρ'', et comparant cette moyenne à la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ qui répond à la première des deux colonnes. Si les calculs sont exacts, ces deux résultats devront être sensiblement égaux.

On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'on ait dépassé les valeurs de y''_1 et x''_1, dont l'une aura été employée dans le calcul des formules (s''), et l'autre en sera résultée. Par interpolation, on pourra déduire des nombres contenus dans le tableau, la valeur de x'' correspondante à $y'' = y''_1$; et, si l'on a bien opéré, cette valeur devra coïncider avec x''_1, sauf quelque légère différence provenant de l'accumulation des erreurs dues aux termes du troisième ordre qu'on a négligés, en supposant que $\Delta\alpha$ ait été pris assez petit.

Les calculs étant vérifiés, on pourra compléter le tableau par la détermination des coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados et des épaisseurs.

Le calcul des coordonnées de l'extrados se fera par les formules

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha.$$

La distance des deux intrados, suivant la normale à l'intrados fictif, est donnée par la double formule

$$2\delta = \frac{1}{6}\frac{e}{\mu_0}y'' = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''.$$

On en déduit, pour les ordonnées et abscisses Y et X de l'intrados réel, les deux expressions

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha, \qquad X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

Enfin les épaisseurs seront données par la formule

$$\varepsilon = e + 2\delta.$$

Ces divers calculs sont de la plus grande simplicité, et les valeurs obtenues étant réunies aux précédentes, il en résultera un ensemble propre à représenter complétement la forme et les dimensions de l'arche parvenue à son état permanent. Le problème que nous nous étions posé se trouve dès lors complétement résolu sous le rapport analytique et sous celui des applications numériques : quelques mots nous suffiront pour indiquer l'usage qu'on peut faire des procédés graphiques, dans le but d'éviter l'emploi des formules (s''), quand on n'a pas en vue une exactitude supérieure à celle que l'on peut obtenir en ayant recours aux tracés.

SOLUTION DU PROBLÈME AU MOYEN DES PROCÉDÉS GRAPHIQUES.

30. La solution que nous allons donner dépend de la construction de la courbe intrados au moyen de son rayon de courbure. Il n'entre pas dans notre intention d'expliquer ici comment on trace une courbe dont le rayon de courbure est donné en fonction des coordonnées; chacun sait comment on peut remplacer un petit arc de la courbe par un arc de cercle d'une petite amplitude décrit avec le rayon de courbure correspondant au point milieu de cet arc. Nous renverrons, quant aux précautions à prendre lorsqu'on donne aux arcs une certaine amplitude, à ce que nous avons

dit sur ce sujet, dans le troisième article de notre Théorie de l'équilibre des voûtes, § XXXVI. Pour que les procédés indiqués dans cet article s'appliquent au cas actuel, il nous suffira de donner une construction du rayon de courbure : nous transformerons son équation (w), en posant

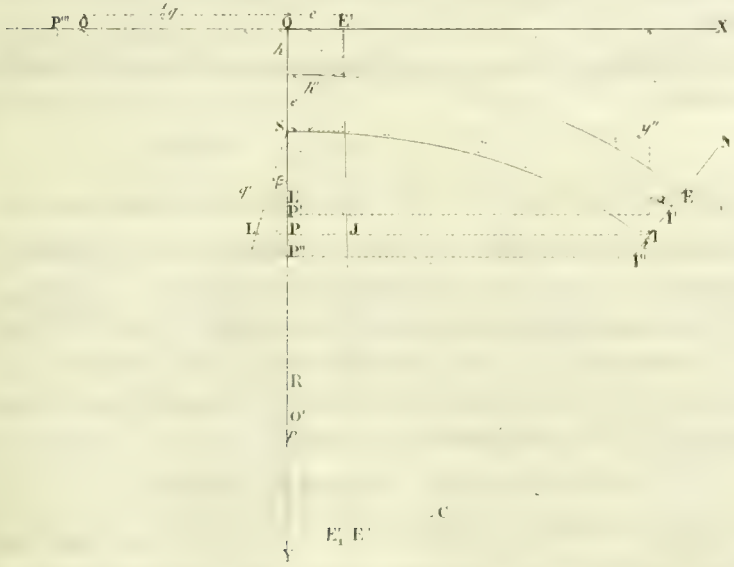
$$q' = q - \frac{2e}{q} h'' + \frac{4}{3} \frac{e^2}{iq},$$

$$\text{tang}\beta = 2 \frac{1-i}{i} \frac{e}{q}, \quad a = \frac{2}{i} \left(\frac{4}{3} - i \right) \frac{e^2}{q}, \quad b = \frac{1-i}{i} e,$$

et l'équation (w) deviendra

$$\rho'' = \frac{1}{2} q \frac{q' + (y'' - h'') \text{tang}\beta - a \cos\alpha}{y'' + b \cos\alpha}.$$

Pour construire cette expression, ayant mené deux axes OX, OY,



l'un horizontal, l'autre vertical, on fixera le sommet de l'intrados sur l'axe des y, à la distance $\overline{OS} = h'' = h + e$; par le point S on mènera la droite SB faisant l'angle $\widehat{BSY} = \beta$; on prendra ensuite sur le prolongement de OX une distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2} q$, et sur OY, $\overline{OQ'} = q'$: cette partie des constructions servira pour tous les rayons de courbure. Nous supposerons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenons sur cette normale les distances $\overline{II'} = a$, vers l'extrados; $\overline{II''} = b$, dans le sens opposé. Projetons les trois points I, I', I'' sur l'axe des y, et soient P, P', P'' leurs projections; nous aurons $\overline{OP} = y''$, $\overline{PP'} = a\cos\alpha$, $\overline{PP''} = b\cos\alpha$, et, par suite,

$$\overline{OP''} = y'' + b\cos\alpha.$$

Actuellement, prolongeons la droite IP jusqu'à sa rencontre avec la droite BS en L, nous aurons $\overline{PL} = (y'' - h'')\operatorname{tang}\beta$; rabattons le point L en L' sur la droite OY, de sorte qu'on ait $\overline{PL'} = \overline{PL}$, il viendra

$$\overline{P'L'} = \pm [(y'' - h'')\operatorname{tang}\beta - a\cos\alpha],$$

suivant que l'on aura $\overline{PL'} \gtrless \overline{PP'}$: pour former le numérateur de la fraction qui multiplie $\frac{1}{2} q$, dans la valeur de ρ'', il reste à ajouter avec le signe convenable la quantité $\pm \overline{PL'}$ à q', ce qui se fera en transportant parallèlement à elle-même la droite $\overline{P'L'}$ en $\overline{Q'p'}$, de façon que le point L' tombe en Q', et le point P' en p' qui devra être situé par rapport à Q' du même côté que P' par rapport à L'. De cette manière, on aura

$$\overline{Op'} = q' + (y'' - h'')\operatorname{tang}\beta - a\cos\alpha.$$

Le rayon de courbure s'exprimera au moyen des lignes que l'on vient de construire, et l'on aura

$$\rho'' = \overline{OQ}\frac{\overline{Op'}}{\overline{OP''}}.$$

Pour éviter la construction de lignes de grandes dimensions dans le sens des x, ce qui obligerait à donner à l'épure de grandes dimensions à la fois dans le sens des x et dans celui des y, nous rabattrons le point P″ en P‴ sur le prolongement de l'axe des x, de sorte que l'on ait $\overline{OP'''} = \overline{OP''}$. Or, si nous joignons P‴p', et que nous menions QR parallèle à P‴p', il est facile de voir que l'on aura $\overline{OR} = \rho''$, car les triangles semblables OQR, OP‴p' donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}}$$

qui coïncide avec l'équation précédente. La position C du centre de courbure s'obtiendra ensuite, en portant sur la normale, de I en C, la distance $\overline{IC} = \overline{OR}$.

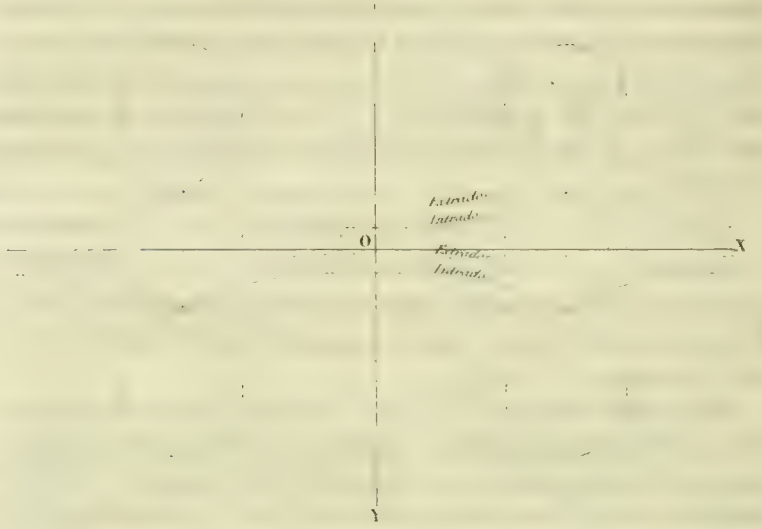
Cette construction du rayon de courbure de l'intrados fictif donnera le moyen de construire en même temps l'extrados, puisque ces courbes sont parallèles et distantes de la quantité e. Quant à l'intrados réel, il sera facilement donné par la construction des épaisseurs dont l'expression (γ) est

$$\varepsilon = e + \frac{i}{6}\frac{e}{\mu_0}y'' = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y''.$$

En effet, prenons sur l'axe des x la distance $\overline{OE'} = e$, et menons par le point E′ une droite E′E‴, parallèle à OY; menons ensuite par le même point E′ une autre droite E′E″ faisant avec la première un angle dont la tangente soit $\frac{ie}{6\mu_0}$ ou $\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}$; l'abscisse PJ, du point J de la droite E′E″ ayant y'' pour ordonnée, sera la valeur de l'épaisseur ε correspondante au plan de joint qui se projette en IN. Si donc on fait $\overline{IE} = e$, et que l'on porte ensuite de E en i la distance $\overline{PJ} = \varepsilon$, le point i ainsi déterminé appartiendra à l'intrados réel.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt d'indiquer par une figure la disposition qu'affectent l'extrados et l'intrados fictif construits par le procédé qui vient d'être indiqué, et dans l'hypothèse $i = 1$.

La figure ci-jointe rend sensibles les particularités de la disposition dont il s'agit:



31. Voici maintenant l'usage que l'on pourra faire du tracé de l'intrados au moyen du rayon de courbure, pour la détermination des constantes (nos 22 et suivants), lorsqu'on voudra obtenir leurs valeurs approchées, sans avoir recours aux formules (s''), ou qu'on pourra s'en tenir à l'exactitude dont les procédés graphiques sont susceptibles. On déduira des considérations relatives aux limites de e exposées nos 25 et 27, une première valeur approchée de cette inconnue. L'équation (v''), n° 24, donnera μ_0 en fonction de l'arbitraire μ_1 dans le cas des arches *incomplètes,* et q se déduira de la relation $q^2 = 2\frac{e\mu_0}{i}$ déjà plusieurs fois mentionnée. Dans le cas des arches *en anse de panier,* la quantité q devra être tirée de l'équation (d'''), n° 26. Au moyen de e et q, il sera possible de construire l'intrados réel, et si l'on a préalablement tracé une droite parallèle à l'axe des x, à la distance f au-dessous du

sommet de cet intrados, on constatera si cette droite rencontre la courbe à une distance de l'axe des y égale à la demi-ouverture g ou différente de celle-ci. Dans le premier cas, la valeur de e d'où l'on sera parti sera la valeur cherchée; dans le second, il faudra recommencer le tracé en adoptant une valeur de e différente de la première, et appliquer pour la correction de cette valeur l'une des méthodes dont il a été question à la fin du n° 24. Il est clair que le dernier tracé correspondant à la valeur de e qui donne la demi-ouverture ou abscisse g, pour une flèche f ou une ordonnée égale à $h + \varepsilon_0 + f$, présente la solution graphique du problème qui consiste à déterminer la forme entière de l'intrados et de l'extrados, puis les inclinaisons des plans de joint et les rayons de courbure. Dans le tracé définitif comme dans les tracés préliminaires, la construction des courbes se trouve ramenée à celle d'arcs de cercle de plus ou moins d'étendue, ainsi que nous l'avons annoncé dans le n° 1.

On pourra vérifier l'exactitude des tracés successifs ou du tracé définitif dans le cas des arches *incomplètes*, en calculant l'angle extrême α_1 par la formule (m'''), où y''_1 doit avoir la valeur donnée par l'équation (w''), et comparant cet angle à celui donné par le tracé; ces angles doivent coïncider, quelque fausse que soit l'hypothèse sur la valeur de e. Dans le cas des arches *en anse de panier*, si l'on mène une droite parallèle à l'axe des x à une distance égale à f au-dessous du sommet de l'intrados réel, il faudra que la normale au même intrados menée par le point d'intersection de la droite et de l'intrados coïncide avec cette même droite.

COMPARAISON DES ARCHES ÉTABLIES SUIVANT LES PRINCIPES PRÉCÉDENTS, AVEC CELLES DONT L'INTRADOS PRÉSENTE LES FORMES AUJOURD'HUI EN USAGE.

32. Ayant effectué divers tracés d'arches *incomplètes*, conformément à la théorie que nous venons d'exposer, nous avons comparé ces tracés à ceux fournis par des intrados ayant en réalité la forme d'arcs de cercle, et assujettis aux mêmes conditions rela-

tives à la flèche et à l'ouverture que les précédents. Les voûtes *en arc de cercle* présentent, ainsi que cela doit être, moins de convexité vers les reins que les intrados déduits de notre théorie, et il semble, au premier abord, qu'il ne doive y avoir aucun inconvénient à s'en tenir à l'emploi de l'arc de cercle, à cause de la facilité de sa construction. On tomberait néanmoins dans une grave erreur en admettant cette conséquence. En effet, si, comme il est vrai, l'arc de cercle et la courbe théorique, qui coïncident au sommet et aux naissances, laissent entre eux un assez faible intervalle vers les reins, on admettra aisément qu'en remplissant cet intervalle, c'est-à-dire en passant de l'intrados indiqué par la théorie à l'arc de cercle, on n'ajoutera pas sensiblement à la charge totale de l'arche, et que dès lors la situation de la résultante des pressions restera sensiblement la même que dans le premier cas. Cette résultante passera vers le milieu des joints qui répondent à l'appareil théorique. Or supposons qu'en substituant l'appareil *en arc de cercle* à ce dernier, on conserve néanmoins les mêmes épaisseurs, ou encore, des épaisseurs constantes égales à celles qui ont lieu aux naissances, il arrivera que vers le tiers de la distance de celles-ci au sommet, à l'endroit du plus grand écart que présentent les deux courbes, les points qui correspondaient au milieu des anciennes épaisseurs se trouveront plus voisins du nouvel extrados, au point de n'en être éloignés que du $\frac{1}{3}$ ou du $\frac{1}{4}$ de l'épaisseur totale : la résultante des pressions s'approchera donc d'autant de ce nouvel extrados, et la distribution des pressions dans chaque joint se trouvera considérablement modifiée. On peut facilement reconnaître que l'addition de matière provenant du passage de la courbe théorique à l'arc de cercle, doit avoir pour effet une augmentation de la charge générale de la voûte, si la différence de convexité est notable, et qu'il en doit résulter une plus grande convexité dans la courbe *de la résultante des pressions;* celle-ci doit donc en réalité se rapprocher plus du nouvel extrados que s'il n'y avait aucune augmentation de charge. Admettons seulement qu'elle

s'en rapproche en définitive d'une quantité égale au tiers[1] de l'épaisseur du voussoir, la pression totale dans le joint n'ayant pu qu'augmenter, il en résultera que la pression par unité de surface deviendra au moins double de celle primitive qui était uniforme : or, si la pression primitive était déjà égale à la limite des pressions qu'on peut faire supporter sans inconvénient aux voussoirs, il arrivera que ceux-ci ne seront plus capables de résister à l'action de forces dont les intensités ont été doublées; de là naîtront des phénomènes plus ou moins prononcés de rupture par écrasement, et qui pourront compromettre gravement la stabilité de la construction. Inversement, on conclura de ces considérations, que si des arches *en arc de cercle* présentent toute la stabilité désirable, on pourrait leur substituer des arches établies suivant nos principes, et dans lesquelles les pressions maximum par unité de surface se trouvant réduites de moitié, par exemple, il serait facile de réduire en même temps les épaisseurs, et, par suite, les frais de construction, d'une quantité notable.

Enfin nous ajouterons que les mêmes considérations s'appliquent aux arches *en anse de panier* construites d'après des procédés qui donnent à l'intrados une forme plus ou moins voisine de celle des ellipses. Toutes ces courbes présentent, comme l'arc de cercle, moins de convexité vers les reins que celles que nous proposons. La deuxième partie de ce mémoire sera accompagnée d'épures qui présenteront la comparaison des profils circulaires ou elliptiques avec ceux dont nous avons exposé la théorie.

[1] En se basant sur le principe assez généralement admis de la proportionnalité des profondeurs d'impression aux intensités des pressions, on démontre ce résultat bien connu : que si deux corps prismatiques sont en contact suivant une face plane, et qu'on vienne à les soumettre à des pressions dont la résultante perpendiculaire à cette face, et située dans un plan qui la partage symétriquement, passe à une distance d'une arête, égale au tiers de la distance de cette arête à celle opposée, la pression par unité de surface, vers la première, s'élèvera au double de la pression moyenne, tandis qu'elle décroîtra jusqu'à devenir nulle vers l'arête opposée.

DEUXIÈME PARTIE.

33. La deuxième partie de notre travail diffère, à quelques égards, du mémoire qui a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 décembre 1846, et sur lequel un rapport a été fait dans la séance du 26 octobre 1852.

Ce mémoire, dans lequel nous avions restreint nos formules au cas ordinaire où les matériaux qui forment le massif peuvent être considérés comme présentant sensiblement la même densité que les voussoirs, renfermait divers exemples de l'application de ces formules par voie de tâtonnements, au cas des arches incomplètes dites *en arc de cercle*, et des Tables à double entrée pour le cas des arches complètes ou *en anse de panier*, tables qui dispensaient d'effectuer les calculs par tâtonnements dont il vient d'être question pour le cas des autres arches. Nous avions profité de la facilité que nous offraient ces tables pour nous livrer à l'examen d'un assez grand nombre d'arches *en anse de panier* construites depuis longtemps. Le mémoire était suivi d'une application de la théorie générale, au cas où la charge qui s'élève au-dessus de la clef est très-grande, et nous avions choisi pour exemple celui que nous offre l'appareil connu, dans l'art des constructions, sous le nom de *poitrail*.

Dans leur rapport, MM. les Commissaires ont exprimé le désir que des tables fussent aussi construites pour abréger les calculs relatifs à l'établissement des arches dites *en arc de cercle*. Au moment où l'impression de notre mémoire a été décidée, nous avons songé sérieusement à nous rendre au vœu exprimé par la Commission, et à combler ainsi une lacune que nous regrettions nous-même de laisser dans notre travail.

Après un mûr examen, nous avons reconnu que le problème relatif aux arches incomplètes, qui nécessiterait la construction de tables à triple entrée, si l'on tenait à conserver les données et

inconnues que nous avions introduites dans la première partie de notre mémoire et dans le mémoire présenté en dernier lieu, n'exige que le calcul de tables à double entrée, si l'on exclut les termes du deuxième ordre ou dépendants du carré des épaisseurs, et que l'on substitue aux données et aux inconnues d'autres quantités. (Par exemple, à l'égard des données, il convient de substituer la quantité $h'' = h + e$ à la donnée h.) De cette manière, on n'aurait, il est vrai, que des valeurs approchées des inconnues, et qui conviendraient dans les cas les plus ordinaires; mais on aperçoit la possibilité de construire une nouvelle table à double entrée, d'une petite étendue, qui fournisse la correction de la valeur de l'inconnue principale. Le même ordre d'idées s'applique au cas des arches *en anse de panier*, et la construction d'une table à simple entrée est alors suffisante. Théoriquement, la solution déduite de cette table exige une correction; mais on peut s'assurer que, dans les circonstances les plus défavorables, la correction qui porterait sur la différence de niveau du sommet de l'intrados ou des naissances avec la chaussée, dépasserait à peine un millimètre, et que, dans les limites ordinaires de la pratique, la correction qui resterait presque toujours au-dessous de cette quantité, serait toujours négligeable : en sorte que la table relative aux arches *en anse de panier* peut être considérée comme donnant des solutions exactes au point de vue pratique. Cette table, d'un usage très-simple, remplace la table à double entrée que nous avions construite tout d'abord. Quant à la transformation que nous faisons subir aux données, elle est telle que l'une ou l'autre arbitrairement, des deux quantités h et μ_1, peut toujours être donnée *a priori*.

Nous exposerons dans cette deuxième partie les principes qui nous ont guidé dans la construction des tables pour les deux espèces d'arches dont nous traitons, et nous insérerons ces tables à la fin du mémoire. Comme elles dispensent d'effectuer, par voie de tâtonnements, les calculs ou tracés qui seraient indispensables sans leur secours, nous ne donnerons point d'exemple de ce genre.

Il ne serait nécessaire de recourir à ces procédés, que si l'on voulait avoir égard à la différence de densité du massif et des voussoirs. Or nous pensons que les ingénieurs qui tiendront assez à la précision pour avoir égard à cette différence, ne reculeront pas devant l'emploi des méthodes de calcul ou des méthodes graphiques qui ont été indiquées dans la première partie. Faisons remarquer, à ce sujet, qu'en supposant seulement le produit $(1 - i)\,h''$ du même ordre de petitesse que les épaisseurs, ou du premier ordre, ce qui est très-admissible dans les arches de pont, il serait possible de joindre à nos tables de nouvelles tables destinées à corriger la solution obtenue en faisant $i = 1$. Le temps nous manque absolument pour entreprendre ces nouvelles recherches.

L'étendue déjà considérable de notre travail, et la crainte d'abuser de la facilité que l'Académie a bien voulu nous offrir pour l'impression, nous déterminent à ne point publier ici le chapitre sur l'établissement des appareils dits *poitrails*, lesquels, bien qu'ils présentent une grande analogie avec les arches de pont, ne doivent point cependant être considérés comme étant des cas particuliers d'arches de pont proprement dites.

SIMPLIFICATION DES FORMULES GÉNÉRALES POUR LES CAS ORDINAIRES QUE PRÉSENTENT LES ARCHES DE PONT.

34. Les deux éléments de réduction auxquels nous aurons recours sont le rapport désigné par i, de la densité du massif à celle des voussoirs, et la hauteur h de la charge qui s'élève au-dessus du plan horizontal tangent à l'extrados.

Le plus souvent, et c'est d'ailleurs l'habitude du plus grand nombre des ingénieurs, on peut négliger la différence de densité du massif et des voussoirs. C'est ce que nous ferons dans tout ce qui va suivre, en posant

$$i = 1.$$

Cette relation permet d'effectuer immédiatement une grande simplification dans les formules (s''), en y réduisant à zéro les coefficients D et G et les termes des autres coefficients qui ont $(1-i)$ pour facteur.

Quant à la hauteur de charge h, cette quantité est très-grande par rapport à l'épaisseur dans les tunnels et dans les *poitrails* dont il a été question au numéro précédent. La grandeur de h permettrait aussi des simplifications, et rendrait praticable l'emploi des séries à la place des fonctions elliptiques; mais nous ne nous occuperons point de ces constructions, par la raison énoncée en terminant le même numéro. Dans les ponts, au contraire, la hauteur h est très-faible, et presque toujours plus petite que l'épaisseur de la voûte. Nous avons déjà dit au n° 20 que la petitesse de h permet de réduire l'échelle des modules des fonctions elliptiques au premier de la série, et qu'il suffit de calculer une seule amplitude en outre de celle qui sert de point de départ à la série des amplitudes. Nous avons fait de diverses manières le calcul de l'erreur qui en résulte, et nous nous sommes assuré qu'elle est à peu près insensible dans le cas des ponts. Néanmoins, dans le calcul des tables, nous nous sommes astreint à ajouter la petite correction nécessaire pour obtenir le degré d'exactitude que l'on atteindrait en tenant compte, dans le calcul des fonctions elliptiques, d'un module et d'une amplitude de plus.

Nous commencerons par opérer sur les fonctions elliptiques des transformations indiquées par la petitesse de h ou de h''. L'expression de $\tang^2\varphi$, équations (s''), montre que si l'on y prend y'' égal à l'ordonnée du point inférieur de l'intrados, l'angle φ sera plus voisin de 90° que de zéro : comme nous ne ferons usage des équations (s'') que pour établir une relation entre les coordonnées du point inférieur de l'intrados, il convient ici de substituer à l'angle φ son complément; posons donc

$$\xi = 90^\circ - \varphi.$$

Nous avons dit en outre que le module c est très-voisin de l'unité

dans la même hypothèse relative à h'' : pour cette raison, nous lui substituerons son complément b donné par la formule

$$b^2 = 1 - c^2 :$$

si l'on fait, de plus,

$$\sin\psi = b,$$

d'où

$$\cos\psi = c,$$

on aura l'échelle suivante des modules :

$$\sin\psi_1 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\sin\psi_2 = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\psi_n = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\psi_{n-1};$$

celle des amplitudes deviendra

$$\cos(2\xi_1 - \xi) = \cos\xi \cos\psi,$$

$$\cos(2\xi_2 - \xi_1) = \cos\xi_1 \cos\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \cos\xi_{n-1} \cos\psi_{n-1}.$$

Dans le cas où les angles ξ seraient très-petits, on ne pourrait plus se servir de ces formules; mais on en déduit les suivantes qui ne présentent pas les mêmes difficultés :

$$\sin^2(2\xi_1 - \xi) = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi,$$

$$\sin^2(2\xi_2 - \xi_1) = \sin^2\xi_1 + \cos^2\xi_1 \sin^2\psi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin^2(2\xi_n - \xi_{n-1}) = \sin^2\xi_{n-1} + \cos^2\xi_{n-1} \sin^2\psi_{n-1}.$$

Ces dernières formules ne sont pas logarithmiques : il en existe d'autres qui ont l'avantage de l'être, mais elles exigent que les modules se succèdent dans l'ordre inverse de celui que nous avons adopté; nous les aurions rapportées, s'il nous avait été nécessaire d'effectuer les calculs au delà du premier module. Les précédentes, qui nous serviront au calcul de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à ce module, montrent actuellement la rapidité avec laquelle l'angle ξ_n se rapproche de sa valeur limite, lorsque ψ est très-petit ou que c diffère peu de l'unité.

Enfin, les deux systèmes de formules propres au calcul des fonctions elliptiques elles-mêmes deviennent :

$$F(c_n, \varphi_n) = \log \cot \tfrac{1}{2} \xi_n,$$

$$F(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi_{n-1}} F(c_n, \varphi_n),$$

. . . . . .

$$F(c_1, \varphi_1) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi_1} F(c_2, \varphi_2),$$

$$F(c\ , \varphi\ ) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi} F(c_1, \varphi_1);$$

$$E(c_n, \varphi_n) = \cos \xi_n,$$

$$E(c_{n-1}, \varphi_{n-1}) = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \psi_{n-1} E(c_n, \varphi_n) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi_{n-1} F(c_n, \varphi_n) - \cos(2 \xi_n - \xi_{n-1}),$$

. . . . . .

$$E(c_1, \varphi_1) = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \psi_1 E(c_2, \varphi_2) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi_1 F(c_2, \varphi_2) - \cos(2 \xi_2 - \xi_1),$$

$$E(c\ , \varphi\ ) = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \psi\ E(c_1, \varphi_1) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \psi\ F(c_1, \varphi_1) - \cos(2 \xi_1 - \xi).$$

35. Nous limiterons d'abord l'emploi des formules précédentes en faisant $n = 1$. De cette manière, il sera inutile de calculer ψ_1, et il suffira d'appliquer la première des formules qui donnent la série des ξ. Le calcul des fonctions F et E se réduira ainsi à celui des formules extrêmes de chacune des deux séries.

Ceci posé, les premières équations (s'') donnent, en vertu de $i = 1$:

$$h'' = h + e,$$

$$q^2 = 2e\mu_0,$$

$$A = q^2 + (h'' - e)^2,$$

$$C = 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right],$$

$$B = C + h''^2,$$

$$\tang^2\varphi = \frac{B}{h''^2}\frac{y''^2 - h^2}{B - y''^2}.$$

De cette dernière équation on tire les trois relations suivantes :

$$\sin^2\xi = \frac{h''^2}{y^2}\frac{B - y''^2}{B - h''^2}, \qquad \cos^2\xi = \frac{B}{y''^2}\frac{y''^2 - h''^2}{B - h''^2}, \qquad \tang^2\xi = \frac{h''^2}{B}\frac{B - y''^2}{y''^2 - h''^2},$$

dont la première sera particulièrement utile.

Nous avons posé plus haut : $\sin\psi = b$, et $b^2 = 1 - c^2$; il s'ensuit

$$\sin\psi = \sqrt{1 - c^2};$$

or, $1 - c^2 = \frac{B - C}{B}$ en vertu des équations (s''), il vient donc

$$\sin\psi = \frac{h''}{\sqrt{B}}.$$

La valeur de Δ^2 est

$$\Delta^2 = 1 - c^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

ou

$$\Delta^2 = \sin^2\xi + \cos^2\xi \sin^2\psi;$$

de cette expression comparée avec la première des relations non logarithmiques entre les amplitudes, rapportées plus haut, on tire

$$\Delta^2 = \sin^2(2\xi_1 - \xi):$$

mettant dans la valeur précédente de Δ^2, pour $\sin^2\xi$, $\cos^2\xi$ et $\sin\psi$, leurs valeurs données ci-dessus, il vient

$$\Delta^2 = \frac{h''^2(B - y''^2) + h''^2(y''^2 - h''^2)}{y''^2(B - h''^2)} = \frac{h''^2}{y''^2},$$

et l'on a simplement

$$\Delta = \sin(2\xi_1 - \xi) = \frac{h''}{y''}.$$

Le troisième terme de la valeur de x'' devient de même

$$\frac{C}{\sqrt{B}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \frac{B - h''^2}{\sqrt{B}}\frac{y''}{h''}\sin\xi\cos\xi = \sqrt{B - y''^2}\sqrt{1 - \frac{h''^2}{y''^2}}$$

(en supposant les angles φ et ξ compris entre 0° et 90°), ou, en vertu de la relation précédente,

$$\frac{C}{\sqrt{B}}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \sqrt{B - y''^2}\cos(2\xi_1 - \xi).$$

Les fonctions elliptiques limitées dans leur développement, comme il a été convenu, se réduisent à

$$F(c, \varphi) = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\psi}\log\cot\frac{1}{2}\xi_1,$$

$$E(c, \varphi) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\psi\cos\xi_1 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \cos(2\xi_1 - \xi).$$

A l'aide des valeurs que nous venons d'obtenir, et à cause de $D = o$, $G = o$, l'expression de $\pm x''$ se réduit d'abord à

$$\pm x'' = \frac{A}{\sqrt{B}} . F(c, \varphi) - \sqrt{B} . E(c, \varphi) + \sqrt{B - y''^2} \cos(2\xi_1 - \xi)$$

(on écrit ici le double signe devant x'', parce que l'on suppose les angles φ et ξ compris entre $o°$ et $90°$, ce qui suffit dans le problème des arches de pont) : en substituant dans cette dernière équation les valeurs des fonctions F et E, il vient

$$\pm x'' = \frac{A - 2B \sin^2 \frac{1}{2}\psi \cos^2 \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi} \log \cot \frac{1}{2}\xi_1 - 2\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi \cos \xi_1 + (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2}) \cos(2\xi_1 - \xi).$$

On peut encore chasser l'angle ψ : en effet, l'on a

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}\psi = 1 + \cos \psi = 1 + \sqrt{1 - \frac{h''^2}{B}} = 1 + \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B}},$$

ce qui donne

$$2\sqrt{B} \cos^2 \frac{1}{2}\psi = \sqrt{B} + \sqrt{C}.$$

D'un autre côté, le numérateur de la fraction qui multiplie $\log \cot \frac{1}{2}\xi_1$ peut s'écrire

$$A - \frac{1}{2} B \sin^2 \psi = A - \frac{1}{2} h''^2;$$

or on a

$$A = \frac{1}{2} C + h''^2 - \frac{1}{3} e^2,$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} h''^2 - \frac{1}{3} e^2,$$

d'où

$$A - \tfrac{1}{2} h''^2 = \tfrac{1}{2}\left(B - \tfrac{2}{3} e^2\right):$$

soit, pour abréger,

$$A' = \frac{B - \frac{2}{3} e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}},$$

il viendra finalement

$$\pm x'' = A' \log \cot \tfrac{1}{2}\xi_1 - (\sqrt{B} + \sqrt{C}) \cos \xi_1 + (\sqrt{B} + \sqrt{B - y''^2}) \cos(2\xi_1 - \xi).$$

35 *bis*. Sans entrer dans tous les développements qui seraient nécessaires pour effectuer les calculs, nous allons dire brièvement comment nous avons obtenu la correction qu'il faut apporter à la valeur de x'' pour parvenir au même degré d'exactitude que si nous avions poussé le calcul des fonctions elliptiques jusqu'à l'emploi de l'amplitude ξ_2.

Nous avons posé d'abord

$$\xi_2 = \xi_1 + \sigma,$$

σ désignant une quantité très-petite que nous avons obtenue en appliquant le théorème de Taylor à la relation

$$\sin^2(2\xi_2 - \xi_1) = \sin^2 \xi_1 + \cos^2 \xi_1 \sin^2 \psi_1:$$

la valeur de σ est, aux termes près des ordres supérieurs,

$$\sigma = \tfrac{1}{4} \cot \xi_1 \tang^4 \tfrac{1}{2}\psi.$$

Quant à la valeur de $\tang \frac{1}{2}\psi$: de la relation

$$2\sqrt{B} \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{B} + \sqrt{C},$$

on tire

$$2\sqrt{B}\sin^2\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{B} - \sqrt{C},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{h''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}},$$

quantité dont la quatrième puissance est très-petite.

En faisant toujours usage du théorème de Taylor, on trouve aisément

$$\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_2 = \log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \tfrac{1}{4}\frac{\cot\xi_1}{\sin\xi_1}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\cos\xi_2 = \cos\xi_1 - \tfrac{1}{4}\cos\xi_1\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient pour expressions approchées des corrections à appliquer aux fonctions F et E,

$$\delta F = \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \frac{\cot\xi_1}{\sin\xi_1}\right),$$

$$\delta E = \operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left(\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \cos\xi_1\right);$$

et l'on en déduit, pour la correction de la valeur absolue de x'',

$$\delta x'' = -\sqrt{B}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\psi\left\{\tfrac{7}{8}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 + \left(\frac{1}{8\sin^2\xi_1} - 1\right)\cos\xi_1\right\},$$

en négligeant les quantités de l'ordre de $\operatorname{tang}^6\frac{1}{2}\psi$. Dans cette expression, la parenthèse croît à mesure que ξ_1 diminue ou que h'' tend vers zéro; mais le facteur $\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\psi$ décroît plus rapidement que la valeur de la parenthèse n'augmente, et $\delta x''$ s'annule avec h''.

Une expression encore susceptible de simplification est celle de la tangente de l'angle α que fait la normale à l'extrados avec la verticale : l'équation (m''') dans laquelle les quantités α et y'' ont été

notées de l'indice 1, devient, en rétablissant la généralité de cette formule,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{(y''^2 - h''^2)(B - y''^2)}}{A - y''^2};$$

on en tire aisément, au moyen des relations précédemment établies entre les quantités A, B et C, et négligeant les termes en e^4.

$$\sin\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{\sqrt{(y''^2 - h''^2)(B - y''^2)}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{C}\,\frac{A - y''^2}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - \frac{2}{C}(y''^2 - h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}}.$$

La dernière de ces équations va nous fournir un moyen plus rapide de calculer l'angle α. En y substituant la valeur de A en fonction de C obtenue précédemment, puis multipliant haut et bas par $\frac{2}{C}$, on a

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2\frac{y''^2 - h''^2}{C} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\left[1 - 2\frac{y''^2 - h''^2}{C}\right]\frac{e^2}{C}}};$$

soit

$$\cos\alpha' = 1 - 2\frac{y''^2 - h''^2}{C},$$

d'où

$$\sin\frac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{y''^2 - h''^2}{C}},$$

équation qui sera très-propre à déterminer l'auxiliaire α'; la valeur de $\cos\alpha$ deviendra

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos\alpha'\frac{e^2}{C}}};$$

or, si l'on néglige les termes du quatrième ordre, elle se réduira à

$$\cos\alpha = \cos\alpha' - \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin^2\alpha' :$$

on en déduit aisément

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'.$$

Cette équation, jointe à celle qui donne l'angle α' par le sinus de sa moitié, sera d'un emploi plus commode que les formules précédentes, pour calculer l'angle α.

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles α et α' est facile. Déterminons, en effet, l'angle des intrados réel et fictif; son expression est $\frac{d.2\delta}{ds''} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}\frac{dy''}{ds''}$, en vertu de l'équation (x): or, en négligeant les termes du troisième ordre, cette expression coïncide avec la valeur de $\alpha - \alpha_1$ donnée par l'équation précédente. Il en résulte que l'angle α' est l'angle que ferait avec l'axe des x la tangente à une courbe dont les éléments seraient symétriques avec ceux de l'intrados réel par rapport à la tangente à l'intrados fictif.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de résumer les relations que nous venons d'obtenir; nous y joindrons une relation nouvelle en posant $C = 4Q^2$, Q^2 étant une quantité qui nous servira dans le calcul des coordonnées par voie de différence. Pour éviter le recours à la première partie du mémoire, nous reproduirons les notations.

RÉSUMÉ DES FORMULES SIMPLIFIÉES POUR LE CAS OÙ LE MASSIF ET LA VOÛTE SONT DE MÊME DENSITÉ.

Notations.

36. L'axe des y est vertical et passe par le sommet de l'arche; l'axe des x est horizontal et situé dans un plan parallèle au plan des têtes, qui est élevé au-dessus du plan tangent à l'extrados d'une quantité h représentant la hauteur d'une couche de matériaux

de même densité que le massif et dont le poids serait égal à celui des couches de densités diverses qui surchargent la voûte.

Nous désignons par :

h la hauteur de la charge qui s'élève au-dessus de la clef réduite à la densité du massif, comme il vient d'être dit, en sorte que h désigne l'ordonnée du sommet de l'extrados;

e l'épaisseur fictive de la voûte ou la distance constante entre l'extrados et l'intrados fictif, mesurée suivant la normale commune à ces deux courbes;

h'' l'ordonnée du sommet de l'intrados fictif;

x', y' et ρ' les coordonnées et le rayon de courbure de l'extrados;

x'', y'' et ρ'' les coordonnées du point de l'intrados fictif situé sur la normale à l'extrados menée par le point (x', y'); et le rayon de courbure de l'intrados fictif, au point (x'', y'');

X, Y les coordonnées du point de l'intrados réel situé sur la même normale;

α l'angle de cette normale avec l'axe des y ou du plan de joint passant par le point (x', y') avec la verticale;

α' un angle auxiliaire très-peu différent de α, et dont la signification géométrique a été donnée à la fin du numéro précédent.

ε l'épaisseur réelle, ou la distance comprise entre le point (x', y') de l'extrados et le point (X, Y) de l'intrados réel;

δ la distance comprise entre le milieu du joint réel et le milieu de l'épaisseur fictive, en sorte que 2δ désigne la distance des points (x'', y'') de l'intrados fictif et (X, Y) de l'intrados réel;

μ la hauteur d'une colonne prismatique de la matière des voussoirs, dont le poids produirait sur une base horizontale la pression qui a lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point (x', y');

λ la dimension de l'arche dans le sens perpendiculaire au plan des têtes ou parallèle aux génératrices;

ϖ le poids de l'unité de volume de la matière des voussoirs et du massif;

T et t la pression totale et la pression par unité de surface qui ont lieu dans le plan normal à l'extrados mené par le point (x', y');

U la poussée horizontale qui résulte des actions exercées par le massif sur la face verticale de la culée qui passe par l'arête inférieure de l'extrados;

u l'ordonnée du point d'application de cette résultante;

V le volume des matériaux de la demi-arche et du massif limité dans le sens horizontal par des plans verticaux menés par le sommet et le point inférieur de l'extrados parallèlement aux génératrices;

f la flèche de l'arche, ou la montée;

g la demi-ouverture.

Les indices o et 1 serviront à désigner les valeurs particulières que prennent les diverses variables au sommet de la voûte et aux naissances (à l'exception de l'indice 1 qui affecte les lettres ψ et ξ dans les expressions des modules et amplitudes des fonctions elliptiques).

Voici maintenant les relations dont nous aurons à faire usage pour calculer l'abscisse d'un point de l'intrados fictif en fonction de l'ordonnée, déterminer la situation de la normale et l'intensité des pressions:

$$h'' = h + e; \tag{1}$$

$$q^2 = 2e\mu_0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= q^2 + (h'' - e)^2, \\ 4Q^2 = C &= 2\left[q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2\right], \\ B &= C + h''^2, \\ A' &= \frac{B - \frac{2}{3}e^2}{\sqrt{B} + \sqrt{C}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\sin(2\xi_1-\xi)=\frac{h''}{y''},\qquad \sin\xi=\frac{h''}{y''}\sqrt{\frac{B-y^2}{C}},$$

$$\left.\begin{aligned} x''=A'\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1-(\sqrt{B}+\sqrt{C})\cos\xi_1+(\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2})\cos(2\xi_1-\xi)\\ -\sqrt{B}\left(\frac{h''}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\right)^4\left\{\frac{7}{8}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1+\left(\frac{1}{8\sin^2\xi_1}-1\right)\cos\xi_1\right\}. \quad (*) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(Pour plus de clarté, on a supprimé les doubles signes, ici et dans les expressions suivantes; on pourrait toujours les rétablir au besoin, en se rappelant que les courbes intrados et extrados sont symétriques par rapport à l'axe des y : tout se rapporte ainsi à la partie de l'arche située du côté des x positifs.)

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha&=\frac{2}{C}\frac{\sqrt{(y^2-h^2)(B-y''^2)}}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\left[1-\frac{2}{C}(y^2-h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}},\\ \cos\alpha&=\frac{2}{C}\frac{A-y''^2}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\left[1-\frac{2}{C}(y^2-h''^2)\right]\frac{e^2}{C}}}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\sqrt{(y''^2-h''^2)(B-y^2)}}{A-y''^2}; \quad (6)$$

on peut aussi calculer l'angle α au moyen des deux formules

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha'=\sqrt{\frac{y''^2-h''^2}{C}},\qquad \sin(\alpha-\alpha')=\frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'. \quad (6\ bis)$$

$$\mu=\mu_0+y''-h''+\frac{1}{3\mu_0}(y''^2-h''^2), \quad (7)$$

(*) Il arrive souvent que le deuxième et le troisième terme du second membre sont peu différents : il faut alors calculer ces termes avec une figure de plus que le premier, à moins qu'on ne remplace ces deux termes par le suivant, que l'on obtient après quelques transformations,

$$-\frac{y^2\cos^2(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{C}+\sqrt{B-y^2}}\Big\}\cos(2\xi_1-\xi)+\left(1+\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y''^2}}{2\sqrt{C}}\right)\frac{\sin^2(2\xi_1-\xi)}{\cos(2\xi_1-\xi)+\cos\xi_1}\Big\}.$$

Quant au dernier, il est presque insensible pratiquement; malgré cela, nous en avons tenu compte dans le calcul des tables dont il sera question ci-après.

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'', \qquad \varepsilon = e + 2\delta, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} Y &= y'' + 2\delta\cos\alpha, \quad y' = y'' - e\cos\alpha, \\ X &= x'' - 2\delta\sin\alpha, \quad x' = x'' + e\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Les ordonnées des points extrêmes de l'intrados fictif sont

$$y''_0 = h'', \quad y''_1 = f + h'' + 2\delta_0 - 2\delta_1\cos\alpha_1; \tag{10}$$

celles des points extrêmes de l'intrados réel sont

$$Y_0 = h'' + 2\delta_0, \quad Y_1 = f + h'' + 2\delta_0; \tag{11}$$

et la valeur de la demi-ouverture est

$$g = X_1 = x''_1 - 2\delta_1\sin\alpha_1. \tag{12}$$

Les relations entre les pressions qui ont lieu dans les plans de joint extrêmes données par les équations (t'') et (u'') sont enfin

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + f + \frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \\ \mu_0 &= \mu_1 - f - \frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nous n'avons point à dire ici comment on devra se servir de ces formules, et pratiquer, suivant le besoin, les éliminations. En traitant de la construction des tables destinées à éviter les calculs par tâtonnements, nous montrerons, dans les numéros suivants, comment nous avons fait usage de ces formules; mais nous devions les rassembler tout d'abord.

DE LA CONSTRUCTION DE TABLES APPROPRIÉES À LA DÉTERMINATION DES INCONNUES, DANS LE CAS DES ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

37. De ce qui a été exposé au n° 24, il résulte que si l'on se donne, dans le cas des arches incomplètes, les quantités f, g,

h, μ_0 ou μ_1 et i, et que l'on attribue à l'épaisseur e une valeur hypothétique, on pourra calculer la valeur de g en fonction des cinq autres quantités, à l'aide des formules générales. Comme nous avons fait $i = 1$, la valeur de g n'est plus fonction, au moyen des équations du numéro précédent, que de quatre variables indépendantes; mais l'homogénéité de nos formules permet de substituer aisément la recherche des rapports des variables à la recherche de leurs valeurs absolues[1], en sorte que le problème serait ramené à celui de la construction de tables à triple entrée, problème à peu près inabordable pratiquement. Or la difficulté qui se présente ici peut être levée en substituant à la donnée h, l'ordonnée Y_0 du sommet de l'intrados. Les problèmes qui se présentent dans la construction des chemins de fer comportent plutôt, comme données relatives aux arches de pont, les différences de niveau de leurs diverses parties, que l'épaisseur rigoureusement déterminée des couches de matériaux qui s'élèvent au-dessus du sommet de l'extrados.

Admettant donc la quantité Y_0 comme l'une des données du problème, nous remarquerons que, si l'on fait abstraction des termes du deuxième ordre ou qui ont en facteur le carré de l'épaisseur e, et que, de plus, on prenne pour inconnue la quantité Q^2 ou $\frac{1}{4}C$, l'épaisseur e disparaîtra complétement des équations; en sorte que g sera seulement fonction de f, Y_0 et de l'inconnue Q^2.

[1] Nous profiterons de la circonstance pour présenter une remarque qui eût peut-être été mieux placée ailleurs, et que le lecteur aura sans doute faite. Les relations que nous avons établies, ayant lieu entre des rapports de grandeurs linéaires, restent les mêmes dans les arches de profils semblables, où les longueurs homologues sont entre elles dans un même rapport : il s'ensuit que, dans les arches semblables, la quantité μ, qui détermine les pressions par unité superficielle entre les voussoirs en des points semblablement placés, est proportionnelle aux dimensions linéaires homologues des arches que l'on compare. La pression totale par unité de longueur mesurée parallèlement aux génératrices de l'intrados, qui est représentée par μe, et détermine la poussée dans le joint inférieur quand μ prend la valeur particulière μ_1, se trouve, par suite, proportionnelle au carré des dimensions homologues.

En effet, se donnant Q^2, Y_0 et f, les équations (11) et (10) donnent $h'' = Y_0$ et $y''_1 = f + h''$, aux termes près du deuxième ordre; les équations (3) donnent $C = 4Q^2$, $B = C + h''^2$; et, en faisant $y'' = y''_1$ dans les équations (4), celles-ci permettent d'obtenir la valeur de x''_1 qui, en vertu de (12), est égale à g, aux termes près du deuxième ordre. Introduisant les rapports de lignes au lieu de leurs valeurs absolues, il arrive que $\frac{g}{f}$, par exemple, n'est plus fonction que de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{Q^2}{f^2}$, et que la solution approchée du problème se trouve dépendre de la construction de tables à double entrée seulement.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée, nous avons calculé effectivement des tables qui présentent la suite des valeurs de $\frac{g}{f}$ relatives à des valeurs fixes de $\frac{Y_0}{f}$ et à des valeurs variables du rapport $\frac{Q^2}{f^2}$; dix tables de ce genre ont été calculées pour des valeurs de $\frac{Y_0}{f}$ égales à 0,4; 0,5; 0,6; ....; 1,2; 1,3. Or, la recherche de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$ à l'aide de ces tables eût été pénible; il eût fallu même en augmenter très-notablement l'étendue pour les adapter à cet usage. Pour obvier à ces inconvénients, nous avons pris le parti de *retourner* chacune des dix tables, c'est-à-dire de calculer par voie d'interpolation, à l'aide des tables primitives, de nouvelles tables qui donnent directement la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$ en fonction de $\frac{Y_0}{f}$ et de $\frac{g}{f}$. Nous avons formé de cette manière la première des tables à double entrée que l'on trouvera à la fin de ce mémoire, sous le titre de *Table I*. L'étendue que nous lui avons donnée nous paraît répondre aux exigences de l'art des constructions. Nous ne présenterons point ici les détails relatifs au calcul des tables; disons seulement que nous avons fait usage des formules d'intercalation mentionnées, à propos du calcul des éphémérides des planètes, dans un mémoire sur la détermination de leurs orbites, inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1852.

La Table I donne la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, et, par suite, celle de Q^2, aux termes près du deuxième ordre. Cette première approximation permet de calculer la valeur des termes négligés, et d'en tenir compte ensuite. En effet, ces termes étant du deuxième ordre ou dépendants du carré de e, il suffit d'obtenir la valeur approximative de e en fonction des données. A cet égard, se donnant μ_1 par exemple, la deuxième équation (13) fait connaître μ_0, et, si l'on élimine q^2 entre les équations (2) et (3), il vient

$$Q^2 = e\left(\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e\right),$$

d'où

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}, \tag{14}$$

équation dans laquelle on pourrait négliger $\frac{2}{3}e$ au dénominateur. La valeur trouvée de e, pour être admissible, doit, en vertu de l'équation (1), donner une valeur $h = h'' - e$ qui ne soit pas négative, et qui soit au moins égale à celle réclamée par l'expérience.

Si, au lieu de se donner μ_1, on se donnait h, il viendrait par l'équation (1),

$$e = h'' - h; \tag{15}$$

la valeur de μ_0 s'en déduirait :

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \tag{16}$$

et la première équation (13) donnerait celle de μ_1; cette dernière devrait être compatible avec la résistance des matériaux employés, pour que la solution fût admissible.

Dans les deux cas, il est donc possible d'obtenir une valeur approchée de e; nous allons dire actuellement quel usage il convient d'en faire, pour corriger la valeur de Q^2 déduite des tables.

38. Enumérons les quantités négligées dans le calcul de la Table I.

1° Nous avons fait $h'' = Y_0$; il résulte de la première équation (11) que h'' doit recevoir la correction

$$\delta h'' = -2\delta_0.$$

2° Nous avons pris $y''_1 = f + h''$; la deuxième équation (10) montre que l'on doit appliquer à y''_1 la correction

$$\delta y''_1 = \delta h'' + 2\delta_0 - 2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

ou simplement

$$\delta y''_1 = -2\delta_1 \cos\alpha_1,$$

en vertu de la relation précédente.

3° Le terme en e^2 de la valeur de A′ ayant été négligé, il s'ensuit que x''_1 doit subir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2.$$

4° Nous avons fait simplement $g = x''_1$; il résulte de l'équation (12) que g doit recevoir la correction $\delta x''_1 - 2\delta_1 \sin\alpha_1$: comme, d'autre part, la valeur de g ne doit pas changer, on a cette équation de condition,

$$\delta x''_1 - 2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0,$$

dans laquelle nous devons regarder $\delta x''_1$ comme étant la variation de x''_1 qui résulte des trois corrections que nous venons d'indiquer, et d'une correction inconnue $\delta(Q^2)$ ou δC qu'il s'agit de déterminer : x''_1 étant donc considéré comme fonction de h'', y''_1 et C, nous aurons

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dy''_1}\delta y''_1 + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - 2\delta_1 \sin\alpha_1 = 0:$$

dans cette équation, $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désigne la dérivée partielle de x''_1 par rapport à h'', obtenue en faisant abstraction de la variation que x''_1 subit par suite de ce que y''_1 varie avec h''; le terme $\frac{dx''_1}{dy''_1}\,\delta y''_1$ comprend cette variation.

Substituant les valeurs obtenues plus haut de $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et $\delta y''_1$, et observant que l'on a $\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1}$, $\delta C = 4\,\delta(Q^2)$; il viendra

$$-\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}\,e^2 - 2\,\delta_0\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) - \frac{2\,\delta_1}{\sin\alpha_1} + 4\,\frac{dx''_1}{dC}\,\delta(Q^2) = 0.$$

Nous avons d'ailleurs, première équation (8),

$$2\,\delta_0 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}\,h'', \qquad 2\,\delta_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}\,y''_1,$$

ou, en négligeant les quantités du troisième ordre, équation (3),

$$2\,\delta_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\,h'', \qquad 2\,\delta_1 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{C}\,y''_1.$$

En négligeant les quantités du deuxième ordre dans la première équation (5), ce qui ne donnera lieu qu'à des erreurs du quatrième dans le résultat, on aura encore

$$\frac{2}{C\sin\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}} = \frac{1}{y''_1\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, on en tirera

$$6\,\frac{dx''_1}{dC}\,\delta(Q^2) = \left\{\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{1}{2\cos(2\xi_1 - \xi)\sqrt{B - y_1''^2}}\right\}e^2. \quad (17)$$

Pour faire usage de cette formule, il reste à déterminer les valeurs des deux dérivées $\frac{dx''_1}{dC}$ et $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. On peut les obtenir de deux manières différentes.

En premier lieu, si l'on effectue les différentiations à l'aide des expressions du n° 36, et que l'on néglige la variation du dernier terme de x'', on parvient, après des transformations que nous nous dispenserons de reproduire, aux deux valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) &= h''\,\frac{2\sqrt{C}+\sqrt{B}}{(\sqrt{B}+\sqrt{C})^2}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}+\dfrac{h'^2}{\sqrt{B-y_1''^2}}}{2\,y_1''\sqrt{B}\cos(2\xi_1-\xi)}\\ &\quad - \frac{\sqrt{B}+\sqrt{B-y_1''^2}}{y_1''}\tan g(2\xi_1-\xi) + h''\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos\xi_1-\cos(2\xi_1-\xi)\right]\right\},\\ 6\,\frac{dx}{dC} &= 3\,\frac{2\sqrt{C}-\sqrt{B}}{\sqrt{C}(\sqrt{B}+\sqrt{C})}\log\cot\tfrac{1}{2}\xi_1 - \left[\frac{A'}{\sin\xi_1} - (\sqrt{B}+\sqrt{C})\sin\xi_1\right]\frac{3}{2}\,\frac{h''\,y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{C\sqrt{B}\sqrt{B-y_1''^2}}\\ &\quad + 3\left\{\frac{\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y_1''^2}} - \frac{\cos\xi_1}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\cos\xi_1-\cos(2\xi_1-\xi)\right]\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

En second lieu, $\frac{dx''_1}{dh''}$ désignant la dérivée partielle de x''_1 par rapport à h'', il vient, en vertu de ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1}\,\frac{dy''_1}{dh''},$$

ou simplement,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right) + \frac{dx''_1}{dy''_1},$$

à cause de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$, 2e équation (10). Or, on a, équation (6),

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \cot\alpha_1 = \frac{A - y_1''^2}{\sqrt{y_1''^2 - h''^2}\sqrt{B-y_1''^2}},$$

valeur qui donne, en ayant égard aux relations établies au n° 35, et négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\frac{dx''_1}{dy''_1} = \frac{\sqrt{B-y_1''^2}}{2\,y''_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \frac{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{2\sqrt{B-y_1''^2}}.$$

Maintenant, C ou $4Q^2$ étant, en vertu du *retournement* des tables, une fonction de g et Y_0 ou de x''_1 et h'', il vient

$$dC = \frac{dC}{dx''_1}\,dx''_1 + \frac{dC}{dh''}\,dh'' :$$

pour obtenir la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$, on doit supposer Q^2 ou C constant; alors cette équation, en y faisant $dC = 0$, donne

$$\frac{dx''_1}{dh''} = -\frac{\frac{dC}{dh''}}{\frac{dC}{dx''_1}} = -\frac{\frac{d(Q^2)}{dh''}}{\frac{d(Q^2)}{dx''_1}}.$$

La dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dC}$ s'obtiendra pareillement en faisant $dh'' = 0$, et il viendra

$$\frac{dx''_1}{dC} = +\frac{1}{\frac{dC}{dx''_1}} = +\frac{1}{4\frac{d(Q^2)}{dx''_1}}.$$

A l'aide de ces diverses valeurs, on tirera de l'équation (14),

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = \frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} 2\,\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{1}{\cos(2\xi_1-\xi)\sqrt{B-y''^2_1}} \\ -\dfrac{h''}{C}\left(\dfrac{\sqrt{B-y''^2_1}}{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)} - \dfrac{y''_1\cos(2\xi_1-\xi)}{\sqrt{B-y''^2_1}}\right)\end{array}\right\}\frac{d(Q^2)}{dx''_1} - \frac{2}{3}\frac{h''}{C}\frac{d(Q^2)}{dh''}. \quad (19)$$

La quantité f étant une constante, les deux dérivées que renferme cette expression peuvent s'écrire

$$f\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{g}{f}} \quad \text{et} \quad f\frac{d\frac{Q^2}{f^2}}{d\frac{Y_0}{f}}.$$

Or, les nouvelles dérivées partielles que nous venons d'écrire se déduisent aisément des tables *retournées*, en prenant les différences de la fonction $\frac{Q^2}{f^2}$ successivement dans le sens vertical et dans le sens horizontal, et faisant usage de la formule connue

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{3}\Delta^3 u - \frac{1}{4}\Delta^4 u + \dots\right\} \quad (20)$$

qui sert à obtenir la dérivée d'une fonction u réduite en table, au moyen de ses différences Δu, $\Delta^2 u, \dots$ et de la différence constante Δx de la variable.

Il suffit ici de faire $\Delta x = 0{,}1$, ce qui conduit à prendre les différences de dix en dix termes dans le sens vertical, et de terme en terme dans le sens horizontal, pour obtenir des valeurs de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ et, par suite de δQ^2, qui corrigent assez exactement celles de Q^2. Les tables primitives ou des valeurs de $\frac{g}{f}$ auraient bien pu donner immédiatement les dérivées partielles $\frac{dx''_1}{dC}$; mais il n'aurait pas été possible d'en déduire aisément les dérivées $\frac{dx''_1}{dh''}$, tant à cause de la divergence de la série des différences Δu, $\Delta^2 u, \dots$, qu'à cause des limites relatives à $\frac{Q^2}{f^2}$ qu'il eût fallu reculer en augmentant démesurément l'étendue de ces tables.

Nous avons calculé les tables qui donnent les valeurs de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; on les trouvera à la suite des tables de la valeur de $\frac{Q^2}{f^2}$, sous le titre de *Table II*. Ayant obtenu une valeur approchée de e, comme il a été dit au n° 37, on en déduira aisément, à l'aide de la Table II, la correction $\delta(Q^2)$ à appliquer à la valeur de Q^2 fournie par la Table I; et l'on aura, par les équations (11), (8) et (3),

$$h'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^4}{Q^2}Y_0. \quad (21)$$

Les valeurs corrigées de Q^2 et h'' pourront être appliquées au

calcul d'une valeur plus exacte de e au moyen de l'une ou de l'autre des formules (14) et (15), suivant les cas [1]. Connaissant actuellement Q^2, h'', e et μ_0, l'emploi d'un petit nombre des formules du n° 36 fournira tout ce qu'il est nécessaire de connaître pour procéder au calcul des coordonnées, rayons de courbure, poussées, etc.

CONSTRUCTION DES TABLES POUR LE CAS DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER*.

39. Nous avons vu, n° 26, comment la condition de la verticalité des tangentes extrêmes introduit une équation de condition entre les constantes, et réduit d'une unité les arbitraires du problème relatif aux arches complètes. Il est clair, si l'on se reporte aux considérations présentées n° 37, que la substitution de la constante h'' à la constante h permettra de ramener la solution du problème à la construction d'une table à simple entrée. C'est ce qui se vérifiera du reste aisément par le fait même.

L'équation de condition que nous venons de rappeler est (d''')

$$q^2 = f(f + 2h'') + 2h''e - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2;$$

en éliminant q^2 entre celle-ci et l'équation (3), il vient immédiatement

$$\frac{1}{2}C = f(f + 2h'') + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}\right)e^2,$$

[1] Nous indiquerons un moyen d'éviter le calcul de $\delta(Q^2)$, et d'obtenir néanmoins une solution exacte jusque dans les termes du deuxième ordre. Ce moyen consisterait à accepter la valeur approchée de Q^2 comme exacte, et à en déduire les valeurs de e et q^2 : procédant ensuite au calcul des coordonnées ou au tracé de l'intrados, on s'arrêterait à l'ordonnée de l'intrados réel, qui répond, soit à la flèche, soit à la demi-ouverture données, et l'on prendrait à la place de l'une d'entre elles, celle fournie par le calcul ou le tracé. A la vérité, ce ne serait pas la solution du problème proposé, mais bien celle d'un problème du même genre, dans lequel les données différeraient très-peu des données du problème primitif. Or il est très-rare que les données soient tellement bien fixées, qu'on ne puisse leur faire subir, en pratique, la très-petite variation qu'entraînerait le mode de solution qui vient d'être indiqué.

équation à laquelle il faut joindre la valeur de y''_1 obtenue n° 26,

$$y''_1 = f + h'' + \frac{1}{3} h'' \frac{e^2}{q^2}.$$

On tire de celle-ci,

$$h'' = y''_1 - f - \frac{2}{3} \frac{h''}{C} e^2; \qquad (22)$$

cette valeur permet d'écrire C sous la forme

$$C = 2f(2y_1'' - f) + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2h''^2}{C}\right) e^2, \qquad (22\ bis)$$

ou bien

$$C = 2f(2y''_1 - f) + \frac{4}{3} \frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)} e^2. \qquad (23)$$

D'un autre côté, les équations (10) et (11) donnent

$$Y_1 - y''_1 = 2\delta_1 \cos\alpha_1;$$

or observons que $2\delta_1$ et $\cos\alpha_1$ sont des quantités du deuxième ordre; leur produit étant du quatrième, on aura donc, à des quantités près de cet ordre,

$$y''_1 = Y_1. \qquad (24)$$

Maintenant, il est évident que, si l'on se donne l'ordonnée Y_1 des naissances, et l'une des quantités f et h'', on pourra, en négligeant les termes du deuxième ordre, obtenir la valeur de x''_1 à l'aide des équations (24), (22) et (23), jointes à la relation $B = C + h''^2$ et aux équations (4). La demi-ouverture g tirée de l'équation (e''') peut d'ailleurs s'écrire

$$g = x''_1 - \frac{2}{3} \frac{y}{C} e^2; \qquad (25)$$

elle se réduit à $g = x''_1$, lorsqu'on néglige les termes du second ordre. Ainsi la quantité g est fonction des deux variables Y_1 et f ou h''; et le rapport $\frac{g}{Y_1}$ se trouve, par suite, être fonction d'une seule variable qui est $\frac{f}{Y_1}$ ou $\frac{h''}{Y_1}$, suivant que l'on se donne l'une ou l'autre des deux variables f et h''.

La *Table III* insérée à la fin de ce mémoire contient, dans une première colonne, la suite des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$, et, dans une seconde, les valeurs correspondantes de $\frac{g}{Y_1}$. Le rapport $\frac{g}{f}$ des nombres de la deuxième et de la première colonne est donné dans une troisième colonne. De cette manière notre table permet de trouver l'une des trois quantités f, g et Y_1 au moyen des deux autres. Il est vrai que, théoriquement, les valeurs tirées de la Table III sont seulement approximatives, mais nous verrons bientôt qu'en pratique, on peut les considérer comme exactes.

Les valeurs de f et h'' étant connues, du moins approximativement, il devient possible de calculer l'épaisseur e, en se donnant l'une ou l'autre des quantités μ_1 et h.

En premier lieu, soit donné μ_1 : la deuxième équation (13) fait connaître μ_0 à l'aide de μ_1. L'équation (c''') jointe à la relation $h = h'' - e$ donne

$$y_1''^2 - h''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{2}{3}e^2,$$

et, à cause de $q^2 = 2e\mu_0$, on obtient immédiatement

$$e = \frac{1}{2}\frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \qquad (26)$$

La valeur de e s'en déduira en négligeant d'abord le terme $\frac{1}{3}e$ au dénominateur, et y substituant ensuite sa valeur obtenue par une première approximation.

On obtiendrait aussi la valeur de e sans passer par μ_0, au moyen de la formule

$$e = \frac{1}{2} \frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_1 - y''_1\left(1 + \frac{y''_1}{6(\mu_1 - f)}\right)}; \qquad (27)$$

mais, comme la valeur de μ_0 sert au calcul de q^2, il sera préférable d'employer l'équation (26).

Quelle que soit, au surplus, celle des deux expressions (26) et (27) dont on ait fait usage, la solution trouvée devra, pour être admissible, satisfaire à de certaines conditions. Nous ne mentionnerons pas la condition $e > 0$, attendu que les valeurs de μ_1 et μ_0 seront toujours prises beaucoup plus grandes que y''_1 et h''; cette condition sera donc toujours remplie. Mais il faudra que l'on ait toujours $e < h''$, et, en outre, que la quantité $h = h'' - e$ qui en résultera, ne soit point inférieure à une limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée. Si ces conditions ne sont pas remplies, il faudra modifier les données. On diminuera l'épaisseur e en choisissant des matériaux plus résistants.

En second lieu, si l'on se donne la hauteur h de la surcharge, on aura immédiatement

$$e = h'' - h, \qquad (28)$$

et il y faudra s'assurer si la plus grande valeur de μ est compatible avec la nature des matériaux employés. A cet égard, on aura par l'équation (27),

$$\mu_0 = \frac{y_1''^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3}e, \qquad (29)$$

et la première équation (13) fera connaître ensuite μ_1. Dans le cas où la valeur de μ_1 se trouverait être trop forte, il faudrait augmenter e et par suite h''.

La valeur de e étant supposée connue au moins approximati-

vement, nous avons à rechercher quelles corrections doivent subir les inconnues du problème déduites de la Table III.

40. Les variables f, g, Y_1, entre lesquelles la Table III établit une dépendance mutuelle, sont au nombre de trois; et l'on peut se donner deux de ces variables arbitrairement, ce qui fournit trois combinaisons distinctes : mais, la demi-ouverture g étant toujours au nombre des données, nous n'aurons à examiner que les deux combinaisons qui comprennent les deux systèmes de données g, Y_1 et g, f.

Première combinaison. — Étant donnés g et Y_1, trouver la correction de la valeur de f tirée de la Table III.

Les quantités négligées dans la construction de cette table sont faciles à rétablir, maintenant que la valeur de e est connue approximativement. Soit, en effet, δf la correction inconnue de f.

1° L'équation (22) a été appliquée en négligeant le terme du deuxième ordre et faisant usage d'une valeur seulement approchée de f; on aura donc

$$\delta h'' = -\delta f - \frac{2}{3}\frac{h''}{C}e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne lieu à des corrections du même genre; leur somme est

$$\delta C = 4(y''_1 - f)\delta f + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h''^2}{C}\right)e^2.$$

3° La valeur de x''_1 a été calculée en négligeant le terme du deuxième ordre contenu dans A'; nous devons donc, en vertu de l'équation (4) et de la valeur de A', appliquer à x''_1 la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2.$$

4° Le terme du deuxième ordre ayant été négligé dans l'équa-

tion (25), si nous désignons par $\delta x''_1$ la correction de x''_1 qui résulte de celles que nous venons d'indiquer, et que nous observions que g doit conserver une valeur constante et donnée, nous aurons

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0.$$

Or, x''_1 peut être considéré comme une fonction des deux variables h'' et C, en vertu des équations (22) et (23), puisque f n'entre dans x''_1 que par ces variables; et l'équation précédente devient

$$(\delta x''_1) + \frac{dx''_1}{dh''}\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0,$$

ou, en mettant pour $(\delta x''_1)$, $\delta h''$ et δC leurs valeurs,

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \frac{h''}{C}\frac{dx''_1}{dh''} - 2\left[1+2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC} + \frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[4(y''_1-f)\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}\right]\delta f = 0;$$

on en tire

$$\frac{\delta f}{e^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1+2\dfrac{h''^2}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{4(y''_1-f)\dfrac{dx''_1}{dC} - \dfrac{dx''_1}{dh''}}.$$

On peut encore utiliser ici les différences obtenues en calculant la Table III, pour éviter le calcul direct de la dérivée $\frac{dx''_1}{dh''}$. En effet, puisque x''_1 est fonction de h'' et C, on a

$$dx''_1 = \frac{dx''_1}{dh''}dh'' + \frac{dx''_1}{dC}dC;$$

et, comme h'' et C sont d'ailleurs fonctions de la seule variable f,

en vertu des équations (22) et (23) privées de leurs termes du deuxième ordre, on a, pour expression de la dérivée totale,

$$\frac{dx''_1}{df} = \frac{dx''_1}{dh''}\frac{dh''}{df} + \frac{dx''_1}{dC}\frac{dC}{df},$$

ou, en vertu des mêmes équations,

$$\frac{dx''_1}{df} = 4(y''_1 - f)\frac{dx''_1}{dC} - \frac{dx''_1}{dh''}.$$

La valeur de la dérivée partielle $\frac{dx''_1}{dh''}$ qu'on en tire étant portée dans celle de $\frac{\delta f}{e^2}$, il vient, à cause de $h'' = y''_1 - f$,

$$\frac{\delta f}{e^2} = \frac{2}{3}\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} - \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{df} - 2\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{df}}. \qquad (30)$$

Il est clair que, y''_1 étant constant, on peut substituer à la dérivée $\frac{dx''_1}{df}$, la dérivée $\frac{d\frac{g}{Y_1}}{d\frac{f}{Y_1}}$ qui se déduit immédiatement des différences fournies par la Table III. Quant à la dérivée $\frac{dx''_1}{dC}$, nous en avons donné l'expression, (18). Cette expression et quelques-unes de celles qui servent à calculer x''_1 ou g reçoivent des simplifications provenant de la condition particulière aux arches complètes[1]; nous nous dispenserons de les présenter ici, attendu que

[1] Les quantités h'' et C (22) et (23), étant privées de leurs termes du deuxième ordre, fournissent aisément la relation

$$B - y_1''^2 = \frac{1}{2}C,$$

qui permet de simplifier le calcul de x''_1 et de ses dérivées partielles, dans le cas des arches complètes.

nos tables n'ont pas besoin d'être étendues au delà des limites que nous leur avons données, et que, sauf cette application, l'exposé des formules serait sans objet.

Deuxième combinaison. — Étant donnés f et g, trouver la correction de la valeur de Y_1 tirée de la Table III. Soit δY_1 la correction cherchée.

1° A cause de $y''_1 = Y_1$, on tire de l'équation (22)

$$\delta h'' = \delta Y_1 - \frac{2}{3}\frac{h''}{C}e^2.$$

2° L'équation (22 *bis*) donne

$$\delta C = 4f\delta Y_1 + \frac{4}{3}\left(1 + 2\frac{h^2}{C}\right)e^2.$$

3° La valeur de x''_1 doit, comme plus haut, recevoir la correction spéciale

$$(\delta x''_1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}e^2,$$

à cause du terme du deuxième ordre négligé dans A'.

4° g étant donné, et $\delta x''_1$ désignant l'ensemble des corrections que doit subir x''_1, l'équation (25) donne encore

$$\delta x''_1 - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0.$$

Or, x''_1 se trouve être ici fonction des deux variables h'' et C, si l'on conçoit y''_1 remplacé par sa valeur $h'' + f$, équation (22); il s'ensuit que l'équation précédente peut s'écrire

$$(\delta x''_1) + \left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)\delta h'' + \frac{dx''_1}{dC}\delta C - \frac{2}{3}\frac{y''_1}{C}e^2 = 0,$$

$\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$ désignant la dérivée partielle de x''_1 relative à h'', et prise

en faisant abstraction de ce que C dépend implicitement de h''. Substituons les valeurs précédentes, il viendra

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\frac{h''}{C}\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left[1+2\frac{h''^2}{C}\right]\frac{dx''_1}{dC}+\frac{y''_1}{C}\right)e^2$$
$$+\left[\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC}\right]\delta Y_1=0,$$

d'où

$$\frac{\delta Y_1}{e^2}=\frac{2}{3}\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}+\dfrac{y''_1}{C}+\dfrac{h''}{C}\left(\dfrac{dx''_1}{dh''}\right)-2\left(1+2\dfrac{h''^2}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{\left(\dfrac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\dfrac{dx''_1}{dC}}.$$

Voici maintenant comment on utilisera les différences obtenues dans la construction de la Table III, pour éviter le calcul de la dérivée $\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)$. D'après ce qui a été dit il y a un instant, on a

$$dx''_1=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)dh''+\frac{dx''_1}{dC}dC:$$

on en tire, pour la valeur de la dérivée totale de x''_1 par rapport à h'', puisque cette quantité reste seule variable indépendante,

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+\frac{dx''_1}{dC}\frac{dC}{dh''};$$

or, on a

$$\frac{dC}{dh''}=\frac{dC}{dy''_1}\frac{dy''_1}{dh''}=4f,$$

en vertu des équations (22 *bis*) et (22): il vient donc

$$\frac{dx''_1}{dh''}=\left(\frac{dx''_1}{dh''}\right)+4f\frac{dx''_1}{dC},$$

et, par suite,

$$\frac{\delta Y_1}{e^2} = \frac{2}{3}\frac{\dfrac{\log\cot\frac{1}{2}\xi_1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} + \dfrac{y''_1}{C} + \dfrac{h''}{C}\dfrac{dx''_1}{dh''} - 2\left(1+2\dfrac{h''y''_1}{C}\right)\dfrac{dx''_1}{dC}}{\dfrac{dx''_1}{dh''}}, \qquad (31)$$

en mettant y''_1 à la place de $f + h''$.

Maintenant, soient

$$z = \frac{x''_1}{y''_1}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1},$$

valeurs auxquelles on peut substituer les rapports $\frac{g}{Y_1}$ et $\frac{f}{Y_1}$. Le premier de ces rapports étant une fonction du second considéré comme variable indépendante, qui est donnée par la Table III, on aura

$$dz = \frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta,$$

et la valeur du coefficient différentiel $\frac{dz}{d\zeta}$ se déduira des différences successives de la quantité $\frac{g}{Y_1}$ et de la différence constante des valeurs de $\frac{f}{Y_1}$. Mais, f étant une constante donnée, on a

$$dz = \frac{y''_1\,dx''_1 - x''_1\,dy''_1}{y''^2_1}, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y''^2_1}\,dy''_1;$$

substituant ces valeurs dans la précédente équation, on en tire

$$y''_1\,dx''_1 = \left(x''_1 - f\frac{dz}{d\zeta}\right)dy''_1,$$

d'où, à cause de $\frac{dy_1}{dh''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = \frac{x''_1 - f\dfrac{dz}{d\zeta}}{y''_1} = \frac{g}{Y_1} - \frac{f}{Y_1}\frac{d\dfrac{g}{Y_1}}{d\dfrac{f}{Y_1}}. \qquad (32)$$

On obtiendrait une expression encore plus simple de la valeur de $\frac{dx''_1}{dh''}$, en posant

$$z' = \frac{x''_1}{f}, \qquad \zeta = \frac{f}{y''_1}.$$

(Les quantités z' et ζ désignent ici les nombres contenus dans la troisième et la première colonne de la Table III.) Ces relations donnent

$$dz' = \frac{1}{f}\, dx''_1, \qquad d\zeta = -\frac{f}{y''^2_1}\, dy''_1;$$

et l'on a, à cause de $dz' = \frac{dz'}{d\zeta}\, d\zeta$,

$$\frac{1}{f}\, dx''_1 = -\frac{f}{y''^2_1}\frac{dz'}{d\zeta}\, dy''_1,$$

d'où, en vertu de $\frac{dy''_1}{dh''} = 1$,

$$\frac{dx''_1}{dh''} = -\frac{f^2}{y''^2_1}\frac{dz'}{d\zeta} = -\frac{f^2}{Y_1^2}\frac{d\frac{g}{f}}{d\frac{f}{Y_1}}. \qquad (33)$$

Nous n'avons pas fait usage de cette formule, parce que la fonction $\frac{g}{f}$ n'était pas encore calculée, quand nous avons entrepris le calcul de la Table V, qui donne la valeur de $Y_1 \frac{\delta Y_1}{e^2}$.

Les expressions (32) et (33) sont, comme on le voit, entièrement formées de quantités que l'on peut déduire aisément de la Table III. En joignant l'une ou l'autre à la deuxième équation (18), on a tous les éléments nécessaires pour calculer $\frac{\delta Y_1}{e^2}$ à l'aide de la formule (31).

Les deux formules (30) et (31) ont été appliquées au calcul des deux Tables IV et V, qui donnent, l'une les valeurs de $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$, et l'autre celles de $\frac{Y_1}{e^2}\delta Y_1$. Ces deux tables ont été placées à la suite de

la Table III. Nous les avons insérées dans ce mémoire, non pour en recommander l'usage, mais pour montrer, au contraire, que l'on peut se dispenser d'y recourir, attendu que les corrections que l'on en tire sont tout à fait négligeables dans la pratique. En effet, la plus grande valeur de $\frac{Y_1}{e^2}\delta f$ donnée par la Table IV, est $+0{,}0005$; elle se rapporte à $\frac{f}{Y_1} = 0{,}67$: on en déduit $\delta f = 0{,}0005\ \frac{e^2}{Y_1^2}\ Y_1$; à cause de $e < h''$, il vient $\delta f < 0{,}0005\ \frac{h''^2}{Y_1^2}\ Y_1$: or, $\frac{h''}{Y_1} = 1 - \frac{f}{Y_1}$ est ici égal à $0{,}33$, on a donc $\delta f < 0{,}0005\,(0{,}33)^2\,Y_1$, ou $\delta f < 0{,}000054\ Y_1$. Si l'on suppose, par exemple, $Y_1 = 18^m{,}5$, quantité qui n'est pas atteinte dans les constructions modernes, on aura $\delta f < 0^m{,}001$. On aurait de même, par la Table V, avec ces données, $-\delta Y_1 < 0^m{,}0048$. Nous ferons observer que ces nombres se rapportent à des surbaissements inusités : la limite de surbaissement admise dans la pratique est $\frac{1}{3}$; encore convient-il mieux de prendre le surbaissement entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Or le surbaissement $\frac{1}{3}$ répond à une valeur de $\frac{f}{Y_1}$ égale à $0{,}733$ environ, d'après la Table III; en partant de ce nombre, et supposant $Y_1 = 18^m{,}5$. on trouverait $\delta f < 0^m{,}00026$; $-\delta Y_1 < 0^m{,}0012$. Les surbaissements plus voisins de $\frac{1}{4}$ donneraient des corrections encore plus faibles. On voit donc que, dans les limites de la pratique, on n'aura pas à craindre de faire une erreur de plus de 1 millimètre, ou à peu près, sur des différences de niveau qui seront à peine déterminées d'ailleurs à ce degré d'approximation, lorsqu'on se dispensera de corriger les valeurs tirées de la Table III [1].

[1] Si l'on tenait à appliquer les corrections de f ou Y_1, on se servirait, pour les calculer, de nombres fournis par les Tables IV et V, et de la valeur approchée de e obtenue au n° 39. A l'aide de la valeur corrigée de f ou de $Y_1 = y''_1$, on calculerait au besoin la valeur corrigée de h'', par la formule (22) mise sous la forme

$$h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\frac{h''}{f\,(2y''_1 - f)}\,e^2;$$

on aurait ensuite e par l'équation (26) ou par l'équation (27) jointe à la deuxième

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF CONTRE LES CULÉES, INCLINAISON DU DERNIER JOINT SUR LA VERTICALE, VOLUME D'UNE DEMI-ARCHE ET DE LA PARTIE CORRESPONDANTE DU MASSIF.

41. La réduction des formules du n° 28 est très-simple; nous nous contenterons d'en présenter les résultats, renvoyant à ce numéro pour tout ce qui est relatif à l'exposé et à la discussion.

Les équations réduites qui donnent la valeur générale de l'angle α ont déjà été présentées n° 36; nous reproduirons l'expression de la tangente, en y mettant à la place de y'' l'ordonnée y''_1 du point inférieur de l'intrados fictif, et pour A sa valeur (3) : on aura ainsi, pour déterminer l'angle α_1 du dernier joint avec la verticale, la formule

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{\sqrt{(y_1''^2 - h''^2)(B - y_1''^2)}}{q^2 + (h'' - e)^2 - y_1''^2}, \qquad (34)$$

à laquelle on pourra trouver plus commode de substituer les deux suivantes :

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha'_1 = \sqrt{\frac{y_1''^2 - h_1''^2}{C}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) = \tfrac{2}{3}\frac{e^2}{C}\sin\alpha'_1. \qquad (34\ bis)$$

Ces formules serviront particulièrement dans le cas des arches incomplètes, dites *en arc de cercle*, et la valeur de y''_1 qu'il conviendra d'employer est celle donnée sous la marque (w''),

$$y''_1 = f + h'' - \tfrac{1}{3}f\left[1 - \frac{(f + h'')(f + 2h'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}. \qquad (35)$$

(On évitera l'emploi de ces formules en déduisant l'angle α_1 par voie d'interpolation, lorsque les calculs ou tracés qui vont être indiqués dans les numéros suivants auront été effectués.)

équation (13); et dans le cas de h donné, par la relation $e = h'' - h$. Disons enfin que les quantités $Q^2 = \frac{1}{4}C$ et $q^2 = 2e\mu_0$, nécessaires pour le calcul des coordonnées et le tracé, s'obtiendraient à l'aide des formules (23) et (13), si la valeur de μ_0 ne se trouvait pas déjà déterminée.

Dans le cas des arches complètes ou *en anse de panier,* on aura simplement

$$\cot\alpha_1 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}. \tag{36}$$

Pour obtenir les diverses coordonnées qui se rapportent au plan de joint extrême, on aura d'abord

$$2\delta_1 = \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \tag{37}$$

puis ensuite

$$x''_1 = g + 2\delta_1 \sin\alpha_1, \tag{38}$$

équation à laquelle on joindra la valeur précédente de y''_1 dans le cas des arches incomplètes; mais, dans le cas des arches complètes, il sera plus court d'employer les valeurs suivantes, tirées des relations obtenues n° 26:

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= g + \frac{1}{3}(f + h'')\frac{e^2}{q^2}, \\ y''_1 &= f + h'' + \frac{1}{3}h''\frac{e^2}{q^2}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Les piles ou culées sont soumises à l'action des pressions qui ont lieu dans le joint inférieur; la résultante de ces pressions, perpendiculaire au plan de ce joint, est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1, \tag{40}$$

et passe par le point dont les coordonnées sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \frac{1}{2}e\sin\alpha_1, \\ y_1 &= y''_1 - \frac{1}{2}e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Les composantes horizontale et verticale de T_1 sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées reçoivent en outre les actions horizontales exercées

par le massif qu'elles encaissent. La résultante de ces actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'extrados, qui sont

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

La valeur de cette résultante est

$$U = \varpi\lambda\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2); \quad (43)$$

elle agit horizontalement dans le plan qui a pour ordonnée

$$u = \frac{\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3)}{\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\frac{y_1'^2 + y'_1y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \quad (44)$$

Enfin, le volume V des matériaux de la demi-arche et de la partie du massif limitée horizontalement par des plans verticaux menés par les génératrices du sommet et du point inférieur de l'extrados, s'obtiendra en observant que le poids ϖV de ce volume est égal à la composante verticale $T_1\sin\alpha_1$; on aura donc

$$V = \lambda e\mu_1\sin\alpha_1, \quad (45)$$

expression dans laquelle $\sin\alpha_1$ pourra être pris égal à 1, lorsqu'il s'agira d'arches complètes.

A l'égard des piles, nous rappellerons que, si les extrados des deux arches voisines ne se coupent pas au-dessus des derniers plans de joint, ou si, en d'autres termes, ceux-ci conservent leur largeur, les assises horizontales des piles, à leur partie supérieure, seront soumises à des pressions verticales représentées par des hauteurs qui n'excéderont pas μ_1; en sorte que, les piles étant supposées construites de matériaux aussi résistants que ceux de la voûte, il suffira, pour qu'elles résistent au poids des voûtes et du massif, que leur largeur ne soit pas inférieure à la somme

des projections horizontales des joints des naissances. L'excès de largeur à leur donner dépendra de l'action de causes étrangères, telles que celle de l'eau dans les grandes crues, etc.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISON DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

42. Nous renverrons au n° 29 pour ce qui est relatif à l'objet même des calculs; nous présenterons immédiatement l'expression du rayon de courbure de l'intrados fictif réduite en vertu de l'hypothèse $i = 1$. La formule (s'''), en ayant égard à la valeur de Q^2 tirée de la deuxième équation (3), se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3} e^2 \cos\alpha}{y''}. \qquad (46)$$

Nous profiterons de la forme simple de cette expression, pour obtenir une valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ beaucoup plus approchée que celle à laquelle se réduirait notre formule (t''') en y faisant $i = 1$.

L'expression de ρ'' donne

$$\rho'' y'' = Q^2 - \tfrac{1}{3} e^2 \cos\alpha.$$

On aura également en un autre point où la normale fait l'angle $\alpha + \Delta\alpha$ avec la verticale,

$$(\rho'' + \Delta\rho'')(y'' + \Delta y'') = Q^2 - \tfrac{1}{3} e^2 \cos(\alpha + \Delta\alpha).$$

Cette équation et la précédente donnent par soustraction

$$(y'' + \Delta y'')\Delta\rho'' + \rho''\Delta y'' = -\tfrac{1}{3} e^2 [\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos\alpha]$$
$$= +\tfrac{2}{3} e^2 \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right) \sin\tfrac{1}{2}\Delta\alpha;$$

de celle-ci, on tire exactement

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\Delta y'' - \frac{2}{3}e^2 \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha}{y'' + \Delta y''}.$$

Si, maintenant, on substitue à $\Delta y''$ sa valeur approchée

$$\Delta y'' = \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,$$

et que l'on remplace au numérateur $2\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha$, il viendra

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''\left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right) - \frac{1}{3}e^2}{y'' + \left(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

Faisant disparaître le dénominateur, et rangeant $\Delta\rho''^2$ avec les quantités connues, on en déduit

$$\Delta\rho'' = -\frac{\rho''^2 - \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{2}\Delta\rho''^2}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha.$$

On voit qu'en négligeant e^2 et $\Delta\rho''^2$, on ne négligera dans $\Delta\rho''$ que des termes du troisième ordre; les erreurs qui en résulteront se compenseront en partie, puisque les termes négligés sont de signes contraires (*). De cette manière il vient simplement

$$\frac{1}{2}\Delta\rho'' = -\frac{\frac{1}{2}\rho''^2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha},$$

(*) On éviterait l'erreur que nous négligeons, en prenant ρ'' pour variable indépendante au lieu de α, et faisant $\Delta\rho'' = -e\sqrt{\frac{2}{3}}$; dans ce cas, à cause de

d'où, en ajoutant ρ'' aux deux membres et réduisant,

$$\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho'' - \frac{y'' + \rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho'' \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}. \qquad (47)$$

Cette valeur est très-approchée; elle ne donne que 7 à 8 millimètres d'erreur sur des rayons de courbure de 60 mètres environ, et dans l'hypothèse de $\Delta\alpha = 2°$.

On peut obtenir d'autres expressions de même forme, et qui diffèrent de la précédente en ce que les deux facteurs 1 et $\frac{3}{2}$ de ρ'' au numérateur et au dénominateur, sont remplacés respectivement par $\frac{1}{2}$ et 1, ou même par 0 et $\frac{1}{2}$.

Voici l'usage de cette formule : en partant des valeurs initiales de α, y'' et x'', qui sont respectivement zéro, h'' et zéro, et faisant varier l'angle α d'une quantité $\Delta\alpha$ égale à 2° ou 3°, les accroissements correspondants de y'' et x'' se déduiront de la valeur de ρ'' et de celle de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, jointes aux deux suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha, \\ \Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

$\Delta\cos\alpha = -2\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\Delta\alpha$, l'équation précédente donnerait très-approximativement

$$\Delta\cos\alpha = \frac{y''}{\rho''}\cdot\frac{\Delta\rho''}{\rho'' + \frac{3}{2}\Delta\rho''}.$$

L'emploi de cette formule exigerait le recours aux tables de sinus naturels; elle serait facile à appliquer de $\alpha = 0°$ à $\alpha = 90°$; mais, entre 90° et 180°, on ne pourrait s'en servir qu'autant que la constante $\frac{3}{2}\Delta\rho''$ aurait une valeur absolue inférieure au minimum de ρ''. Entre 180° et 360°, il faudrait faire $\Delta\rho'' = +e\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Non-seulement la valeur de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ sert à obtenir $\Delta y''$ et $\Delta x''$, mais elle offre en même temps un précieux moyen de vérifier les calculs successifs de ρ'' et y''. En effet, ayant obtenu, au moyen de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, la différence $\Delta y''$; celle-ci ajoutée à y'' fera connaître la nouvelle ordonnée $y'' + \Delta y''$ du point où la normale fait avec la verticale l'angle $\alpha + \Delta\alpha$: et, si l'on calcule à l'aide de cette ordonnée la nouvelle valeur du rayon de courbure, et que l'on fasse la demi-somme de cette valeur et de celle de ρ'' d'où l'on est parti, on obtiendra un résultat qui coïnciderait avec $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ si nos formules étaient rigoureusement exactes. Dans tous les cas, on prendra la différence entre $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$ et la moyenne dont nous venons de parler. Cette différence ou erreur, qui prendra un signe déterminé suivant le sens de la soustraction, devra être très-faible, et sensiblement nulle au sommet de l'intrados; mais, si l'on détermine de la sorte plusieurs erreurs consécutives, en faisant varier chaque fois l'angle α de la quantité constante $\Delta\alpha$, il faudra que la marche de ces erreurs présente une régularité facile à reconnaître; autrement on serait averti de l'existence de fautes matérielles dans le calcul.

A l'aide des valeurs obtenues de α, y'' et x'', les équations (8) et (9) permettront de calculer l'épaisseur variable ε et les coordonnées de l'intrados réel et de l'extrados. On pourra vérifier ces dernières quantités et l'abscisse x'', en prenant leurs différences successives.

Nous observerons qu'il n'est pas nécessaire de conserver la même valeur de $\Delta\alpha$ dans toute la suite des calculs. S'il s'agit, par exemple, d'une arche complète, où l'angle α atteint sensiblement 90°, on pourra, à partir de 30° ou environ, augmenter l'intervalle $\Delta\alpha$ de moitié, sans inconvénient, si l'intervalle primitif s'est trouvé être assez petit de 0° à 30°; on pourrait même, à partir de 60°, doubler la valeur primitive de $\Delta\alpha$. Les trois séries de calculs devraient alors être vérifiées séparément.

SIMPLIFICATION DU TRACÉ DE L'INTRADOS FICTIF AU MOYEN DE SON RAYON DE COURBURE.

43. L'hypothèse ($i = 1$) réduit la valeur de q', n° 30, à

$$q' = q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q^2}{q}, \qquad (49)$$

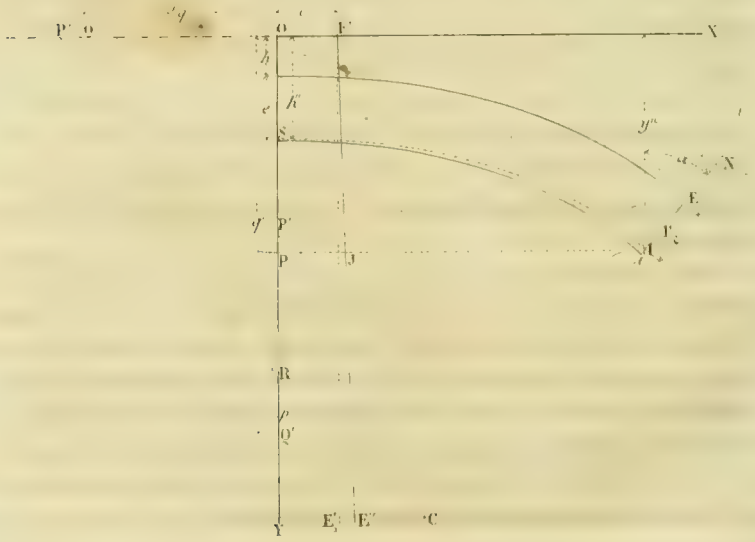
et celles de β et b à zéro. En même temps, la quantité a devient

$$a = \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}. \qquad (50)$$

La forme qui en résulte pour l'équation du rayon de courbure de l'intrados fictif appropriée à la construction géométrique est

$$\rho'' = \frac{1}{2}q\frac{q' - a\cos\alpha}{y''}. \qquad (51)$$

Nous allons indiquer sommairement la construction dont il s'agit.



Ayant mené deux axes rectangulaires, l'un OX horizontal, l'autre OY vertical, on fixera le sommet de l'intrados fictif sur l'axe des y, à la distance $\overline{OS} = h'' = h + e$. On marquera sur le prolongement de OX un point Q, à la distance $\overline{OQ} = \frac{1}{2} q$, et sur OY un autre point Q′, à la distance $\overline{OQ'} = q'$. Supposons, pour plus de généralité, la construction de l'intrados fictif parvenue en un point I par lequel est menée la normale IN. Prenant sur cette normale la distance $\overline{II'} = a$ vers l'extrados, et projetant les points I et I′ sur l'axe des y en P et P′, on aura $\overline{OP} = y''$ et $\overline{PP'} = a\cos\alpha$. On portera cette longueur $\overline{PP'}$ supposée positive, de Q′ en p' vers l'origine O, la distance Op' sera égale à la quantité $q' - a\cos\alpha$. Si, ayant rabattu le point P sur le prolongement de l'axe des x en P‴, on joint ensuite P‴p', et que l'on mène QR parallèle à P‴p', la droite $\overline{OR}$ sera égale au rayon de courbure qu'il s'agissait de construire. En effet, les triangles semblables QOR, P‴Op' donnent la relation

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{Op'}}{\overline{OP'''}},$$

qui coïncide avec l'équation (51) mise sous la forme

$$\frac{\rho''}{\frac{1}{2}q} = \frac{q' - a\cos\alpha}{y''}.$$

Portant $\overline{OR}$ de I en C sur la normale, le point C sera le centre de courbure de l'intrados fictif et de l'extrados à la fois, puisque ces deux courbes sont parallèles; pour construire l'extrados, on portera la distance e qui les sépare de I en E.

La construction de l'intrados réel résultera de celle des épaisseurs vraies ε; leur expression est

$$\varepsilon = e + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} y''. \qquad (52)$$

Prenons à cet effet, sur l'axe des x, $\overline{OE'} = e$, et menons par le

point E′ une droite E′E′$_1$ parallèle à OY; menons encore, par le même point, une autre droite E′E″ faisant avec la première, et dans le sens indiqué par la figure, un angle dont la tangente soit $\frac{1}{3}\frac{c^2}{q^2}$: l'abscisse PJ du point J de la droite E′E″, qui a pour ordonnée y'', sera égale à l'épaisseur réelle ε du joint qui répond à IN. Si l'on porte donc sur la normale la longueur Ei = PJ de E en i, le point i appartiendra à l'intrados réel.

Il nous paraît suffisant d'avoir repris la construction simplifiée du rayon de courbure; nous renverrons, quant à l'usage qu'il convient d'en faire, au n° 30 qui contient déjà les indications nécessaires à cet égard.

DONNÉES EXPÉRIMENTALES RELATIVES À LA LIMITE DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX EMPLOYÉS DANS LES CONSTRUCTIONS.

44. Nous nous sommes assez longuement étendu, n^{os} 6 et 23, sur la convenance qu'il y a de substituer dans les formules, aux charges par unité de surface, la hauteur d'une colonne prismatique de la matière employée, dont le poids produirait sur une surface horizontale la charge ou la pression qui a effectivement lieu : nous ne reviendrons pas sur ce sujet. Rappelant seulement que cette hauteur a été désignée par μ, et qu'elle est liée à la pression t par unité de surface, et au poids ϖ de l'unité de volume par la relation

$$\mu = \frac{t}{\varpi},$$

nous allons présenter un tableau des diverses valeurs que prend cette quantité μ, dans les expériences où l'on produit l'écrasement des matériaux, et au moment de cet écrasement.

Nous extrayons les données de ce tableau de l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de M. Poncelet (p. 308); mais nous substituons aux densités le poids ϖ du mètre cube. Pour déduire μ de ces données, il a suffi de multiplier par 10000 les résistances

relatives au centimètre carré et de diviser ensuite par ϖ, ce qui revenait à multiplier par 10 le quotient de la résistance par centimètre carré divisée par la densité. De cette manière nous avons formé le tableau suivant :

MATÉRIAUX SOUMIS A L'ÉCRASEMENT.	POIDS du mètre cube.	CHARGE par centimètre carré.	VALEUR de μ au moment de l'écrasement.
Pierres volcaniques, granitiques, siliceuses et argileuses.	kil.	kil.	m.
Basaltes de Suède et d'Auvergne	2 950	2 000	6 780
Lave du Vésuve	2 600	590	2 269
Lave tendre de Naples	1 970	230	1 167
Porphyre	2 870	2 470	8 606
Granit vert des Vosges	2 850	620	2 179
Granit gris de Bretagne	2 740	650	2 372
Granit de Normandie	2 660	700	2 632
Granit gris des Vosges	2 640	420	1 591
Grès très-dur, blanc ou roussâtre	2 500	870	3 480
Grès tendre	2 490	4	16
Pierre porc ou puante (argileuse)	2 660	680	2 556
Pierre grise de Florence	2 560	420	1 641
Pierres calcaires.			
Marbre noir de Florence	2 720	790	2 904
Marbre blanc veiné, statuaire et turquin	2 690	310	1 152
Pierre noire de S^{t}-Fortunat, très-dure et coquilleuse	2 650	630	2 377
Roche de Châtillon, dure et un peu coquilleuse	2 290	170	742
Liais de Bagneux, très-dur et à grain fin	2 440	440	1 803
Roche douce de Bagneux	2 080	130	625
Roche d'Arcueil	2 300	250	1 087
Pierre de Saillancourt. 1re qualité	2 410	140	581
Pierre de Saillancourt. 2^{e} qualité	2 100	90	429
Pierre ferme de Conflans	2 070	90	435
Pierre tendre (lambourde et vergelée) employée à Paris, résistant à l'eau	1 820	60	329
Lambourde de qualité inférieure, résistant mal à l'eau	1 560	20	128
Calcaire dur de Givry	2 360	310	1 314

MATÉRIAUX SOUMIS A L'ÉCRASEMENT.	POIDS du mètre cube.	CHARGE par centimètre carré.	VALEUR de μ au moment de l'écrasement.
	kil.	kil.	m.
Calcaire tendre de Givry	2 070	120	580
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz (1re qualité)	2 200	180	818
Calcaire jaune oolithique de Jaumont, près Metz (2e qualité)	2 000	120	600
Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz (1re qualité)	2 000	120	600
Calcaire jaune oolithique d'Amanvilliers, près Metz (2e qualité)	2 000	100	500
Roche vive de Saulny, près Metz (non rompue)	2 550	300	1 174
Roche jaune de Rozéreuilles, près Metz	2 400	180	750
Calcaire bleu à graphite, donnant la chaux hydraulique de Metz (non rompue)	2 600	300	1 154
Briques.			
Brique dure, très-cuite	1 560	150	961
Brique rouge	2 170	60	276
Brique rouge pâle (probablement mal cuite)	2 090	40	191
Brique de Hammersmith	»	70	»
Brique de Hammersmith, brûlée ou vitrifiée	»	100	»
Plâtres et mortiers.			
Plâtre gâché à l'eau	»	50	»
Plâtre gâché au lait de chaux	»	73	»
Mortier ordinaire en chaux et sable	1 600	35	219
Mortier en ciment ou tuileaux pilés	1 460	48	329
Mortier en grès pilé	1 680	29	172
Mortier en pouzzolane de Naples et de Rome	1 460	37	253
Enduit d'une conserve antique près de Rome	1 550	76	490
Enduit en ciment des démolitions de la Bastille	1 490	55	369

Beaucoup d'ingénieurs expérimentés admettent comme étant dans de bonnes conditions les constructions où les charges permanentes n'excèdent pas le dixième de celles qui produiraient la rupture instantanée, c'est-à-dire celles où la valeur maximum de μ n'excède pas le dixième des valeurs de μ insérées au précédent

tableau. En se reportant aux pierres calcaires autres que les marbres et pierres noires, mais fermes et de bonne qualité, on verra que les valeurs correspondantes de μ réduites au dixième, sont à peu près comprises entre 180 mètres et 43 mètres, limites qui se rapportent : la première au liais de Bagneux, la seconde à la pierre de Saillancourt deuxième qualité. La limite 100 mètres résultant des chiffres admis par Navier, tient presque le milieu entre les deux nombres précédents. Si la charge permanente peut, dans tous les cas où l'on emploie des pierres de fort échantillon, être portée au dixième de la charge de rupture, on voit que l'emploi de pierres aussi résistantes que le liais de Bagneux permettrait de s'écarter beaucoup de la limite proposée par Navier; et aussi, combien il serait prudent de se tenir au-dessous de cette limite, s'il s'agissait de construire une arche avec des pierres calcaires telles que celles de Saillancourt ou de Conflans.

Dans le cas de forts échantillons, la valeur de μ_1 qui répond au joint inférieur d'une arche de pont devrait donc se trouver au plus égale au $\frac{1}{10}$ de la valeur de μ donnée au tableau; et dans le cas de faibles échantillons, elle n'en devrait pas atteindre le $\frac{1}{15}$ ou le $\frac{1}{20}$. (Voir la *Mécanique industrielle* de M. Poncelet, n° 264.)

RÉSUMÉ

CONCERNANT L'ÉTABLISSEMENT DES ARCHES DE PONT DANS LESQUELLES LA VOÛTE ET LE MASSIF PEUVENT ÊTRE SUPPOSÉS D'ÉGALE DENSITÉ.

45. Nous nous proposons de présenter ici, d'une manière succincte, la suite des opérations à effectuer pour déterminer complétement une arche de pont, afin que les ingénieurs qui n'auraient pas lu notre mémoire, ou qui, l'ayant lu, auraient perdu de vue la marche que nous avons suivie, puissent cependant procéder sans difficulté aux diverses opérations qui se rattachent à l'établissement des arches de pont. Si, pour ne pas augmenter le nombre déjà considérable des répétitions, il nous arrive de renvoyer à

certains chapitres du mémoire, nous aimons à croire que le lecteur pourra comprendre sans peine ce qui fera l'objet du renvoi.

Les notations ayant été reproduites au commencement du n° 36, nous renverrons à ce numéro pour ce qui les concerne.

Dans les applications, on connaît ordinairement les épaisseurs des diverses couches de matériaux de densités différentes de celle du massif, qui forment la chaussée proprement dite; on devra commencer par calculer l'épaisseur d'une couche ayant la densité du massif, et dont le poids serait égal au poids des diverses couches dont nous venons de parler. L'axe des x devra être placé au-dessous du niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la différence entre l'épaisseur totale des couches données et l'épaisseur calculée, cette dernière étant supposée la plus petite; dans le cas contraire, il faudrait placer l'axe des x plus haut que le niveau de la chaussée, d'une quantité égale à la même différence.

USAGE DES TABLES.

Arches incomplètes, dites *en arc de cercle*. — Les données sont : f la flèche, g la demi-ouverture, et Y_0 l'ordonnée du sommet de l'intrados réel. (Si l'on se donnait l'ordonnée Y_1 des naissances, au lieu de Y_0, on en déduirait $Y_0 = Y_1 - f$). A l'aide de ces données, on calculera les rapports $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$; et la Table I (fin du mémoire) fera connaître, par voie d'interpolation, la valeur approchée de $\frac{Q^2}{f^2}$, d'où l'on déduira celle de Q^2.

Pour corriger la valeur approchée de Q^2, il faut obtenir une valeur approchée de l'épaisseur fictive e. La détermination de cette dernière dépend d'une nouvelle donnée, qui est l'une ou l'autre des quantités μ_1 et h.

1° Soit donnée la quantité μ_1 qui mesure l'intensité des pressions dans le joint des naissances, et que l'on pourra prendre égale au $\frac{1}{10}$ de la valeur de μ inscrite à la dernière colonne du tableau du n° 44, si les matériaux dont on dispose sont compris

dans ce tableau (autrement il faudrait déterminer μ_1 par des expériences spéciales) : on fera

$$h'' = Y_0; \tag{0}$$

puis, on aura

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)}, \tag{I}$$

$$e = \frac{Q^2}{\mu_0 - h'' + \frac{2}{3}e}. \tag{II}$$

Le calcul de e se fera en négligeant d'abord $\frac{2}{3}e$ au dénominateur du deuxième membre, et mettant ensuite dans ce dénominateur, à la place de e, sa valeur trouvée; la seconde valeur obtenue sera d'une exactitude suffisante. Pour que cette valeur de e soit admissible, il faudra que la quantité $h = h'' - e$ qu'on en tirera ne soit pas négative, et soit au moins égale à celle que réclame la pratique.

2° Soit donné h au lieu de μ_1, on aura

$$\varepsilon_0 = Y_0 - h, \qquad h'' = Y_0, \qquad e = h'' - h, \tag{III}$$

et l'on pourra ne calculer les valeurs exactes de μ_0 et μ_1 par les formules

$$\mu_0 = h'' + \frac{Q^2}{e} - \frac{2}{3}e, \qquad \mu_1 = \mu_0 + f + \frac{f(f+2h'')}{3\mu_0}, \tag{IV}$$

qu'après avoir obtenu les valeurs corrigées de Q^2, h'' et e, comme il va être dit dans un instant.

La solution ne sera admissible qu'autant que μ_1 sera compatible avec la nature des matériaux employés.

Dans l'un et l'autre cas, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et de $\frac{Y_0}{f}$, on tirera de la Table II, la valeur correspondante de $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$; et, de

celle-ci jointe à la valeur approchée de e, on déduira la correction $\delta(Q^2)$ de la constante Q^2.

Ayant ajouté cette correction à la valeur approchée de Q^2, on se servira de la valeur corrigée, pour calculer h'' par la formule

$$h'' = Y_0 - \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} Y_0, \qquad (V)$$

et l'on pourra calculer une valeur plus exacte de e en faisant usage des formules précédentes et des valeurs corrigées de h'' et Q^2. On aura d'ailleurs dans le premier cas $h = h'' - e$, $\varepsilon_0 = Y_0 - h$, et dans les deux cas,

$$q^2 = 2e\mu_0 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right]. \qquad (VI)$$

Arches complètes, dites *en anse de panier.* — Les données sont ici deux des trois quantités f, g et Y_1 prises arbitrairement. (On ne peut pas se donner ces trois quantités simultanément et satisfaire en même temps aux conditions de stabilité qui caractérisent notre théorie.) Ayant calculé le rapport des deux quantités données, la Table III fera connaître le rapport de l'inconnue à l'une des données, d'où l'on déduira l'inconnue elle-même. A la vérité, la solution n'est qu'approchée, théoriquement parlant; mais nous avons montré, n° 40, qu'on peut, en pratique, la regarder comme exacte, les erreurs restant toujours au-dessous de celles que comporte l'exécution. Au reste, nous avons donné, dans ce même numéro, le moyen de corriger la solution, à l'aide des Tables IV et V; mais, nous le répétons, il ne sera jamais nécessaire d'effectuer cette correction.

La solution déduite des tables ne devra être acceptée qu'autant qu'elle pourra satisfaire d'ailleurs à de certaines conditions relatives au débouché, au passage des bateaux, au niveau de la chaussée, etc. Autrement, il faudrait modifier l'une des données.

Pour déterminer l'épaisseur e, il est nécessaire de joindre une nouvelle donnée μ_1 ou h aux précédentes.

1° Soit donné μ_1 d'après les mêmes considérations que dans le cas des arches incomplètes, on pourra calculer e par les formules

$$y''_1 = Y_1, \qquad e = \frac{1}{2}\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_1 - y''_1\left[1 + \frac{y''_1}{6(\mu_1 - f)}\right]} \qquad \text{(VII)}$$

(on réduirait, sans erreur sensible, le dénominateur de la valeur de $2e$ à $\mu_1 - y''_1$). Mais il sera préférable d'employer les suivantes:

$$\mu_0 = \mu_1 - f - \frac{f(2y''_1 - f)}{3(\mu_1 - f)}, \qquad e = \frac{1}{2}\frac{f(2y''_1 - f)}{\mu_0 - y''_1 + f + \frac{1}{3}e}; \qquad \text{(VIII)}$$

la seconde de ces valeurs s'obtiendra en négligeant d'abord $\frac{1}{3}e$ au dénominateur. Les ordonnées h'' du sommet de l'intrados fictif et h du sommet de l'extrados et l'épaisseur à la clef ε_0 se calculeront par les formules

$$h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}e^2, \quad h = h'' - e, \quad \varepsilon_0 = y''_1 - f - h. \qquad \text{(IX)}$$

En supposant μ_1 notablement plus grand que y''_1, il faudra, pour que la solution soit admissible, que l'ordonnée h ne soit point inférieure à une certaine limite fixée par les conditions particulières à l'établissement de la chaussée.

Si l'on veut plus d'exactitude, on recalculera e par la formule

$$e = \frac{1}{2}\frac{y_1''^2 - h''^2}{\mu_0 - h'' + \frac{1}{3}e}. \qquad \text{(IX } bis\text{)}$$

2° Soit donné h au lieu de μ_1, on aura, en vertu des formules précédentes,

$$\left.\begin{aligned} &y''_1 = Y_1, \qquad \varepsilon_0 = y''_1 - f - h, \\ &h'' = y''_1 - f - \frac{1}{3}\frac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\varepsilon_0^2, \qquad e = h'' - h, \end{aligned}\right\} \text{(X)}$$

et l'on calculera μ_1 par les formules

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{y_1''^2 - h''^2}{2e} + h'' - \frac{1}{3}e, \\ \mu_1 &= \mu_0 + f + \frac{f(2y''_1 - f)}{3\mu_0}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XI})$$

Il faudra que la valeur de μ_1 ne soit pas incompatible avec la résistance des matériaux; autrement, on devra modifier les données.

Dans les deux cas, connaissant μ_0, on calculera

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= 2e\mu_0; \\ Q^2 &= \frac{1}{2}f(2y''_1 - f) + \frac{1}{3}\frac{y_1''^2}{f(2y''_1 - f)}e^2 = \frac{1}{2}q^2 - h''e + \frac{2}{3}e^2. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XII})$$

Si, dans le premier cas, on a évité de calculer μ_0, on emploiera la formule

$$q^2 = 2\left[Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2\right], \quad (\text{XIII})$$

qui donnera q^2 en fonction de Q^2 et offrira, d'ailleurs, un moyen de vérification.

POUSSÉE DE LA VOÛTE ET DU MASSIF, INCLINAISON DU JOINT DES NAISSANCES, VOLUME DES MATÉRIAUX.

Arches incomplètes, dites *en arc de cercle*. — L'angle α_1 du joint des naissances avec la verticale, s'obtiendra à l'aide des formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y''_1 &= f + h'' - \frac{1}{3}f\left[1 - \frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}\right]\frac{e^2}{q^2}, \\ \sin\frac{1}{2}\alpha'_1 &= \sqrt{\frac{y_1''^2 - h''^2}{4Q^2}}, \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha'_1) + \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}\sin\alpha'_1. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XIV})$$

A la valeur précédente de y''_1, on joindra celle de l'abscisse x''_1 qui se déduit des équations

$$\left.\begin{aligned} 2\delta_1 &= \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''), \text{ ou } 2\delta_1 = \tfrac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}(f+h''),\\ x''_1 &= g + 2\delta_1 \sin\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XV})$$

Arches complètes ou *en anse de panier.* — On obtiendra l'angle α_1 par la formule

$$\cot\alpha_1 = \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}, \qquad (\text{XVI})$$

et les coordonnées du point inférieur de l'intrados fictif, par les relations

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= g + \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}(f+h''),\\ y''_1 &= f + h'' + \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}h''. \end{aligned}\right\} \quad (\text{XVII})$$

Dans les deux espèces d'arches, la poussée T_1 exercée normalement au plan de joint des naissances contre les piles ou culées est

$$T_1 = \varpi\lambda e\mu_1; \qquad (\text{XVIII})$$

les coordonnées du point d'application de cette résultante sont

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x''_1 + \tfrac{1}{2}e\sin\alpha_1,\\ y_1 &= y''_1 - \tfrac{1}{2}e\cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \quad (\text{XIX})$$

les composantes horizontale et verticale de T_1 sont d'ailleurs $T_1\cos\alpha_1$ et $T_1\sin\alpha_1$.

Les culées sont, en outre, soumises aux actions horizontales produites par le massif qu'elles encaissent; la résultante U de ces

actions dépend des ordonnées des points supérieur et inférieur de l'intrados, qui sont

$$\left.\begin{aligned} y'_0 &= h = h'' - e, \\ y'_1 &= y''_1 - e\cos\alpha_1 = y_1 - \tfrac{1}{2}e\cos\alpha_1; \end{aligned}\right\} \quad (\text{XX})$$

et l'on a

$$U = \varpi\lambda\,\tfrac{1}{2}\,(y_1'^2 - y_0'^2). \qquad (\text{XXI})$$

Cette résultante U agit horizontalement dans le plan dont l'ordonnée est

$$u = \frac{\tfrac{1}{3}(y_1 - y_0'^3)}{\tfrac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)} = \frac{2}{3}\,\frac{y_1'^2 + y'_1 y'_0 + y_0'^2}{y'_1 + y'_0}. \qquad (\text{XXII})$$

Enfin le volume V de la demi-arche et de la partie correspondante du massif a pour expression

$$V = \lambda e \mu_1 \sin\alpha_1. \qquad (\text{XXIII})$$

Dans les arches complètes on a sensiblement $\sin\alpha_1 = 1$.

(Voir n° 41 les remarques relatives à la largeur des piles.)

On peut obtenir une vérification relative aux poussées horizontales par l'équation suivante :

$$\varpi\lambda e\mu_0 = T_1\cos\alpha_1 + U, \qquad (\text{XXIII } bis)$$

qui se déduit de la considération de l'équilibre des forces qui sollicitent l'ensemble de la demi-voûte et du massif, projetées horizontalement, ou des équations du n° 9.

Les intensités, directions et points d'application des forces T_1 et U doivent servir de base à l'établissement des culées; il y aura encore à examiner quelles sont les plus grandes variations que peuvent subir ces quantités sous l'influence des surcharges accidentelles, tassements, etc., pour procéder avec sécurité à l'éta-

blissement des culées. Cependant, si l'on procède à l'égard de celles-ci comme nous l'avons fait à l'égard de la voûte, il pourra bien être suffisant de s'en tenir aux charges moyennes.

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES JOINTS, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS, ETC.

Les calculs suivants supposent le projet bien arrêté : on n'aura besoin de les effectuer que lorsqu'il s'agira de passer à l'exécution.

x'', y'' et ρ'' étant les coordonnées et le rayon de courbure de l'intrados fictif correspondants à l'angle α d'un plan de joint avec la verticale, et $\Delta x''$, $\Delta y''$, $\Delta\rho''$ les accroissements finis que prennent les coordonnées et le rayon de courbure lorsqu'on fait croître α d'une quantité finie $\Delta\alpha$; on a, pour calculer ces accroissements, les formules

$$\left.\begin{aligned}
\rho'' &= \frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha}{y''},\\
\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' &= \rho''\,\frac{y'' + \rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha},\\
\Delta y'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,\\
\Delta x'' &= \left(\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''\right)\cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha\right)\Delta\alpha,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XXIV)}$$

dans lesquelles l'angle $\Delta\alpha$ en dehors des signes sinus et cosinus doit être exprimé en *rapport d'arc au rayon*. Cela se fait en multipliant le nombre de degrés correspondant par $\frac{\pi}{180^\circ}$ (π désignant le rapport de la circonférence au diamètre) : on évite ce calcul en se servant des tables que l'on trouve pages 214 et suivantes des Tables de Callet. Les trois dernières des formules précédentes

sont seulement approximatives, et d'autant plus exactes que $\Delta\alpha$ est plus petit.

Dans la pratique, on prendra $\Delta\alpha$ égal à 2° ou 3°, et l'on fera varier l'angle α de la même quantité $\Delta\alpha$, du moins pendant une grande partie des calculs. On devra commencer ces calculs en attribuant à α, y'' et x'' les valeurs zéro, h'' et zéro, qui ont lieu au sommet de l'intrados fictif. Chaque fois que l'on aura obtenu une nouvelle valeur de ρ'', il conviendra de l'ajouter à la précédente, et de prendre leur moyenne arithmétique; le résultat devra différer très-peu de la dernière valeur calculée de $\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho''$, ce qui offrira un moyen de vérification. (Voir n° 42.)

On déterminera ensuite l'épaisseur vraie ε mesurée suivant la normale à l'extrados, par les formules

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'' \text{ ou } 2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}y'', \qquad \varepsilon = e + 2\delta; \qquad \text{(XXV)}$$

puis les coordonnées X, Y de l'intrados réel et celles x', y' de l'extrados, par les relations

$$\left.\begin{aligned} Y &= y'' + 2\delta\cos\alpha, & y' &= y'' - e\cos\alpha, \\ X &= x'' - 2\delta\sin\alpha, & x' &= x'' + e\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \text{(XXVI)}$$

Les valeurs de y'' et ρ'' sont vérifiées chaque fois, ainsi qu'il vient d'être dit; mais les autres quantités ne l'étant pas, il conviendra, à leur égard, d'employer le procédé des différences.

Parvenu à une valeur de α qui excède l'angle α_1 déterminé plus haut, on recherchera par voie d'interpolation les valeurs correspondantes de Y et de X : ces valeurs devront très-peu différer de $Y_0 + f$ et de g (Y_0 désignant l'ordonnée du sommet de l'intrados ou $h'' + 2\delta_0$), et offriront ainsi un moyen de vérification générale des calculs.

TRACÉ DU PROFIL DE LA VOÛTE AU MOYEN DU RAYON DE COURBURE DE L'INTRADOS FICTIF.

Indépendamment de la quantité q déterminée précédemment, les constantes nécessaires pour effectuer le tracé sont :

$$\left.\begin{aligned} q' &= q - 2\frac{e}{q}\left(h'' - \frac{2}{3}e\right) = 2\frac{Q^2}{q}, \\ a &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{q}, \\ \operatorname{tang}\widehat{E'_1E'E''} &= \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = \frac{a}{2q}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXVII)}$$

On remarquera que cet angle $\widehat{E'_1E'E''}$, dans le cas des arches complètes, se trouve être égal au complément de l'angle α_1 du dernier joint avec la verticale, ou à l'inclinaison de ce joint sur l'horizon.

Nous renverrons au n° 43, pour ce qui est relatif à la construction du rayon de courbure ρ'' de l'intrados fictif. Ajoutons cependant une remarque sur la manière de procéder au tracé.

L'arc que l'on se propose de décrire avec un rayon ρ'' étant supposé très-petit, mais non pas infiniment petit, on atténuera l'erreur commise par ce fait, en décrivant le petit arc à l'aide du rayon de courbure correspondant ou à peu près au milieu de cet arc. A cet effet, il faudra s'y prendre à deux fois, du moins vers le sommet de l'intrados; la première fois, on déterminera le rayon de courbure correspondant à l'extrémité connue de l'arc à décrire, et l'on décrira avec ce rayon un arc d'une amplitude donnée en degrés. On prendra alors le milieu de cet arc et l'on construira le rayon de courbure correspondant; on se servira de ce nouveau rayon pour tracer définitivement l'arc d'amplitude donnée : on obtiendra de cette manière une suffisante exactitude. Lorsque l'on aura décrit de la sorte plusieurs petits arcs d'une même amplitude, on pourra prévoir assez approximativement la position du point milieu

de l'arc à décrire, pour éviter de faire le tracé de cet arc à deux reprises différentes.

Nous allons maintenant présenter quelques applications des règles qui viennent d'être exposées.

APPLICATIONS.

ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

PREMIER EXEMPLE.

Pont d'Iéna, à Paris.

46. Les calculs suivants ont été faits en partant de données que nous avons lieu de regarder comme un peu incertaines : mais il s'agit seulement ici de montrer par un exemple l'usage de nos tables et de nos formules; pour cette raison, nous nous sommes dispensé de faire des recherches dont le résultat nous eût peut-être obligé à recommencer les calculs.

Les données sont :

Demi-ouverture . . . . . $g = 12^{m},5$

Flèche . . . . . $f = 3^{m},0$

Ordonnée du sommet de l'intrados.. $Y_0 = 2^{m},05413$ (*);

à ces quantités, nous joindrons la hauteur μ_1 qui représente la charge dans le plan des naissances, et nous supposerons

$$\mu_1 = 65^{m},042,$$

et le poids ϖ du mètre cube,

$$\varpi = 2440 \text{ kil.}$$

(*) Les décimales qui figurent ici et dans la valeur de μ_1 tiennent à ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits en partant de la quantité h comme donnée, laquelle était égale à $0^{m},90$.

Nous suivrons la marche tracée dans le numéro précédent. Il vient d'abord

$$\frac{g}{f} = 4,16667; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0,68471.$$

A l'aide du premier de ces deux nombres, la Table I donne aisément :

$\frac{Y_0}{f}$	$\frac{Q^2}{f^2}$	1re différ.	2e diff.
0,6	6,8902	+ 0,9381	— 39
0,7	7,8283	+ 0,9342	
0,8	8,7625		

d'où :

pour 0,6..... 6,8902
partie prop..... + 0,79466
2e diff..... + 26

$$\frac{Q^2}{f^2} = 7,68511;$$

on en déduit

valeur approchée..... $Q^2 = 69,166.$

ÉQUATION (I).

$2h'' =$ 4,108
$\mu_1 - f =$ 62,041
$-\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)} =$ — 0,115
$\mu_0 =$ 61,926
$h'' =$ 2,054
$\mu_0 - h'' =$ 59,872

ÉQUATION (II).

l. $Q^2 = 1,8399$
$\mu_0 - h'' = 59,872$ ..... l. = 1,7772
1re approximation..... l. $e = 0,0627$
l. $\frac{2}{3} = 9,8239$
$\frac{1}{3}e = 0,770$..... l. = 9,8866
dénom. = 60,642..... l. = 1,7828
2e approximation..... l. $e = 0,0571$

La Table II donne, à l'aide des valeurs de $\frac{g}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$,

$$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0{,}3435 \ldots\ldots \quad \text{l.} = 9{,}5359$$

$$\text{l. } e^2 = 0{,}1142$$

d'où $\delta(Q^2) = 0{,}447 \ldots\ldots$ l. $= 9{,}6501$

valeur corrigée $\ldots\ldots$ $Q^2 = 69{,}613 \ldots\ldots$ l. $= 1{,}84269$

ÉQUATION (V).

$$\text{l. } 6 = 0{,}7781$$

$$\text{l. } 6Q^2 = 2{,}6208$$

$$\text{l. } \frac{e^2}{6Q^2} = 7{,}4934$$

$Y_0 = 2{,}05413 \ldots\ldots$ l. $Y_0 = 0{,}3126$

$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} Y_0 = -0{,}00640 \ldots\ldots$ l. $= 7{,}8060 -$

$h'' = 2{,}04773 \ldots\ldots$ l. $h'' = 0{,}31127$

En se servant de cette valeur et de celle de Q^2, on peut obtenir une valeur plus exacte de l'épaisseur fictive e. A cet effet, on a :

ÉQUATION (II).

$\mu_0 = 61{,}926$

$\mu_0 - h'' = 59{,}878$

$\frac{2}{3} e = 0{,}766$ (*)

l. $Q^2 = 1{,}84269$

dénom. $= 60{,}644 \ldots\ldots$ l. dénom. $= 1{,}78279$

valeur corrigée $\ldots\ldots$ $e = 1{,}1479 \ldots\ldots$ l. $e = 0{,}05990$

l. $e^2 = 0{,}11980$

Nous devons faire remarquer que la surcharge $h = h'' - e = 0^m{,}90$ environ ne pèche pas par excès de petitesse : elle présenterait plutôt l'excès contraire.

(*) Ce nombre provient d'une première approximation obtenue en faisant usage de la valeur 0,770 employée plus haut.

ÉQUATION (VI).

l. 2 = 0,30103
l. e = 0,05990
l. μ_0 = 1,79187

q^2 = 142,168..... l. q^2 = 2,15280

L'épaisseur à la clef, adoptée dans la construction du pont d'Iéna, est 1^m,25, nombre qui excède de 0^m,1 environ l'épaisseur fictive que nous venons de déterminer.

Calcul de la poussée.

ÉQUATIONS (XIV).

$f+h''$ =	5,04773...	l. = 0,70310	$y_1''^2$ =	25,410.....	l. = 1,40500
$f+2h''$ =	7,09546...	l. = 0,85098	h''^2 =	4,193.....	l. = 0,62254
		c. l. q^2 = 7,84720	$y_1''^2 - h''^2$ =	21,217.....	l. = 1,32668
$\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2}$ =	0,25193...	l. = 9,40128	$4Q^2$ =	278,452.....	l. = 2,44475
1 — id. =	0,74807...	l. = 9,87394			diff. = 8,88193
		l. $\frac{e^2}{q^2}$ = 7,96700	$\frac{1}{2}\alpha'_1$ =	16° 1′ 26″.....	l. sin = 9,44097
			α'_1 =	32 2 52.....	l. sin = 9,7248
3^e terme =	— 0,00693...	l. = 7,84094	$\alpha_1 - \alpha'_1$ =	0 5 41.....	l. sin = 7,2182
(*) y''_1 =	5,0408..	l. y''_1 = 0,70250	α_1 =	32° 8′ 33″ (**)..	l. sin α_1 = 9,72593
					l. cos α_1 = 9,92774

Dans les calculs suivants, nous déterminerons les poussées par unité de longueur de la voûte, mesurée parallèlement aux génératrices. Pour avoir les poussées totales, il suffira de multiplier ensuite par la longueur λ.

(*) Si, à l'aide des valeurs que l'on vient de déterminer, on calcule x''_1, puis g par les formules du n° 36, on trouvera pour la valeur de g précisément celle qui nous a servi de point de départ. L'accord de nos Tables avec le calcul direct se trouve vérifié dans cet exemple; il en est de même pour les deux exemples présentés plus loin. Or on pouvait craindre que la substitution des différences finies aux différentielles ne laissât subsister des erreurs un peu sensibles.

(**) En calculant α_1 par l'équation (6), n° 36, on trouve $\alpha_1 = 32° 8' 37''$; la différence 4″ entre cette valeur et celle que donnent les équations (XIV) est tout à fait négligeable.

ÉQUATIONS (XV).

$$\text{l.}\,(f+h'') = 0{,}7031$$

$$\text{l.}\,\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$$

$g = 12{,}5$ $\qquad$ $\text{l.}\,2\delta_1 = 8{,}1965$

$2\delta_1 \sin\alpha_1 = -\ 0{,}0084$ ..... $\text{l.} = 7{,}9224$

$x''_1 = -\ 12{,}5084$

ÉQUATION (XVIII).

$$\text{l.}\,\varpi = 3{,}38739$$

$$\text{l.}\,\mu_1 = 1{,}81319$$

$$\text{l.}\,e = 0{,}05990$$

Poussée normale au plan des naissances.... $\frac{T_1}{\lambda} = 182171$ kil..... $\text{l.} = 5{,}26048$

Composante verticale..... $\frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 = 96919$..... $\text{l.} = 4{,}98641$

Composante horizontale..... $\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 = 154248$..... $\text{l.} = 5{,}18822$

ÉQUATIONS (XIX) ET (XX).

$$\text{l.}\,\frac{1}{2}e = 9{,}75887$$

$+\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 = +\ 0{,}30535$..... $\text{l.} = 9{,}48480$

$-\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 = -\ 0{,}48597$..... $\text{l.} = 9{,}68661$

$x_1 = 12{,}8138$

$y_1 = 4{,}5548$

$y'_0 = 0{,}8998$..... $\text{l.} = 9{,}95415$

$y'_1 = 4{,}0688$..... $\text{l.} = 0{,}60947$

ÉQUATION (XXI).

$y_1'^2 = 16{,}5550$..... $\text{l.} = 1{,}21893$

$y_0'^2 = 0{,}8097$..... $\text{l.} = 9{,}90830$

$y_1'^2 - y_0'^2 = 15{,}7453$

$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 7{,}8726$..... $\text{l.} = 0{,}89612$

$$\text{l.}\,\varpi = 3{,}38739$$

$\frac{U}{\lambda} = 19209$ kil..... $\text{l.} = 4{,}28351$

ÉQUATION (XXII).

$y_1'^3 = 67{,}3597$..... $\text{l.} = 1{,}82840$

$y_0'^3 = 0{,}7285$..... $\text{l.} = 9{,}86245$

$y_1'^3 - y_0'^3 = 66{,}6312$

$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3) = 22{,}2104$..... $\text{l.} = 1{,}34655$

$u = 2{,}8212$..... $\text{l.} = 0{,}45043$

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 173457$ kil..... $\text{l.} = 5{,}23919$

$$\text{l.}\,e\mu_0 = 1{,}85177$$

$$\text{l.}\,\varpi e\mu_0 = 5{,}23916$$

erreur = 3

La résultante $\frac{T_1}{\lambda}$ des pressions qui sollicitent les culées normalement au plan des naissances se trouve déterminée, ainsi que les coordonnées x_1 et y_1 de son point d'application; et sa direction est définie par l'angle α_1. La résultante $\frac{U}{\lambda}$ des pressions horizontales qu'exerce le massif sur la face verticale de la culée passant par l'extrémité inférieure de l'extrados, et l'ordonnée u de son point d'application, sont aussi connues par les calculs précédents. Ces données, jointes à la connaissance de la profondeur à laquelle doivent descendre les fondations des culées et de la résistance du sol avoisinant, doivent être complétées par des hypothèses sur l'action des surcharges accidentelles et l'effet des tassements, pour qu'il soit possible de procéder à la détermination de la forme et des dimensions inconnues des culées.

Au lieu du volume V des matériaux, nous allons calculer la surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et du massif.

ÉQUATION (XXIII).

$$\frac{V}{\lambda} = 39^{m.q}{,}721 \ldots\ldots \quad l. = 1{,}59902.$$

Il nous reste à déterminer la forme de la voûte.

Calcul des coordonnées, inclinaisons, rayons de courbure, épaisseurs.

Le tableau ci-joint présente le détail des calculs numériques. Ces calculs sont basés sur les formules (XXIV), (XXV) et (XXVI), dans lesquelles on a fait l'angle constant $\Delta\alpha$ égal à 2°.

FORMULES.

$$\rho = -\frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha}{y'},$$

$$\rho + \tfrac{1}{2}\Delta\rho = -\rho\,\frac{y' + \rho\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{1}{2}\rho\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour vérification :

$$\rho_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur.}$$

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}y',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\sin\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\cos\alpha.$$

CONSTANTES.

Soit $\Delta\alpha = 2^\circ$.

$$\Delta\alpha = 0{,}0349066$$

$$\text{l.}\,\Delta\alpha = 8{,}54291$$

$$Q^2 = 69{,}613$$

$$\text{l.}\,e^2 = 0{,}11980$$

$$\text{l.}\,\tfrac{1}{3} = 0{,}47712$$

$$\text{l.}\,\tfrac{1}{3}e^2 = 9{,}64268$$

$$h'' = y'_0 = 2^m{,}04773$$

$$x'_0 = 0$$

$$\text{l.}\,\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2} = 7{,}4934$$

α	0°	2°	4°	6°	8°	10°
l. $\sin\alpha$	∞	8,54282	8,84358	9,01923	9,14356	9,23
l. $\cos\alpha$	0	9,99974	9,99891	9,99761	9,99573	9,99
l. $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	8,24186	8,71880	8,94030	9,08589	9,19433	9,28
l. $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,99993	9,99940	9,99834	9,99676	9,99462	9,99
l. $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	6,78477	7,26171	7,48321	7,62880	7,73724	7,82
l. $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,54284	8,54231	8,54125	8,53967	8,53753	8,53
l. $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	9,6427	9,6424	9,6416	9,6403	9,6384	9,63
y''	2,04773	2,06821	2,12845	2,22518	2,35382	2,50
x	0	1,17311	2,32251	3,12811	4,17584	5,45
$\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	0,4392	0,4389	0,4382	0,4368	0,4349	0,43
$Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	69,174	69,174	69,175	69,176	69,178	69,18
l. $[Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$	1,83994	1,83994	1,83995	1,83996	1,83997	1,83
l. y''	0,31127	0,31559	0,32806	0,34737	0,37177	0,39
l. ρ'	1,52867	1,52435	1,51189	1,49259	1,46820	1,44
l. $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,31344	8,78606	8,99510	9,12139	9,20544	9,26
$\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,02058	0,06110	0,09888	0,13025	0,16049	0,18
$y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,06831	2,12931	2,22733	2,35743	2,51431	2,69
$\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,01029	0,03055	0,04944	0,06612	0,08024	0,09
$y'' + \frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,07860	2,15986	2,27677	2,42355	2,59455	2,78
l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,31562	0,32824	0,34778	0,37241	0,40042	0,43
l. $[y'' + \frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,31777	0,33443	0,35732	0,38445	0,41406	0,44
l. $(\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'')$	1,52652	1,51816	1,50235	1,48058	1,45456	1,42
l. $\Delta y'$	8,31129	8,77987	8,98556	9,10938	9,19180	9,24
l. Δx	0,06936	0,06047	0,04360	0,02025	9,99209	9,96
Δy	0,02048	0,06024	0,09673	0,12864	0,15556	0,17
Δx	1,17311	1,14940	1,10560	1,04773	0,98195	0,91
ρ''	33,7808	33,4464	32,5005	31,0878	29,3900	27,50
Vérification : $\rho_m + \rho'_{m+1}$	67,227	65,947	63,588	60,478	56,959	53,31
Vérification : $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho_{m+1})$	33,614	32,973	31,794	30,239	28,480	26,65
Vérification : $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	33,614	32,973	31,794	30,240	28,481	26,66
Vérification : erreur	0	0	0	1	1	
l. $e\sin\alpha$	∞	8,60872	8,90348	9,07913	9,20346	9,29
l. $e\cos\alpha$	0,05990	0,05964	0,05884	0,05751	0,05565	0,05
$e\sin\alpha$	0	0,04006	0,08007	0,11999	0,15976	0,19
$e\cos\alpha$	1,14790	1,14720	1,14509	1,14160	1,13671	1,13
y	0,8998	0,9210	0,9834	1,0836	1,2171	1,38
x'	0	1,2132	2,4026	3,5481	4,6356	5,61
l. 2δ	7,8047	7,8090	7,8215	7,8408	7,8652	7,89
l. $2\delta\sin\alpha$	∞	6,3518	6,6651	6,8600	7,0088	7,11
l. $2\delta\cos\alpha$	7,8047	7,8087	7,8204	7,8384	7,8609	7,88
2δ	0,00638	0,00644	0,00663	0,00692	0,00733	0,00
$2\delta\sin\alpha$	0	0,00022	0,00046	0,00072	0,00102	0,00
$2\delta\cos\alpha$	0,00638	0,00644	0,00661	0,00689	0,00726	0,00
ε	1,1543	1,1543	1,1545	1,1548	1,1552	1,15
Y	2,0541	2,0747	2,1351	2,2321	2,3611	2,51
X	0	1,1709	2,3220	3,4274	4,4748	5,46

NTS *EN ARC DE CERCLE.*

TC AISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

1	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°
,3 88	9,38368	9,44034	9,48998	9,53405	9,57358	9,60931	9,64184	9,67161	9,69897	9,72421	9,74756
,9 40	9,98690	9,98284	9,97821	9,97299	9,96717	9,96073	9,95366	9,94593	9,93753	9,92842	9,91857
,3 09	9,41300	9,46594	9,51264	9,55433	9,59188	9,62595	9,65705	9,68557	9,71184	9,73611	9,75859
,6172	9,98494	9,98060	9,97567	9,97015	9,96403	9,95728	9,94988	9,94182	9,93307	9,92359	9,91336
,8 00	7,95591	8,00885	8,05555	8,09724	8,13479	8,16886	8,19996	8,22848	8,25475	8,27902	8,30150
,: 63	8,52785	8,52351	8,51858	8,51306	8,50694	8,50019	8,49279	8,48473	8,47598	8,46650	8,45627
,61	9,6296	9,6255	9,6209	9,6157	9,6098	9,6034	9,5963	9,5886	9,5802	9,5711	9,5612
,6 95	2,88230	3,09184	3,31264	3,54235	3,77908	4,02134	4,26792	4,51783	4,77028	5,02461	5,28026
,: 31	7,21747	7,99948	8,72168	9,38881	10,00552	10,57625	11,10505	11,59553	12,05097	12,47425	12,86792
,96	0,4262	0,4222	0,4177	0,4128	0,4072	0,4012	0,3947	0,3878	0,3804	0,3725	0,3641
,11	69,187	69,191	69,195	69,200	69,206	69,212	69,218	69,225	69,233	69,241	69,249
,1001	1,84003	1,84005	1,84008	1,84011	1,84014	1,84018	1,84022	1,84026	1,84031	1,84036	1,84041
,, 26	0,45974	0,49022	0,52017	0,54929	0,57739	0,60437	0,63022	0,65493	0,67854	0,70110	0,72266
,, 75	1,38029	1,34983	1,31991	1,29082	1,26275	1,23581	1,21000	1,18533	1,16177	1,13926	1,11775
,,5375	9,33620	9,35868	9,37546	9,38806	9,39754	9,40467	9,40996	9,41381	9,41652	9,41828	9,41925
,,219	0,21687	0,22839	0,23739	0,24438	0,24977	0,25390	0,25702	0,25930	0,26093	0,26199	0,26257
2,314	3,09917	3,32023	3,55003	3,78673	4,02885	4,27524	4,52494	4,77713	5,03121	5,28660	5,54283
0,109	0,10843	0,11419	0,11869	0,12219	0,12488	0,12695	0,12851	0,12965	0,13046	0,13099	0,13129
2,023	3,20760	3,43442	3,66872	3,90892	4,15373	4,40219	4,65345	4,90678	5,16157	5,41759	5,67412
0,277	0,49125	0,52117	0,55023	0,57826	0,60518	0,63096	0,65561	0,67917	0,70167	0,72318	0,74373
0,570	0,50618	0,53585	0,56451	0,59206	0,61844	0,64367	0,66778	0,69080	0,71279	0,73381	0,75390
1,582	1,36536	1,33515	1,30563	1,27702	1,24949	1,22310	1,19783	1,17370	1,15065	1,12863	1,10758
9,082	9,32127	9,34400	9,36118	9,37426	9,38428	9,39196	9,39779	9,40218	9,40540	9,40765	9,40908
9,745	9,89321	9,85866	9,82421	9,79008	9,75643	9,72329	9,69062	9,65843	9,62663	9,59513	9,56385
0,535	0,20954	0,22080	0,22971	0,23673	0,24226	0,24658	0,24991	0,25245	0,25433	0,25565	0,25650
0,616	0,78201	0,72220	0,66713	0,61671	0,57073	0,52880	0,49048	0,45544	0,42328	0,39367	0,36631
5,84	24,0044	22,3785	20,8886	19,5353	18,3126	17,2112	16,2181	15,3225	14,5134	13,7803	13,1145
9,3	46,383	43,267	40,424	37,848	35,524	33,429	31,541	29,836	28,294	26,895	»
4,7	23,192	21,634	20,212	18,924	17,762	16,715	15,770	14,918	14,147	13,447	»
4,8	23,193	21,635	20,213	18,924	17,762	16,715	15,770	14,918	14,147	13,447	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	»
9,778	9,44358	9,50024	9,54988	9,59395	9,63348	9,66921	9,70174	9,73151	9,75887	9,78411	9,80746
0,030	0,04680	0,04274	0,03811	0,03289	0,02707	0,02063	0,01356	0,00583	9,99743	9,98832	9,97847
0,866	0,27770	0,31640	0,35472	0,39260	0,43001	0,46689	0,50320	0,53890	0,57394	0,60829	0,64189
1,277	1,11378	1,10342	1,09172	1,07867	1,06431	1,04865	1,03172	1,01352	0,99410	0,97346	0,95164
1,42	1,7685	1,9884	2,2209	2,4637	2,7146	2,9727	3,2362	3,5043	3,7762	4,0511	4,3286
5,00	7,4952	8,3159	9,0764	9,7814	10,4355	11,0431	11,6082	12,1344	12,6249	13,0825	13,5098
7,27	7,9531	7,9836	8,0136	8,0427	8,0708	8,0978	8,1236	8,1483	8,1719	8,1945	8,2161
7,06	7,3368	7,4239	7,5035	7,5767	7,6444	7,7071	7,7654	7,8199	7,8708	7,9187	7,9637
7,31	7,9400	7,9664	7,9918	8,0157	8,0380	8,0585	8,0773	8,0942	8,1094	8,1229	8,1347
0,837	0,00898	0,00963	0,01032	0,01103	0,01177	0,01253	0,01329	0,01407	0,01486	0,01565	0,01645
0,174	0,00217	0,00265	0,00319	0,00377	0,00441	0,00510	0,00583	0,00660	0,00743	0,00829	0,00920
0,819	0,00871	0,00926	0,00981	0,01037	0,01091	0,01144	0,01195	0,01242	0,01286	0,01327	0,01364
1,63	1,1568	1,1575	1,1582	1,1589	1,1597	1,1604	1,1612	1,1620	1,1628	1,1635	1,1643
2,51	2,8910	3,1011	3,3224	3,5527	3,7900	4,0328	4,2799	4,5302	4,7831	5,0379	5,2939
5,96	7,2153	7,9968	8,7185	9,3850	10,0011	10,5712	11,0992	11,5889	12,0435	12,4660	12,8587

Chaque colonne verticale est calculée isolément jusqu'à ρ''. Ajoutant $\Delta y''$ et $\Delta x''$ aux valeurs de y'' et x'' qui se trouvent dans la même colonne, on obtient les y'' et x'' de la colonne suivante, et l'on continue les calculs jusqu'à ρ'' inclusivement. Revenant alors à la colonne précédente, on y effectue la vérification indiquée, et l'on poursuit ainsi les déterminations successives jusqu'à la dernière colonne verticale. La marche des erreurs, par sa régularité, indique suffisamment l'exactitude de toutes les valeurs obtenues, sauf celle de x''. L'abscisse x'', de même que les coordonnées x', y', X, Y et les épaisseurs ε, ne peuvent être vérifiées qu'à l'aide de leurs différences successives.

Le calcul qui vient d'être présenté constitue une véritable intégration par quadratures : il convient d'en comparer le résultat à celui que fournissent nos Tables ou que donne l'intégration effectuée au moyen des fonctions elliptiques.

Nous avons trouvé $y''_1 = 5^m,0408$, $x''_1 = 12^m,5084$, et $\alpha_1 = 32°\,8'\,33''$; il s'agit de tirer du tableau, par interpolation, les valeurs de x'' et de α correspondantes à la valeur $y'' = 5^m,0408$. Soit n la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond y''_1; il viendra pour déterminer n, en prenant les différences 1re et 2e de y'' à partir de $\alpha = 32°$,

$$0,0162 = n \,.\, 0,25565 + \frac{n(n-1)}{2}\, 0,00085,$$

d'où, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0,0633:$$

cette valeur étant substituée dans le deuxième terme ne donne rien de sensible. On en déduit

$$x'' = 12,47425 + n \,.\, 0,39367 - \frac{n(n-1)}{2}\, 0,02736$$

partie proportionnelle....	+ 0,02492
2e différence.....	+ 0,00079
$x'' =$	12,5000

En comparant cette valeur à x''_1, on voit que les erreurs accumulées de notre calcul ne s'élèvent qu'à $0^m,0084$.

Quant à l'angle α, on a immédiatement $\alpha = 32° + n.2° = 32°7'36''$, ce qui donne une erreur de $57''$, quantité que l'on peut parfaitement négliger dans une question de ce genre. On ferait disparaître l'erreur qui affecte x''_1, soit en diminuant la demi-ouverture de $0^m,008$ dans la construction, soit en appliquant les nombres du tableau jusqu'à $x'' = 12^m,5084$; mais alors on produirait dans y''_1 une erreur de $0^m,005$ environ; c'est-à-dire qu'il faudrait élever la chaussée ou abaisser les naissances d'autant.

Le calcul des coordonnées y'' et x'' ayant été poussé jusqu'aux centièmes de millimètre, l'inexactitude des dernières décimales n'a pas dû s'élever par accumulation jusqu'au chiffre des millimètres. On peut regarder les écarts entre le calcul par quadratures et le calcul par les Tables, comme provenant de ce que l'intervalle $\Delta\alpha$ n'est point extrêmement petit, plutôt que des termes du troisième ordre négligés dans les formules générales.

Dans la pratique, on n'aura jamais besoin d'effectuer les calculs qui précèdent avec autant de figures que nous en avons employé, le nombre des déterminations successives de e pourra être réduit, et les calculs du tableau précédent pourront quelquefois être remplacés par la construction graphique. Si nous n'avons pas abrégé les calculs, c'est que nous tenions à comparer les résultats des deux méthodes d'intégration.

Les ingénieurs que n'effrayeront point les longs calculs présentés en dernier lieu, feront bien de les exécuter ou d'en surveiller l'exécution, qui ne peut exiger plus de un à deux jours de travail, suivant l'habileté du calculateur. Lorsqu'on songe à l'importance des constructions, aux accidents graves qui peuvent naître du défaut de bonnes proportions, ou de ce que l'ingénieur ne s'est pas bien rendu compte du jeu des forces en faisant son projet, on a de la peine à concevoir que l'on ne consacre pas aux calculs qui font la base fondamentale du projet, le quart ou la dixième partie des soins que l'on consacrera à l'enjolivement des dessins.

Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé

ÉQUATIONS (XXVII).

l. $Q^2 = 1,84269$	l. $\frac{2}{3} = 9,82391$
l. $2 = 0,30103$	l. $c^2 = 0,11980$
l. $2Q^2 = 2,14372$	l. $\frac{2}{3}c^2 = 9,94371$
$q = 11^m,9234$ ..... l. $q = 1,07640$	$a = 0^m,07367$ ..... l. $= 8,86731$
$q' = 11\ ,6767$ ..... l. $q' = 1,06732$	l. $2q = 1,37743$
$\frac{1}{2}q = 5\ ,9617$	$\widehat{E'_1 E' E''} = 6°\ 10'\ 37''$.. l. tang $= 7,48988$

Au moyen de ces quantités, on pourrait effectuer le tracé en suivant les indications données n^os^ 43 et 45. L'épure du profil de la voûte étant faite, soit en suivant ce procédé, soit à l'aide des coordonnées calculées au tableau précédent; si l'on trace sur la même épure l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances, on trouve que le plus grand écart entre l'intrados circulaire et celui de notre épure est de $0^m,14$ à peu près; cet écart se manifeste à une distance de la verticale qui passe par le sommet, égale à 0,7 environ de la demi-ouverture. Nous avons dit, en terminant la première partie du mémoire, que l'écart, assez faible en apparence, des deux intrados ne serait pas une raison pour substituer l'arc de cercle à celui que nous proposons.

La planche I présente le profil d'une demi-arche, et la planche II l'élévation d'un pont projeté sur les données du pont d'Iéna.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Arche à grande portée, de 5 mètres de flèche et près de 45 mètres d'ouverture.

47. Soient données : $f = 5^m$; $g = 22^m,4957$; $Y_0 = 2^m,514$; $\mu_1 = 100^m,071$; $\varpi = 2440$ kil. La charge maximum μ_1 répond à peu près à la limite 100^m de Navier, et au dixième de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, eu égard à la différence des densités. (Les chiffres décimaux qui figurent dans ces données

proviennent, comme dans l'exemple précédent, de ce que nous avons voulu utiliser des calculs faits avec d'autres données.)

En suivant la marche indiquée n° 45, nous trouverons d'abord

$$h'' = 2{,}514, \qquad \frac{g}{f} = 4{,}49914, \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}5028.$$

La Table I donne, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$:

$\frac{Y_0}{f}$	$\frac{Q^2}{f^2}$	1re différ.	2e diff.
0,5	6,8732	+ 1,0922	— 68
0,6	7,9654	+ 1,0854	
0,7	9,0508		

d'où :

pour 0,5	6,8732
partie proportionnelle	+ 306
2e différence	+ 1
$\frac{Q^2}{f^2} =$	6,90391

valeur approchée..... $Q^2 = 172{,}598$.

ÉQUATION (I).

$\mu_1 - f =$	95,071	
$3(\mu_1 - f) =$	285,213	l. = 2,4552
$2h'' =$	5,028	
$f + 2h'' =$	10,028	
$f(f+2h'') =$	50,140	l. = 1,7002
$\frac{f(f+2h'')}{3(\mu_1 - f)} =$	0,1758.	l. = 9,2450
$\mu_0 =$	94,8952.	l. = 1,97724

ÉQUATION (II).

l. $Q^2 =$		2,23704
$\mu_0 - h'' =$	92,381	l. = 1,96558
val. app.		l. e = 0,27146
l. $\frac{2}{3} =$		9,82391
$\frac{2}{3} e =$	1,246	l. = 0,09537
dénom. =	93,627	l. = 1,97140
		l. e = 0,26564

Pour corriger la valeur de Q^2, nous aurons recours à la Table II qui donne, avec les valeurs précédentes de $\frac{y}{f}$ et $\frac{Y_0}{f}$,

	$\frac{\delta(Q^2)}{e^2} =$	0,3394.....	l. = 9,53071
			l. e^2 = 0,53128
d'où	$\delta(Q^2) =$	1,153.....	l. = 0,06199
valeur corrigée.....	$Q^2 =$	173,751.....	l. Q^2 = 2,23993

ÉQUATION (V).

			l. 6 = 0,77815
			l. $6Q^2$ = 3,01808
			l. $\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}$ = 7,5132
	$Y_0 =$	2,5140.....	l. Y_0 = 0,4004
	$-\frac{1}{6}\frac{e^2}{Q^2}Y_0 =$	— 0,0082.....	l. = 7,9136 —
valeur corrigée.....	$h'' =$	2,5058.....	l. h'' = 0,39895

A l'aide de cette valeur, nous allons calculer une autre valeur de e plus exacte.

ÉQUATION (II).

	$\mu_0 - h'' =$	92,3894	
(à posteriori).....	$\frac{2}{3}e =$	1,2372	l. Q^2 = 2,23993
dénom.....	=	93,6266.....	l. = 1,97140
valeur corrigée.....	$e =$	1,8558.....	l. e = 0,26853

ÉQUATION (VI).

			l. 2 = 0,30103
			l. μ_0 = 1,97724
	$q^2 =$	352,209.....	l. q^2 = 2,54680
			l. e^2 = 0,53706

La comparaison de h'' et e donne $h = 0^m,65$. Or la hauteur de la charge h peut être réduite à peu près comme il suit :

MATÉRIAUX EMPLOYÉS.	ÉPAISSEUR.	DENSITÉ.	HAUTEUR RÉDUITE à la densité 2,44 des voussoirs.
	m		m
1° Béton	0,15	1,97	0,121
2° Cailloux et gravier	0,20	1,9	0,273
3° Sable	0,15	1,9	
4° Pavé	0,25	2,5	0,256
Épaisseur totale	0,75	Épaisseur réduite, $h = 0,65$	

La solution est donc réalisable. Dans ce cas, les ordonnées sont rapportées à un plan horizontal situé à $0^m,10$ au-dessous du niveau du pavé.

Calcul des poussées, etc.

ÉQUATIONS (XIV).

CALCUL DE y''_1.

$f + h'' =$	7,5058	l. = 0,87540
$f + 2h'' =$	10,012	l. = 1,00052
	somme =	1,87592
	l. q^2 =	2,54680
$\frac{(f+h'')(f+2h'')}{q^2} =$	0,21336	l. = 9,32912
$1 -$ id. =	0,78664	l. = 9,89578
	l. $\frac{1}{3}f$ =	0,22185
	l. $\frac{e^2}{q^2}$ =	7,99026
3e terme =	0,01282	l. = 8,10789
$y''_1 =$	7,49298	l. = 0,87465

CALCUL DE α_1.

$y_1''^2 =$	56,144	l. = 1,74930
$h''^2 =$	6,279	l. = 0,79789
$y_1''^2 - h''^2 =$	49,865	l. = 1,69780
$4Q^2 =$	695,004	l. = 2,84199
	diff. =	8,85581
$\frac{1}{2}\alpha'_1 =$	15° 32′ 13″	l. sin = 9,42791
$\alpha'_1 =$	31 4 26	l. sin = 9,7128
$\alpha_1 - \alpha'_1 =$	0 5 47	l. sin = 7,2260
$\alpha_1 =$	31° 10′ 13″	l. sin α_1 = 9,71398
		l. cos α_1 = 9,93229

ÉQUATIONS (XV).

l. 3 = 0,47712

$$\text{l.}\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7,51314$$

l. $2\delta_1$ = 8,38854

$2\delta_1 \sin\alpha_1$ = 0,01266.... l. = 8,10252

g = 22,4957

x''_1 = 22,50836

ÉQUATIONS (XIX).

$$\text{l.}\frac{1}{2}e = 9,96750$$

$\frac{1}{2}e\sin\alpha_1$ = 0,48026.... l. = 9,68148

$\frac{1}{2}e\cos\alpha_1$ = 0,79394.... l. = 9,89979

x_1 = 22,9886

y_1 = 6,6990

ÉQUATIONS (XX).

y'_0 = 0,65..... l. — 9,81291

y'_1 = 5,9051..... l. — 0,77123

ÉQUATION (XVIII).

l. μ_1 = 2,00031

l. $e\mu_1$ = 2,26884

l. ϖ = 3,38739

$\frac{T_1}{\lambda}$ = 453138 kil..... l. $\frac{T_1}{\lambda}$ = 5,65623

$\frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1$ = 234536..... l. = 5,37021

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1$ = 387721..... l. = 5,58852

ÉQUATION (XXI).

$y_1'^2$ = 34,8698..... l. = 1,54245

$y_0'^2$ = 0,4225..... l. = 9,62582

$y_1'^2 - y_0'^2$ = 34,4473

$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2)$ = 17,2236..... l. = 1,23612

l. ϖ = 3,38739

$\frac{U}{\lambda}$ = 42025 kil..... l. = 4,62351

ÉQUATION (XXII).

$y_1'^3$ = 205,911..... l. = 2,31368

$y_0'^3$ = 0,275..... l. = 9,43873

$y_1'^3 - y_0'^3$ = 205,636

$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^3)$ = 68,545..... l. = 1,83598

u = 3,9798..... l. = 0,59986

ÉQUATION (XXIII).

$\frac{V}{\lambda}$ = $96^{m.}$3,127..... l. = 1,98282

ÉQUATION (XXIII *bis*). *Vérification.*

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda}$ = 429746 kil..... l. = 5,63321

l. $e\mu_0$ = 2,24577

l. $\varpi e\mu_0$ = 5,63316

erreur = 5

Nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage des quantités que nous venons d'obtenir, à ce qui a déjà été dit dans l'exemple du numéro précédent, à l'égard de quantités analogues.

Calcul des coordonnées, inclinaisons des joints, rayons de courbure, épaisseurs.

Le tableau ci-après offre les détails des calculs effectués en suivant la marche qui a été indiquée dans l'exemple relatif au pont d'Iéna : nous nous bornerons à comparer les valeurs de x''_1 et α_1 déduites du tableau par interpolation, à celles qui ont été déduites des Tables. Désignant toujours par n la fraction de l'intervalle de 2° à laquelle répond $y'' = 7^{m},49298$, nous avons pour déterminer n,

$$0,23917 = n \,.\, 0,41655 + \frac{n(n-1)}{3} \,.\, 0,00066,$$

d'où l'on tire, en négligeant le dernier terme,

$$n = 0,57417,$$

et, en ayant égard à ce dernier terme,

$$n = 0,57435.$$

Avec cette valeur et les différences de x'' relatives à $\alpha = 30°$, il vient

$$x'' = 22,08359 + n \,.\, 0,69327 - \frac{n(n-1)}{2} \,.\, 0,05083 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \,.\, 0,00434$$

1er terme.....	22,08359
partie proportionnelle..... +	0,39818
2e différence..... +	620
3e différence..... +	25
d'où $x'' =$	22,48822
or nous avons trouvé $x''_1 =$	22,50836
l'erreur est donc	0,0201

quantité moindre que la millième partie de la demi-ouverture.

PROJET D'ARCHE À GRANDE PORTÉE, DE 44^{m},991 D'OUVERTURE ET 5^{m},000 DE FLÈCHE. —

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha}{y''},$$

$$\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho''\frac{y'' + \rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\sin(\alpha+\tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour Vérification :

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur.}$$

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y'',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha.$$

CONSTANTES.

Soit $\Delta\alpha = 2°$.

$\Delta\alpha = 0{,}0349066$

l. $\Delta\alpha = 8{,}54291$

$Q^2 = 173{,}751$

l. $e^2 = 0{,}53706$

l. $3 = 0{,}47712$

l. $\frac{1}{3}e^2 = 0{,}05994$

$h'' = y''_0 = 2^{m}{,}50580$

$x''_0 = 0$

l. $\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$

α	0°	2°	4°	6°	8°	10°
l. sinα	$\overline{\infty}$	8,54282	8,84358	9,01923	9,14356	9,239
l. cosα	0	9,99974	9,99894	9,99761	9,99575	9,993
l. sin$(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)$	8,24186	8,71880	8,94030	9,08589	9,19433	9,280
l. cos$(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,99993	9,99940	9,99834	9,99676	9,99462	9,991
l. sin$(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	6,78477	7,26171	7,48321	7,62880	7,73724	7,823
l. cos$(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,54284	8,54231	8,54125	8,53967	8,53753	8,534
l. $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	0,0599	0,0597	0,0589	0,0576	0,0557	0,053
y''	2,50580	2,54742	2,66840	2,85866	3,10536	3,395
x''	0	2,38440	4,69285	6,86745	8,87668	10,71
$\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	1,148	1,147	1,145	1,142	1,137	1,13
$Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	172,603	172,604	172,606	172,609	172,614	172,62
l. $[Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$	2,23705	2,23705	2,23705	2,23706	2,23708	2,23
l. y''	0,39895	0,40610	0,42625	0,45616	0,49211	0,53
l. ρ''	1,83810	1,83095	1,81080	1,78090	1,74497	1,70
l. $\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,62287	9,09266	9,29401	9,40970	9,48221	9,52
$\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,04196	0,12378	0,19679	0,25686	0,30354	0,33
$y'' + \rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,54776	2,67120	2,86519	3,11552	3,40890	3,73
$\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,02098	0,06189	0,09840	0,12843	0,15177	0,16
$y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	2,56874	2,73309	2,96359	3,24395	3,56067	3,90
l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,40616	0,42671	0,45715	0,49353	0,53261	0,57
l. $[y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,40972	0,43665	0,47182	0,51107	0,55153	0,59
l. $[\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$	1,83454	1,82101	1,79613	1,76336	1,72605	1,68
l. $\Delta y''$	8,61931	9,08272	9,27934	9,39216	9,46329	9,51
l. $\Delta x''$	0,37738	0,36332	0,33738	0,30303	0,26358	0,22
$\Delta y''$	0,04162	0,12098	0,19026	0,24670	0,29060	0,32
$\Delta x''$	2,38440	2,30845	2,17460	2,00923	1,83476	1,66
ρ''	68,881	67,756	64,684	60,381	55,587	50,82
Vérification : $\rho''_m + \rho''_{m+1}$	136,637	132,440	125,065	115,968	106,418	97,22
Vérification : $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$	68,318	66,220	62,532	57,984	53,209	48,61
Vérification : $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	68,319	66,223	62,536	57,991	53,217	48,62
Vérification : erreur	1	3	4	7	8	
l. $e\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	8,81135	9,11211	9,28776	9,41209	9,50
l. $e\cos\alpha$	0,26853	0,26827	0,26747	0,26614	0,26428	0,26
$e\sin\alpha$	0	0,06477	0,12945	0,19398	0,25828	0,32
$e\cos\alpha$	1,85580	1,85469	1,85127	1,84560	1,83772	1,82
y'	0,6500	0,6927	0,8171	1,0131	1,2676	1,58
x'	0	2,4492	4,8223	7,0614	9,1350	11,0
l. 2δ	7,9121	7,9192	7,9394	7,9693	8,0052	8,0
l. $2\delta\sin\alpha$	$\overline{\infty}$	6,4620	6,7830	6,9885	7,1488	7,2
l. $2\delta\cos\alpha$	7,9121	7,9189	7,9383	7,9669	8,0009	8,0
2δ	0,00817	0,00830	0,00870	0,00932	0,01012	0,0
$2\delta\sin\alpha$	0	0,00029	0,00061	0,00097	0,00141	0,0
$2\delta\cos\alpha$	0,00817	0,00830	0,00868	0,00927	0,01002	0,0
ε	1,8640	1,8641	1,8645	1,8651	1,8659	1,8
Y	2,5140	2,5557	2,6771	2,8679	3,1154	3,4
X	0	2,3841	4,6922	6,8665	8,8753	10,7

DITES *EN ARC DE CERCLE.*

CALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°
9,31788	9,38368	9,44034	9,48998	9,53405	9,57358	9,60931	9,64184	9,67161	9,69897	9,72421	9,74756
9,99040	9,98690	9,98284	9,97821	9,97299	9,96717	9,96073	9,95366	9,94593	9 93753	9,92842	9,91857
9,35209	9,41300	9,46594	9,51264	9,55433	9,59188	9,62595	9,65705	9,68557	9,71184	9,73611	9,75859
9,98872	9,98494	9,98060	9,97567	9,97015	9,96403	9,95728	9,94988	9,94182	9,93307	9,92359	9,91336
7,89500	7,95591	8,00885	8,05555	8,09724	8,13479	8,16886	8,19996	8,22848	8,25475	8,27902	8,30150
8,53163	8,52785	8,52351	8,51858	8,51306	8,50694	8,50019	8,49279	8,48473	8,47598	8,46650	8,45627
0,0503	0,0468	0,0428	0,0381	0,0329	0,0271	0,0207	0,0136	0,0059	9,9975	9,9884	9,9785
3,71984	4,06868	4,43621	4,81772	5,20973	5,60960	6,01535	6,42540	6,83855	7,25381	7,67036	8,08757
2,37769	13,88867	15,26027	16,50814	17,64663	18,68832	19,64422	20,52359	21,33444	22,08359	22,77686	23,41930
1,123	1,114	1,104	1,092	1,079	1,064	1,049	1,032	1,014	0,994	0,974	0,952
2,628	172,637	172,647	172,659	172,672	172,687	172,702	172,719	172,737	172,757	172,777	172,799
2,23711	2,23713	2,23716	2,23719	2,23722	2,23726	2,23730	2,23734	2,23738	2,23743	2,23748	2,23754
0,57052	0,60945	0,64701	0,68284	0,71682	0,74893	0,77926	0,80790	0,83496	0,86057	0,88482	0,90782
1,66659	1,62768	1,59015	1,55435	1,52040	1,48833	1,45804	1,42944	1,40242	1,37686	1,35266	1,32972
3,56159	9,58359	9,59900	9,60990	9,61764	9,62312	9,62690	9,62940	9,63090	9,63161	9,63168	9,63122
0,36441	0,38335	0,39719	0,40729	0,41461	0,41988	0,42355	0,42599	0,42746	0,42817	0,42823	0,42778
4,08425	4,45203	4,83340	5,22501	5,62434	6,02948	6,43890	6,85139	7,26601	7,68198	8,09859	8,51535
0,18221	0,19167	0,19860	0,20364	0,20730	0,20994	0,21177	0,21299	0,21373	0,21408	0,21412	0,21389
4,26646	4,64370	5,03200	5,42865	5,83164	6,23942	6,65067	7,06438	7,47974	7,89606	8,31271	8,72924
0,61111	0,64856	0,68425	0,71800	0,75007	0,78028	0,80881	0,83578	0,86130	0,88547	0,90841	0,93020
0,63007	0,66686	0,70174	0,73469	0,76579	0,79514	0,82286	0,84907	0,87388	0,89741	0,91974	0,94098
1,64763	1,60938	1,57266	1,53775	1,50468	1,47347	1,44398	1,41615	1,38984	1,36492	1,34133	1,31894
9,54263	9,56529	9,58151	9,59330	9,60192	9,60826	9,61284	9,61611	9,61832	9,61967	9,62035	9,62044
0,17926	0,13723	0,09617	0,05633	0,01774	9,98041	9,94417	9,90894	9,87457	9,84090	9,80783	9,77521
0,34884	0,36753	0,38151	0,39201	0,39987	0,40575	0,41005	0,41315	0,41526	0,41655	0,41721	0,41722
1,51098	1,37160	1,24787	1,13849	1,04169	0,95590	0,87938	0,81085	0,74915	0,69327	0,64244	0,59595
3,408	42,431	38,918	35,839	33,144	30,784	28,710	26,881	25,259	23,816	22,525	21,366
3,839	81,349	74,757	68,983	63,928	59,494	55,591	52,140	49,075	46,341	43,891	»
4,419	40,674	37,378	34,492	31,964	29,747	27,795	26,070	24,538	23,170	21,945	»
4,425	40,680	37,382	34,495	31,966	29,749	27,796	26,071	24,538	23,170	21,945	»
6	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	»
9,58641	9,65221	9,70887	9,75851	9,80258	9,84211	9,87784	9,91037	9,94014	9,96750	9,99274	0,01609
0,25893	0,25543	0,25137	0,24674	0,24152	0,23570	0,22926	0,22219	0,21446	0,20606	0,19695	0,18710
0,38584	0,44896	0,51153	0,57346	0,63471	0,69520	0,75482	0,81352	0,87124	0,92790	0,98342	1,03775
1,81522	1,80067	1,78390	1,76498	1,74390	1,72068	1,69535	1,66798	1,63855	1,60716	1,57380	1,53850
2,9046	2,2680	2,6523	3,0527	3,4658	3,8889	4,3200	4,7574	5,2000	5,6466	6,0966	6,5491
13,7635	14,3376	15,7718	17,0816	18,2813	19,3835	20,3990	21,3371	22,2057	23,0115	23,7603	24,4572
8,0837	8,1226	8,1601	8,1960	8,2300	8,2621	8,2924	8,3210	8,3481	8,3737	8,3980	8,4210
7,4016	7,5063	7,6004	7,6860	7,7640	7,8357	7,9017	7,9628	8,0197	8,0727	8,1222	8,1686
8,0741	8,1095	8,1429	8,1742	8,2030	8,2293	8,2531	8,2747	8,2940	8,3112	8,3264	8,3396
0,01213	0,01326	0,01446	0,01571	0,01698	0,01829	0,01961	0,02094	0,02229	0,02364	0,02500	0,02636
0,00252	0,00321	0,00399	0,00485	0,00581	0,00685	0,00797	0,00918	0,01046	0,01182	0,01325	0,01474
0,01186	0,01287	0,01390	0,01493	0,01596	0,01695	0,01791	0,01882	0,01968	0,02047	0,02120	0,02186
1,8679	1,8691	1,8703	1,8715	1,8728	1,8741	1,8754	1,8767	1,8781	1,8794	1,8808	1,8822
3,7317	4,0815	4,4501	4,8326	5,2257	5,6266	6,0332	6,4442	6,8582	7,2743	7,6916	8,1094
13,3752	13,8855	15,2563	16,5033	17,6408	18,6815	19,6363	20,5144	21,3240	22,0718	22,7637	23,4046

Quant à la valeur de α, elle est $30° + n.2° = 31° 8' 55''$ au lieu de $31° 10' 13''$, d'où il résulte que l'erreur sur α_1 est de $1' 18''$, quantité négligeable au degré d'approximation que nous nous sommes imposé.

Les erreurs sur x''_1 et α_1 auraient été évidemment réduites en prenant $\Delta\alpha$ égal à 1°. Si l'on veut réaliser l'ouverture proposée, il suffira de faire croître y''_1 de la quantité $0^m,0201 \operatorname{tang}\alpha_1 = 0^m,0122$, et il en résultera la nécessité d'élever la chaussée ou d'abaisser les naissances de 1 centimètre environ.

Calcul des constantes nécessaires à l'exécution du tracé.

ÉQUATIONS (XXVII).

$\text{l. } Q^2 = 2{,}23993$
$\text{l. } 2 = 0{,}30103$
$\text{l. } 2Q^2 = 2{,}54096$
$q = 18^m,7672 \ldots\ldots\ldots \text{l. } q = 1{,}27340$
$q' = 18{,}5166 \ldots\ldots\ldots \text{l. } q' = 1{,}26756$
$\frac{1}{2} q = 9{,}3836$

$\text{l. } \frac{2}{3} = 9{,}82391$
$\text{l. } e^2 = 0{,}53706$
$\text{l. } \frac{2}{3} e^2 = 0{,}36097$
$a = 0^m,12234 \ldots\ldots \text{l. } a = 9{,}08757$
$\text{l. } 2q = 1{,}57443$
$\widehat{E'_1 E' E''} = 0° 11' 12'' \ldots \text{l. tang} = 7{,}51314$

Le tracé de l'intrados comparé à l'arc de cercle tangent au sommet et passant par les naissances donne, entre ces courbes, un écart qui s'élève jusqu'à $0^m,30$ environ, et qui se présente vers les 0,7 de la distance de l'axe de la voûte aux naissances. C'est à cette comparaison des deux intrados que s'applique la discussion du n° 32.

On peut voir, planches I et II, le profil de l'arche que nous venons d'étudier et une élévation de pont construite sur ce profil. On a figuré, planche II, un mode de disposition de l'appareil des têtes qui semblerait se prêter à la réalisation approximative des actions normales de la charge sur l'extrados de la voûte. Le sens vertical ou horizontal du lit de carrière serait indifférent, dans cette disposition, si l'on pouvait négliger l'effet des surcharges

accidentelles, puisque les pressions horizontales et verticales en un point donné du massif seraient égales, conformément aux conséquences de l'hypothèse de la fluidité. Nous n'osons pas insister pour que l'on réalise la disposition indiquée dans la figure; nous avons voulu seulement donner une idée de l'aspect que présenterait un semblable mode d'appareiller les parements extérieurs.

ARCHES COMPLÈTES OU *EN ANSE DE PANIER.*

Exemple d'un projet d'arche à grande portée, de 60^{m},070 d'ouverture.

48. Il nous a semblé bon de présenter un exemple des grandes dimensions que nos formules permettent de donner aux arches de pont, sans sortir des conditions de grande stabilité, ni exposer les voussoirs à des pressions trop considérables.

L'arche en pierre de la plus grande dimension que l'on connaisse est celle du pont de Vieille-Brioude (sur l'Allier). Cette arche a 54^{m},20 d'ouverture et 21 mètres de flèche; le projet dont nous nous occupons présente encore plus de hardiesse, comme on va le voir.

Soient données en premier lieu :

Demi-ouverture.....	$g = 30^{m},035\ldots$	l. $g = 1,47763$
Ordonnée des naissances....	$Y_1 = 18\ ,7480\ldots$	l. $Y_1 = 1,27295$
d'où $\frac{g}{Y_1} =$	$1,60207\ldots$	l. $= 0,20468$

Si l'on cherche ce nombre dans la Table III, colonne marquée $\frac{g}{Y_1}$, on trouvera, par interpolation, qu'il répond à

$\frac{f}{Y_1} =$	$0,865903\ldots$	l. $= 9,93747$
d'où $f =$	$16,2338\ldots\ldots$	l. $= 1,21042$

puis, à cause de $y''_1 = Y_1$,

$y''_1 - f =$	$2,5142\ldots\ldots$	l. $= 0,40040$

On voit ainsi que la somme de l'épaisseur à la clef et de la surcharge ne s'élève qu'à $2^{m},5142$: il convient donc d'employer des matériaux résistants, pour ne pas avoir une surcharge trop faible. Supposons que les matériaux dont on dispose soient capables de résister à la charge permanente représentée par

$$\mu_1 = 112^{m},326 \quad \text{l. } \mu_1 = 2,050418$$

et soit

$$\varpi = 2440 \text{ kil.} \ldots \quad \text{l. } \varpi = 3,387399;$$

μ_1 ne sera qu'environ le $\frac{1}{16}$ de la hauteur 1803 mètres qui répond à la rupture du liais de Bagneux (voir le tableau du n° 44). Si l'on s'en tient aux prescriptions rapportées par M. Poncelet, on ne courra aucun risque en adoptant le chiffre ci-dessus. L'emploi de la charge μ_1 que nous proposons aurait contre lui le dire de Navier, qui limite les charges à 100 mètres dans les arches de pont; mais nous devons penser que cet ingénieur n'a pas prétendu les fixer ainsi à $\frac{1}{10}$ près : il avait en vue les constructions telles que tout le monde les pratiquait à son époque, constructions dans lesquelles la stabilité s'éloigne plus ou moins de la grande stabilité que nous avons assignée aux nôtres.

Calculons μ_0 et e :

ÉQUATIONS (VIII).

$2y''_1 - f = 21,2622 \ldots$ l. $= 1,32761$	l. $\frac{1}{2} f(2y''_1 - f) = 2,23700$
l. $f(2y''_1 - f) = 2,53803$	l. $(\mu_0 - y''_1 + f) = 1,96558$
$\mu_1 - f = 96,092$	val. appr. .... l. $e = 0,27142$
$3(\mu_1 - f) = 288,276 \ldots$ l. $= 2,45981$	l. $3 = 0,47712$
$\frac{f(2y''_1 - f)}{3(\mu_1 - f)} = 1,197 \ldots$ l. $= 0,07822$	$\frac{1}{3} e = 0,6227 \ldots$ l. $= 9,79430$
$\mu_0 = 94,895 \ldots$ l. $= 1,97724$	dénominat. $= 93,0037 \ldots$ l. $= 1,96850$
$\mu_0 - y''_1 + f = 92,381 \ldots$ l. $= 1,96558$	2e val. appr. .... l. $e = 0,26850$
	$\frac{1}{3} e = 0,6185 \ldots$ l. $= 9,79138$

ÉQUATIONS (IX).

$y_1'' - f = 2{,}5142 \ldots\ldots$ l. $= 0{,}40040$

l. $\dfrac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)} = 7{,}86237$

l. $\dfrac{1}{3}e^2 = 0{,}05988$

$\dfrac{1}{3}\dfrac{y''_1 - f}{f(2y''_1 - f)}\, e^2 = 0{,}0084 \ldots\ldots$ l. $= 7{,}92225$

$h'' = 2{,}5058 \ldots$ l. $h'' = 0{,}39895$

$e = 1{,}8558 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$h = 0{,}6500$

Calcul plus précis de e, ÉQUATION (IX *bis*).

$y_1''^2 = 351{,}488 \ldots\ldots$ l. $= 2{,}54591$

$h''^2 = 6{,}279 \ldots\ldots$ l. $= 0{,}79789$

$y_1''^2 - h''^2 = 345{,}209$

$\dfrac{1}{2}(y_1''^2 - h''^2) = 172{,}604 \ldots\ldots$ l. $= 2{,}23705$

$\mu_0 - h'' = 92{,}389$

dénomin. $\ldots = 93{,}008 \ldots\ldots$ l. $= 1{,}96852$

val. corr. $\ldots\ e = 1{,}8558$ (*) $\ldots$ l. $e = 0{,}26853$

ÉQUATIONS (XII).

$\dfrac{1}{2}q^2 = 176{,}105, \ldots$ l. $e\mu_0 = 2{,}24577$

l. $2 = 0{,}30103$

$q^2 = 352{,}209 \ldots$ l. $q^2 = 2{,}54680$

$-h''e = -4{,}650 \ldots\ldots$ l. $= 0{,}66748$ —

l. $e^2 = 0{,}53706$

l. $\dfrac{2}{3} = 9{,}82391$

$+\dfrac{2}{3}e^2 = +2{,}296 \ldots\ldots$ l. $= 0{,}36097$

$Q^2 = 173{,}751 \ldots$ l. $Q^2 = 2{,}23993$

On peut remarquer actuellement que les constantes Q^2, e, μ_0, q^2 et h'' sont précisément les mêmes que dans l'exemple précédent. Nous avons choisi nos données de manière à retrouver ces constantes : en cela nous nous sommes proposé d'utiliser les calculs relatifs aux coordonnées, rayons de courbure, etc., présentés dans cet exemple.

(*) Si l'on voulait se servir de cette valeur de e pour corriger la solution, à l'aide de la Table IV, on trouverait $\dfrac{Y_1\,\delta f}{e^2} < 0{,}0001$, d'où $\delta f < 0^m{,}00002$.

Sans cette circonstance, nous aurions pu nous dispenser d'effectuer le dernier calcul de e, car le logarithme de cette quantité, obtenu en dernier lieu, ne diffère de celui obtenu précédemment que de trois unités du dernier ordre.

En se reportant à la valeur de e, on voit comment le bon emploi des matériaux conduit, malgré des dimensions si considérables, à une épaisseur à la clef qui n'a rien d'exagéré, et que probablement tout ingénieur, en l'absence d'une théorie aussi approchée que la nôtre, eût augmentée notablement. C'est du moins ce que l'on peut induire de l'examen des constructions existantes, où l'on trouve des épaisseurs de voûte de 2 mètres à $2^{m},25$ pour des portées incomparablement moindres que 60 mètres.

Si, au lieu de se donner μ_1, on se fût donné h, on aurait calculé e et μ_1 par les équations (X) et (XI) : la valeur trouvée aurait fait admettre ou rejeter la solution.

Calcul des poussées, etc.

ÉQUATION (XVI).

$$\text{l.}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}99026$$

$$\text{l. } 3 = 0{,}47712$$

$\alpha_1 = 89^\circ\,48'\,48''$ ..... l. $\cot\alpha_1 = 7{,}51314$

l. $\sin\alpha_1 = 0$

l. $\cos\alpha_1 = 7{,}51314$

1re ÉQUATION (XVII).

$$\text{l.}\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$

$f + h'' =$ 18,7396..... l. = 1,27276

$\frac{1}{3}(f+h'')\frac{e^2}{q^2} =$ 0,06108..... l. = 8,78590

$g =$ 30,035

$x''_1 =$ 30,09608

ÉQUATION (XVIII).

l. $e\mu_1 = 2{,}31901$

$\frac{T_1}{\lambda} = \frac{T_1}{\lambda}\sin\alpha_1 =$ 508628. kil..... l. = 5,70640

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 =$ 1658..... l. = 3,21954

ÉQUATIONS (XIX).

$\frac{1}{2}e\sin\alpha_1 =$ 0,92790... l. $\frac{1}{2}e = 9{,}96750$

$\frac{1}{2}e\cos\alpha_1 =$ 0,00302..... l. = 7,48064

$x_1 =$ 31,02398

$y_1 =$ 18,74498

ÉQUATIONS (XX) ET (XXI).

$y'_1 = 18{,}74196\ldots$ l. $y'_1 = 1{,}27281$
$y'_0 = 0{,}65\ldots\ldots$ l. $y'_0 = 9{,}81291$

$y_1'^2 = 351{,}253\ldots\ldots$ l. $= 2{,}54562$
$y_0'^2 = 0{,}422\ldots\ldots$ l. $= 9{,}62582$

$y_1'^2 - y_0'^2 = 350{,}831$

$\frac{1}{2}(y_1'^2 - y_0'^2) = 175{,}415\ldots\ldots$ l. $= 2{,}24407$

l. $\varpi = 3{,}38739$

$\frac{U}{\lambda} = 428016$ kil. $\ldots\ldots$ l. $= 5{,}63146$

ÉQUATION (XXII).

$y_1'^3 = 6583{,}09\ldots\ldots$ l. $= 3{,}81845$
$y_0'^3 = 0{,}27\ldots\ldots$ l. $= 9{,}43873$

$y_1'^3 - y_0'^3 = 6582{,}82$

$\frac{1}{3}(y_1'^3 - y_0'^2) = 2194{,}27\ldots\ldots$ l. $= 3{,}34129$

l. dénom. $= 2{,}24407$

$u = 12{,}5089\ldots\ldots$ l. $= 1{,}09722$

ÉQUATION (XXIII).

$\frac{V}{\lambda} = 208^{m}{,}454\ldots\ldots$ l. $= 2{,}31901$

ÉQUATION (XXIII *bis*), *vérification*.

$\frac{T_1}{\lambda}\cos\alpha_1 + \frac{U}{\lambda} = 429674\ldots\ldots$ l. $= 5{,}63314$

l. $\varpi e \mu_0 = 5{,}63316$

erreur $= 2$

Nous reviendrons tout à l'heure sur l'emploi des quantités U et T_1 dans le calcul des culées.

Calcul des coordonnées, inclinaisons des plans de joint, rayons de courbure, épaisseurs.

De ce que les constantes Q^2, e, q^2 et h'' sont les mêmes que dans l'exemple du n° 47, il résulte que le tableau annexé à ce numéro fournira toutes les quantités demandées, pour des angles α compris entre 0° et 34°; il reste donc à poursuivre le calcul jusque vers 90°.

Nous donnons la suite de ces calculs dans le tableau ci-joint, où nous avons fait $\Delta\alpha = 3°$, de 32° à 62°; et $\Delta\alpha = 4°$, de 62° à 90°, afin d'abréger les calculs. Dans ce tableau, les constantes, sauf $\Delta\alpha$, sont les mêmes que dans le précédent; et les valeurs de x'' et y'', qui nous ont servi de point de départ, sont celles du précédent tableau qui se rapportent à $\alpha = 32°$.

TROISIÈME D'ARCHE A GRANDE PORTÉE, DE 60m,070 D'OUVERTURE ET DE 16m,2338 DE FLÈCHE.

FORMULES.

$$\rho'' = \frac{Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha}{y''},$$

$$\rho + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'' = \rho''\frac{y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha}{y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha},$$

$$\Delta y'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha,$$

$$\Delta x'' = (\rho'' + \tfrac{1}{2}\Delta\rho'')\cos(\alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha.$$

Pour vérification :

$$\rho''_m + \tfrac{1}{2}\Delta\rho''_m - \tfrac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1}) = \text{erreur.}$$

$$y' = y'' - e\cos\alpha,$$

$$x' = x'' + e\sin\alpha,$$

$$2\delta = \frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2}y',$$

$$\varepsilon = e + 2\delta,$$

$$Y = y'' + 2\delta\cos\alpha,$$

$$X = x'' - 2\delta\sin\alpha$$

CONSTANTES.

$\Delta\alpha = 3°$.	$\Delta\alpha = 4°$.
$\Delta\alpha = 0{,}0523599$	$\Delta\alpha = 0{,}0698132$
l. $\Delta\alpha = 8{,}71900$	l. $\Delta\alpha = 8{,}84394$

$$Q^2 = 173{,}751$$

$$\text{l.}\tfrac{1}{3}e^2 = 0{,}05994$$

$\alpha = 32°$ { $y'' = 7{,}67036$; $x'' = 22{,}77686$

$$\text{l.}\frac{1}{3}\frac{e^2}{q^2} = 7{,}51314$$

α	32°	35°	38°	41°	44°	47
l. sin α	9,72421	9,75859	9,78934	9,81694	9,84177	9,86
l. cos α	9,92842	9,91336	9,89653	9,87778	9,85693	9,83
l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,74189	9,77439	9,80351	9,82968	9,85324	9,87
l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)$	9,92111	9,90518	9,88741	9,86763	9,84566	9,82
l. sin $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,46089	8,49339	8,52251	8,54868	8,57224	8,5
l. cos $(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,64011	8,62418	8,60641	8,58663	8,56466	8,54
l. $\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	9,98836	9,97330	9,95647	9,93772	9,91687	9,89
y''	7,67036	8,29680	8,92282	9,54694	10,16801	10,7
x''	22,77686	23,72332	24,56934	25,32647	26,00425	26,6
$\frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	0,974	0,940	0,905	0,866	0,826	0,7
$Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha$	172,777	172,811	172,846	172,885	172,925	172,9
l. $[Q^2 - \frac{1}{3}e^2\cos\alpha]$	2,23748	2,23757	2,23766	2,23776	2,23786	2,2
l. y''	0,88482	0,91891	0,95050	0,97986	1,00724	1,0
l. ρ''	1,35266	1,31866	1,28716	1,25790	1,23062	1,2
l. $\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	9,81355	9,81205	9,80967	9,80658	9,80286	9,7
$\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,65095	0,64871	0,64516	0,64059	0,63513	0,6
$y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,32131	8,94551	9,56798	10,18753	10,80314	11,4
$\frac{1}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	0,32547	0,32435	0,32258	0,32029	0,31756	0,3
$y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha$	8,64678	9,26986	9,89056	10,50782	11,12070	11,7
l. $[y'' + \rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,92019	0,95161	0,98082	1,00807	1,03355	1,0
l. $[y'' + \frac{3}{2}\rho''\sin(\alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha)\Delta\alpha]$	0,93686	0,96707	0,99522	1,02151	1,04613	1,0
l. $[\rho'' + \frac{1}{2}\Delta\rho'']$	1,33599	1,30320	1,27276	1,24446	1,21804	1,1
l. $\Delta y'$	9,79688	9,79659	9,79527	9,79314	9,79028	9,7
l. $\Delta x'$	9,97610	9,92738	9,87917	9,83109	9,78270	9,7
$\Delta y'$	0,62644	0,62602	0,62412	0,62107	0,61699	0,6
$\Delta x'$	0,94646	0,84602	0,75713	0,67778	0,60632	0,5
ρ''	22,525	20,829	19,371	18,109	17,007	16,0
Vérification : $\rho''_m + \rho''_{m+1}$	43,354	40,200	37,480	35,116	33,045	31,2
Vérification : $\frac{1}{2}(\rho''_m + \rho''_{m+1})$	21,677	20,100	18,740	17,558	16,522	15,6
Vérification : $\rho''_m + \frac{1}{2}\Delta\rho''_m$	21,677	20,100	18,740	17,558	16,521	15,6
Vérification : erreur	0	0	0	0	—1	-1
l. $e\sin\alpha$	9,99274	0,02712	0,05787	0,08547	0,11030	0,1
l. $e\cos\alpha$	0,19695	0,18189	0,16506	0,14631	0,12546	0,1
$e\sin\alpha$	0,98342	1,06444	1,14254	1,21750	1,28914	1,3
$e\cos\alpha$	1,57380	1,52016	1,46238	1,40059	1,33494	1,2
y'	6,0964	6,7766	7,4604	8,1463	8,8331	9,5
x'	23,7603	24,7878	25,7119	26,5440	27,2934	27,9
l. 2δ	8,3980	8,4321	8,4636	8,4930	8,5204	8,5
l. $2\delta\sin\alpha$	8,1222	8,1907	8,2529	8,3099	8,3622	8,4
l. $2\delta\cos\alpha$	8,3264	8,3455	8,3601	8,3708	8,3773	8,4
2δ	0,02500	0,02705	0,02908	0,03112	0,03314	0,0
$2\delta\sin\alpha$	0,01325	0,01551	0,01790	0,02041	0,02303	0,0
$2\delta\cos\alpha$	0,02120	0,02216	0,02291	0,02349	0,02384	0,0
ε	1,8808	1,8829	1,8849	1,8869	1,8889	1,9
Y	7,6916	8,3190	8,9457	9,5704	10,1918	10,9
X	22,7636	23,7082	24,5514	25,3060	25,9812	26,4

U *EN ANSE DE PANIER.*

ALCUL DES COORDONNÉES, INCLINAISONS DES PLANS DE JOINT, RAYONS DE COURBURE, ÉPAISSEURS.

50°	53°	56°	59°	62°	66°	70°	74°	78°	82°	86°	90°
,88425	9,90235	9,91857	9,93307	9,94593	9,96073	9,97299	9,98284	9,99040	9,99575	9,99894	0
,80807	9,77946	9,74756	9,71184	9,67161	9,60931	9,53405	9,44034	9,31788	9,14356	8,84358	$\overline{\infty}$
,89354	9,91069	9,92603	9,93970	9,95366	9,96711	9,97821	9,98690	9,99335	9,99761	9,99974	9,99974
,79415	9,76395	9,73021	9,69234	9,64184	9,57358	9,48998	9,38368	9,23967	9,01923	8,54282	8,5428-
,61254	8,62969	8,64503	8,65870	8,79760	8,81111	8,82215	8,83084	8,83729	8 84155	8,84368	8,84368
,51315	8,48295	8,44921	8,41134	8,48578	8,41752	8,33392	8,22762	8,08361	7,86317	7,38676	7,3868-
,86801	9,83940	9,80750	9,77178	9,73155	9,66925	9,59399	9,50028	9,37782	9,20350	8,90352	∞
,39708	12,00344	12,60341	13,19634	13,78164	14,54951	15,30153	16,03655	16,75349	17,45134	18,12909	18,78581
,15208	27,63441	28,06236	28,44009	28,77124	29,14576	29,44960	29,68842	29,86718	29,99023	30,06147	30,08440
,738	0,691	0,642	0,591	0,539	0,468	0,393	0,316	0,239	0,160	0,080	0
,013	173,060	173,109	173,160	173,212	173,283	173,358	173,435	173,512	173,591	173,671	173,751
,23808	2,23820	2,23832	2,23845	2,23858	2,23876	2,23894	2,23914	2,23933	2,23953	2,23973	2,23993
,05679	1,07931	1,10049	1,12046	1,13930	1,16285	1,18474	1,20511	1,22410	1,24183	1,25838	1,27383
,18129	1,15889	1,13783	1,11799	1,09928	1,07591	1,05420	1,03403	1,01523	0,99770	0,98135	0,96610
,79383	9,78858	9,78286	9,77669	9,89688	9,88702	9,87636	9,86487	9,85252	9,83925	9,82503	9,80978
,62206	0,61458	0,60654	0,59799	0,78864	0,77094	0,75225	0,73261	0,71205	0,69064	0,66839	0,64533
,01914	12,61802	13,20995	13,79433	14,57028	15,32045	16,05378	16,76916	17,46556	18,14198	18,79748	19,43114
,31103	0,30729	0,30327	0,29899	0,39432	0,38547	0,37612	0,36630	0,35603	0,34532	0,33419	0,32266
,33017	12,92531	13,51322	14,09332	14,96460	15,70592	16,42990	17,13546	17,82159	18,48730	19,13167	19,75380
,07987	1,10099	1,12090	1,13970	1,16347	1,18527	1,20558	1,22451	1,24218	1,25869	1,27410	1,28850
,09097	1,11144	1,13076	1,14901	1,17506	1,19606	1,21563	1,23390	1,25094	1,26687	1,28175	1,29565
,17019	1,14844	1,12797	1,10868	1,08769	1,06512	1,04415	1,02464	1,00647	0,98952	0,97370	0,95895
,78273	9,77813	9,77300	9,76738	9,88529	9 87623	9,86630	9,85548	9,84376	9,83107	9,81738	9,80253
,68334	9,63139	9,57718	9,52002	9,57347	9,48264	9,37807	9,25226	9,09008	8,85272	8,36046	8,3457-
,60636	0,59997	0,59292	0,58530	0,76787	0,75202	0,73502	0,71694	0,69785	0,67775	0,65672	0,63464
,48233	0,42795	0,37773	0,33115	0,37452	0,30384	0,23882	0,17876	0,12305	0,07124	0,02293	−0,02217
5,181	14,417	13,735	13,122	12,5684	11,9100	11,3292	10,8151	10,3569	9,9481	9,5797	9,2491
9,598	28,152	26,857	25,690	24,4784	23,2392	22,1443	21,1720	20,3050	19,5278	18,8288	»
4,799	14,076	13,428	12,845	12,2392	11,6196	11,0721	10,5860	10,1525	9,7639	9,4144	»
4,798	14,075	13,427	12,843	12,2374	11,6177	11,0701	10,5840	10,1501	9,7617	9,4124	»
—1	—1	—1	—2	—18	—19	—20	—20	—24	—22	—20	»
0,15278	0,17088	0,18710	0,20160	0,21446	0,22926	0,24152	0,25137	0,25893	0,26428	0,26747	0,26853
0,07660	0,04799	0,01609	9,98037	9,94014	9,87784	9,80258	9,70887	9,58641	9,41209	9,11211	∞
1,42161	1,48211	1,53851	1,59074	1,63855	1,69535	1,74389	1,78390	1,81522	1,83772	1,85127	1,85580
1,19289	1,11684	1,03774	0,95581	0,87125	0,75482	0,63472	0,51153	0,38584	0,25828	0,12945	0
0,2041	10,8866	11,5657	12,2405	12,9160	13,8000	14,6718	15,5298	16,3722	17,1974	18,0038	18,7858
8,5737	29,1165	29,6009	30,0308	30,4098	30,8411	31,1935	31,4723	31,6824	31,8280	31,9127	31,9402
8,5699	8,5924	8,6136	8,6336	8,6524	8,6760	8,6979	8,7183	8,7372	8,7550	8,7715	8,7870
8,4541	8,4948	8,5322	8,5667	8,5983	8,6367	8,6709	8,7011	8,7276	8,7508	8,7704	8,7871
8,3780	8,3719	8,3612	8,3454	8,3240	8,2853	8,2320	8,1587	8,0551	7,8986	7,6151	$\overline{\infty}$
0,03715	0,03912	0,04108	0,04301	0,04492	0,04743	0,04988	0,05228	0,05460	0,05689	0,05909	0,06124
0,02845	0,03110	0,03406	0,03687	0,03966	0,04332	0,04687	0,05025	0,05341	0,05634	0,05894	0,06124
0,02388	0,02355	0,02297	0,02215	0,02109	0,01929	0,01706	0,01441	0,01135	0,00792	0,00412	0
1,8930	1,8949	1,8969	1,8988	1,9007	1,9032	1,9057	1,9081	1,9104	1,9127	1,9149	1,9170
1,4210	12,0270	12,6264	13,2185	13,8027	14,5688	15,3186	16,0510	16,7648	17,4593	18,1332	18,7858
7,1236	27,6033	28,0283	28,4032	28,7316	29,1024	29,4027	29,6382	29,8138	29,9339	30,0025	30,0232

La marche des erreurs affecte une grande régularité : d'un autre côté, les valeurs des coordonnées autres que y'', et celles des épaisseurs, ayant été vérifiées par les différences successives, il n'est pas admissible qu'il se soit glissé quelque faute de calcul assez notable pour qu'on doive s'y arrêter.

Pour comparer le résultat fourni par notre tableau à celui que donnent les Tables, il convient ici de rechercher à quelle valeur de α répond le maximum de l'abscisse X de l'intrados réel, et la valeur correspondante de Y; nous comparerons ensuite α à l'angle α_1 calculé plus haut, et le maximum de X à la demi-ouverture g, puis Y à Y_1. Soit n la fraction de l'intervalle $\Delta\alpha = 4^\circ$ comptée à partir de 90° vers 0°, à laquelle répond le maximum de X; nous aurons, pour expression générale de X, dans le voisinage de 90°, à l'aide des différences de X prises dans le même sens que n,

$$X = 30{,}0232 - n \cdot 0{,}0207 - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0{,}0479 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \cdot 0{,}0036,$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{dX}{dn} = 0$,

$$0 = -0{,}0207 - \frac{2n-1}{2} \cdot 0{,}0479 - \frac{3n^2 - 6n + 2}{6} \cdot 0{,}0036.$$

Cette équation donne, en réduisant et tirant la valeur de n d'une certaine manière,

$$n = -\frac{0{,}041}{0{,}886 + 0{,}036\, n}$$

d'où

$$n = +0{,}046\,19$$

La valeur correspondante de α est $90^\circ - n.4^\circ$, ou $89^\circ\ 48'\ 55''$: cet angle étant comparé à la valeur de α_1 calculée directement, donne une différence de $7''$ qui est tout à fait insensible; et même, pour pouvoir répondre de l'exactitude de cette différence, il faudrait avoir déterminé les différences de X avec une figure de plus.

L'expression générale de Y, en partant de $\alpha = 90°$, s'obtient de la même manière que celle de X; elle est

$$Y = 18,7858 - n.\,0,6526 - \frac{n(n-1)}{2}\,0,0213.$$

En substituant la valeur de n dans les expressions de X et Y, il vient

$$X = 30,0232, \qquad Y = 18,7561;$$

or nous avions

$$g = 30,035., \qquad Y_1 = 18,7480;$$

les erreurs sont donc

$$-\,0^m,0118,\ldots\ldots+\,0^m,0081.$$

On pourra généralement négliger de telles erreurs dans la pratique. Pour les réduire, il eût fallu prendre des valeurs de $\Delta\alpha$ plus petites que celles employées.

La valeur de l'épaisseur ε qui figure dans la dernière colonne du tableau fera connaître la largeur minimum des piles : en effet, cette largeur doit être au moins égale au double de la projection horizontale du joint extrême, ou à 2ε dans le cas actuel, et dans l'hypothèse où les matériaux qui forment les assises des piles présentent autant de résistance que les voussoirs. La largeur des piles serait donc au minimum de $3^m,834$.

CALCUL DES CONSTANTES NÉCESSAIRES À L'EXÉCUTION DU TRACÉ.

Ces constantes étant évidemment les mêmes que dans l'exemple précédent, nous renverrons à cet exemple, en rappelant que, si l'angle $\widehat{E'_1 E' E''}$ n'était pas déjà déterminé, on le ferait, sans calcul, égal au complément de α_1.

On trouvera, planches I et II, le profil de l'arche qui vient d'être calculée et l'élévation d'un pont à plusieurs arches construite sur ce profil.

En comparant le tracé de l'intrados à celui d'une demi-ellipse ayant pour demi-axes la flèche et la demi-ouverture de l'arche qui nous occupe, on verra que l'écart de ces courbes s'élève jusqu'à $0^m,40$, et qu'il a lieu vers les 0,7 de la distance des naissances à la verticale qui passe par le sommet. Si l'on voulait substituer l'ellipse à notre intrados, en donnant pour épaisseur à la voûte celle que nous avons trouvée pour les naissances, et qui est $1^m,92$, on trouverait, en raisonnant comme au n° 32, que la résultante des pressions pourrait passer à une distance de l'extrados elliptique égale à $0^m,59$, quantité qui n'est que les $\frac{4}{13}$ environ de l'épaisseur. Or, les pressions ne s'exerçant que sur une étendue triple de celle-ci ou égale à $1^m,77$, il s'ensuit que les joints s'ouvriraient à l'intrados d'une profondeur de $0^m,15$ autour du point où les deux courbes présentent le plus grand écart. La pression moyenne y serait représentée par la valeur de μ relative au joint considéré, multipliée par $\frac{1,8558}{1,77} = 1,05$, et la pression vers l'extrados, par cette même valeur multipliée par 2,1. Cette dernière serait donc plus que double de la pression qui aurait lieu dans notre système.

L'exemple que nous venons de présenter montre que, sauf les difficultés d'exécution, on peut construire des arches de très-grande portée dans les conditions d'une très-grande stabilité, sans donner à la voûte des épaisseurs exagérées. Nous ne croyons pas avoir fixé la limite du possible : dans cet exemple et le précédent, les charges maximum que supportent les voussoirs n'excèdent pas $112^m,33$; tandis qu'en employant le liais de Bagneux par exemple, on pourrait charger les voussoirs jusqu'à 180 mètres, sans excéder le $\frac{1}{10}$ de la charge de rupture.

La nécessité de donner un large débouché aux arches des ponts qui traversent nos grands fleuves a reçu une nouvelle confirmation dans ces derniers temps. On s'accorde à admettre qu'une partie des désastres survenus aux environs d'Orléans en 1846 est due

au manque de débouché du pont de Vierzon et à la présence du remblai par lequel on aborde ce pont du côté du sud.

On conçoit, en effet, que des arches à grande portée, assises sur des piles fortes et peu nombreuses, présentent un débouché total plus grand et plus facile qu'une série de petites arches établies sur des piles un peu plus faibles, mais plus nombreuses.

Avant de passer en revue divers ponts construits en France ou ailleurs, nous allons présenter quelques considérations sur l'établissement des culées dans les ponts où les arches sont *en anse de panier*.

DÉTERMINATION DE LA FORME QU'IL CONVIENT DE DONNER À LA PARTIE SUPÉRIEURE DES CULÉES (*DIGRESSION*).

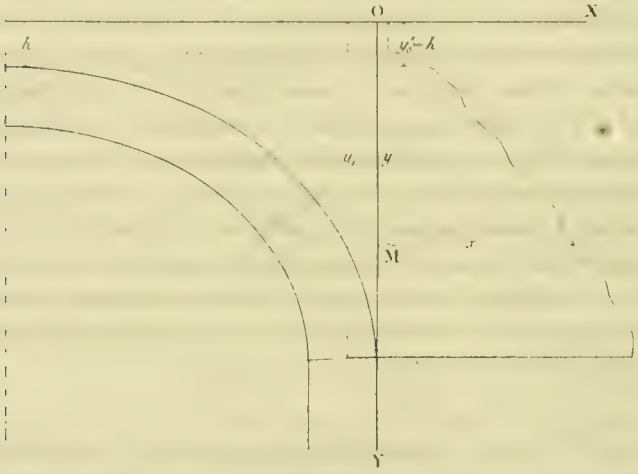
49. Nous prendrons pour exemple les culées sur lesquelles devrait s'appuyer l'arche étudiée dans le numéro précédent.

D'après ce qui a été dit jusqu'ici, nous considérerons la partie déterminée du profil d'une culée comme étant formée par : une verticale passant par le point inférieur de l'intrados, la ligne de joint des naissances, la verticale menée par le point inférieur de l'extrados, et une horizontale menée au niveau du sommet de l'extrados (*). Nous supposerons la culée terminée latéralement par le plan des têtes, quoique, dans certains cas, il soit préférable de donner aux culées une largeur croissante à partir du massif, au moyen de murs en aile. Le problème à résoudre est la détermination de la forme qu'il convient de donner à la partie extérieure du profil de la culée, ou à la partie qui limite la face de la culée opposée au massif, cette face étant supposée perpendiculaire aux plans des têtes.

(*) Si l'on pouvait compter sur la résistance du sol aux abords du pont, il suffirait d'élever les maçonneries de la culée jusqu'à la hauteur du point inférieur de l'extrados, puisque la partie supérieure de la culée doit seulement résister à l'action exercée par le massif agissant comme un fluide; mais il serait à craindre, dans le cas d'un débordement des eaux, que les abords ne fussent emportés ou du moins profondément ravinés, ce qui compromettrait la stabilité du pont. Il sera donc généralement plus prudent d'élever les maçonneries des culées jusqu'au niveau du sommet de l'extrados.

Considérons l'équilibre de la partie de l'une des culées limitée dans le sens vertical par deux plans horizontaux dont les ordonnées sont y'_0 et y', égales respectivement aux ordonnées du sommet et du point inférieur de l'extrados. Admettons que, suivant l'habitude, on ne tienne aucun compte de la butée des terres qui s'exerce sur la face de la culée opposée au massif. Rappelons que le massif exerce sur la culée la même pression que si le massif était un liquide ayant la même densité, s'étendant jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados, et soumis, à sa partie supérieure, à une pression représentée par la hauteur $y'_0 = h$ des matériaux qui s'élèvent au-dessus de ce plan. La culée est censée soumise à la même pression verticale s'exerçant sur sa partie supérieure.

Ceci posé, faisons passer un axe vertical O′Y par le point inférieur de l'extrados, et conservons le même axe des x que dans tout ce qui précède.



Soient x et y' les coordonnées d'un point du profil de la face de la culée opposée au massif;

p le poids de la partie de la culée qui est limitée inférieure-

ment par un plan horizontal ayant y' pour ordonnée, augmenté de la charge que supporte la culée supérieurement;

ϖ'' le poids de l'unité de volume des matériaux qui composent la culée;

f le coefficient de frottement moyen de ces matériaux que nous supposerons, pour plus de simplicité, disposés par couches horizontales infiniment minces. (La lettre f ne figure avec cette nouvelle signification que dans ce numéro; on ne la confondra donc pas avec la flèche des arches.)

Nous avons vu, n° 29, que la résultante des forces horizontales exercées par le massif sur la culée est représentée par

$$\int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on a $i = 1$.

La condition d'équilibre de la portion de culée limitée inférieurement à l'ordonnée y', que fournit la considération des forces horizontales, est simplement

$$fp > \int \varpi \lambda y' dy',$$

lorsque l'on fait abstraction de la cohésion. Différentiant cette inégalité et substituant pour dp sa valeur

$$dp = \varpi'' \lambda x dy',$$

on en déduit

$$y' < f \frac{\varpi''}{\varpi} x.$$

Il est possible de satisfaire à cette inégalité de bien des manières différentes. Soit f' un nombre plus petit que f, on pourra écrire

$$y' = f' \frac{\varpi''}{\varpi} x,$$

et le profil de la culée sera une ligne droite passant par l'origine des coordonnées et inclinée au-dessous de l'horizontale, d'une quantité moindre que l'angle du frottement multiplié par le rapport de la densité de la culée à celle du massif.

Soit a une constante positive, l'inégalité précédente sera encore satisfaite si l'on pose

$$y' = f\frac{\varpi''}{\varpi}(x - a),$$

d'où

$$x = a + \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi''}y',$$

et même, si dans cette relation on remplace f par f'; mais cela ne sera pas nécessaire, puisque le poids des terres qui viendront s'appuyer sur le profil de la culée déterminera une pression verticale sensiblement égale au poids de la culée lorsque a sera une petite longueur, et que, par suite, le frottement limite fp se trouvera à peu près doublé.

Si nous supposons $\varpi'' = \varpi$, et que nous prenions avec M. Boistard $f = 0{,}76$, nous pourrons donner au profil une inclinaison de $37^\circ\,14'$ sur l'axe des x. Les bases supérieure et inférieure du trapèze qui forme les faces latérales de la partie des culées dont nous nous occupons, devraient excéder respectivement $\frac{y'_0}{0{,}76}$ et $\frac{y_1}{0{,}76}$ ou $0^m{,}854$ et $24^m{,}60$ environ; la largeur moyenne de ce trapèze serait donc plus grande que $12^m{,}73$.

Le frottement développé peut théoriquement prendre toute valeur nécessaire à la stabilité dans le cas actuel; mais, en pratique, il convient que la poussée horizontale exercée sur la culée reste inférieure à la cohésion des matériaux dont elle est formée, alors même que cette poussée serait inférieure au frottement théorique.

Soit $\varkappa$ la cohésion par unité superficielle, la condition d'équilibre relative à la cohésion serait exprimée par l'inégalité

$$\varkappa\lambda x > \frac{1}{2}\varpi\lambda\,(y'^2 - y_0'^2),$$

d'où, a' désignant une constante positive,

$$x - a' = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\varkappa}(y'^2 - y_0'^2).$$

Le profil fourni par cette considération est une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des x, et la concavité est dirigée vers les x positifs : cette parabole coupe l'horizontale menée par le sommet de l'extrados au point dont l'abscisse est a', puisque l'équation du profil est satisfaite par le système de valeurs $x = a'$, $y' = y'_0$. On pourrait aussi satisfaire à l'inégalité précédente en substituant dans l'équation de la parabole un coefficient $\varkappa' < \varkappa$ à la place de ce dernier.

Il faudrait, pour se conformer aux indications de quelques ingénieurs, employer celui des deux profils rectiligne et parabolique pour lequel l'abscisse x relative à la même valeur de y' est la plus grande.

Soit l l'excès de l'abscisse du profil rectiligne sur celle du profil parabolique pour une même ordonnée y', et posons

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{f}\frac{\varpi}{\varpi''}, \qquad \frac{1}{n} = \frac{\varpi}{\varkappa},$$

d'où

$$m = \frac{1}{f}\frac{\varkappa}{\varpi''};$$

on aura

$$l = a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} + \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right):$$

la quantité $a - a'$ étant arbitraire, nous pourrons, pour fixer les idées, la supposer assujettie à la condition

$$a - a' + \frac{y_0'^2}{2n} = 0,$$

et l'on aura simplement

$$l = \frac{y'}{n}\left(m - \frac{1}{2}y'\right).$$

Sous cette forme, on voit aisément que l'on aura d'abord $l = 0$ pour $y' = 0$; c'est-à-dire que les deux profils se couperont en un point de l'axe des x qui aura pour abscisse $x = a$. La différence l restera positive tant que l'on aura $y' < 2m$, et les deux profils se

couperont de nouveau au point dont l'ordonnée est $y' = 2m$; au delà, la quantité l deviendra négative, c'est-à-dire que le profil parabolique aura son abscisse plus grande que le profil rectiligne d'une quantité qui deviendra $\frac{y'_1}{n}\left(\frac{1}{2}y'_1 - m\right)$ au point le plus bas des deux profils.

Soient $\varpi = \varpi'' = 2440$ kil., $\varkappa = 10000$ kil., et, comme plus haut, $f = 0{,}76$; on aura $n = 4^{m},10$, $m = 5^{m},39$. Les deux profils se rencontreront au point dont l'ordonnée est $10^{m},78$; et, en observant que l'ordonnée y'_1 est $18^{m},74$, on trouvera que l'écart horizontal de ces profils s'élève jusqu'à $18^{m},19$. Cette grande différence tient au coefficient $\varkappa$ que nous avons lieu de croire beaucoup trop faible. (Dans les expériences relatives à la cohésion, les blocs sur lesquels on a expérimenté se détachaient en tournant autour d'une arête au lieu de glisser horizontalement sur leurs bases.) Il ne serait pas nécessaire de doubler le coefficient $\varkappa$ pour que les assises du profil parabolique deviennent toutes moindres que celles du profil rectiligne. Si l'on observe d'ailleurs que l'on n'a pas tenu compte de la butée des terres, on n'hésitera pas à adopter ce dernier profil dans toute l'étendue comprise entre les plans horizontaux dont les ordonnées sont y'_0 et y'_1.

Ayant admis, soit le profil rectiligne, soit le profil mixtiligne, déterminé à l'aide d'une valeur convenable de $\varkappa$, il ne serait pas sans intérêt de faire l'application de l'équation des moments à la portion de la culée limitée inférieurement par l'ordonnée quelconque y'. Pour cela, il faudrait supposer connue la loi de répartition des pressions dans le plan inférieur, admettre, comme Navier par exemple, qu'elles varient uniformément entre les limites de l'abscisse x, de sorte qu'en désignant par μ'' la hauteur qui représente la pression en un point du plan (y') dont ξ'' serait l'abscisse, on puisse poser

$$\mu'' = \mu''_0 + b\xi'' :$$

l'équation des moments, jointe à celle des projections verticales

des forces, servirait à déterminer les valeurs des constantes μ''_0 et b en fonction de y'. La quantité μ'', qui deviendrait fonction des deux variables indépendantes y' et ξ'', devrait être assujettie à ne point prendre de valeur négative, car ce serait supposer que l'on tient compte de la résistance à la rupture par traction; mais cette condition ne pourrait être vérifiée qu'*a posteriori*. Ajoutons encore qu'il ne paraît pas probable que les pressions varient dans l'étendue de couches horizontales formées de parties disjointes, commes elles varieraient dans l'étendue de la surface de joint de deux blocs uniques[1].

[1] Nous allons présenter ici la détermination des constantes μ''_0 et b de l'équation

$$\mu'' = \mu''_0 + b\,\xi'',$$

pour le cas du profil rectiligne.

Soit, pour abréger,

$$\frac{\varpi}{\varpi''} = i';$$

l'équation du profil rectiligne s'écrira

$$x = a + \frac{i'}{f} y',$$

et l'on aura

$$dy' = \frac{f}{i'}\,dx.$$

Formons l'équation d'équilibre des forces qui sollicitent la portion de la culée comprise entre les plans horizontaux (y'_0) et (y') projetées sur l'axe des y. Le poids d'une tranche horizontale d'épaisseur égale à dy' est

$$dp = \varpi''\lambda x\,dy' = \varpi''\lambda\frac{f}{i'}x\,dx.$$

La composante parallèle à l'axe des y de la réaction élémentaire exercée contre le plan (y') sur l'étendue $\lambda d\xi''$ est

$$-\varpi''\lambda\mu''\,d\xi'' = -\varpi''\lambda(\mu''_0 + b\,\xi'')\,d\xi''.$$

Intégrant ces deux expressions, la première entre les limites x_0 et x, la seconde entre les limites $\xi'' = 0$ et $\xi'' = x$, puis égalant la somme des deux intégrales à zéro, il vient

$$\frac{f}{2i'}(x^2 - x_0^2) - \mu''_0 x - \frac{1}{2} b\,x^2 = 0.$$

Prenons actuellement les moments autour d'un axe passant par le point M (voir

On pourrait encore faire un autre usage de l'équation des moments. Considérons l'équilibre de la partie de la culée qui est

la figure), afin d'éliminer ceux des forces horizontales développées dans le plan inférieur. Le moment élémentaire de dp, dans le sens de x vers y, est

$$\frac{\varpi''\lambda f}{2i'}x^2dx,$$

celui de la composante parallèle à l'axe des y de la réaction élémentaire développée dans le plan (y') est d'ailleurs

$$-\varpi''\lambda(\mu''_0\xi''+b\xi''^2)d\xi''.$$

Quant au moment élémentaire de la poussée horizontale exercée par le massif contre la culée, soit v l'ordonnée variable du point d'application, on aura pour expression du moment de la poussée élémentaire $\varpi\lambda v dv$, autour de M,

$$\varpi\lambda(y'-v)v\,dv,$$

quantité qui doit être intégrée entre les limites y'_0 et y'.

Effectuant entre leurs limites respectives les intégrations des trois expressions précédentes, et égalant la somme à zéro, il vient

$$\frac{f}{6i'}(x^3-x_0^3)-\frac{\mu''_0}{2}x^2-\frac{b}{3}x^3+\frac{i'}{6}(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3)=0.$$

Cette équation, jointe à celle des forces verticales, donne d'abord

$$-2\mu''_0x^2-bx^3=-\frac{f}{i'}x^3+\frac{f}{i'}xx_0^2,$$

$$+3\mu''_0x^2+2bx^3=+\frac{f}{i'}x^3-\frac{f}{i'}x_0x_0^2+i'(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3).$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$x^2(\mu''_0+bx)=\frac{f}{i'}x_0^2(x-x_0)+i'(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3).$$

Soit

$$\mu''_x=\mu''_0+bx,$$

en sorte que μ''_x représente la pression qui a lieu aux points du plan (y') où celui-ci est limité par le profil de la culée, on aura

$$\mu''_x=\frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(x-x_0)+\frac{i'}{x^2}(y'^3-3y'y_0'^2+2y_0'^3);$$

limitée inférieurement par le plan (y'). Les forces qui sollicitent cette partie de la culée sont : 1° son propre poids augmenté de

les équations précédentes fournissent aisément les valeurs séparées de μ''_0 et b:

$$\mu''_0 = \frac{f}{i'}x - \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}(2x - x_0) - \frac{i'}{x^2}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3),$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\frac{x_0^2}{x^2}\left(\frac{3x - 2x_0}{x}\right) + \frac{2i'}{x^3}(y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3).$$

Il convient d'exprimer les valeurs de x et x_0 en fonction de y' et y'_0. Or, si nous posons

$$c = \frac{f}{i'}a,$$

nous aurons

$$x = \frac{i'}{f}(y' + c),$$

d'où

$$x_0 = \frac{i'}{f}(y'_0 + c);$$

à l'aide de ces valeurs, il viendra

$$\mu''_x = \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (y' - y'_0) + \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$\mu''_0 = y' + c - \left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 (2y' - y'_0 + c) - \frac{f^2}{i'}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^2},$$

$$b = -\frac{f}{i'} + \frac{f}{i'}\left(\frac{y'_0 + c}{y' + c}\right)^2 \frac{(3y' - 2y'_0 + c)}{y' + c} + 2\frac{f^3}{i'^2}\frac{y'^3 - 3y'y_0'^2 + 2y_0'^3}{(y' + c)^3}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $i' = 1$, et que les quantités y'_0 et c soient nulles, le profil de la culée sera triangulaire et passera par l'origine des coordonnées; alors les formules précédentes donneront

$$\mu''_x = f^2 y', \qquad \mu''_0 = (1 - f^2)y' :$$

dans le cas de $f = \frac{2}{3}$, ces valeurs deviendront, à cause de $y'_0 = 0$ et $c = 0$,

$$\mu''_x = \frac{4}{9}y', \qquad \mu''_0 = \frac{5}{9}y'.$$

La comparaison de ces nombres montre que les pressions varieraient seulement de deux neuvièmes de leur valeur moyenne dans l'étendue d'un même plan horizontal. De cette manière, il y a lieu de croire que l'hypothèse de la variation uniforme des pressions ne serait pas très-éloignée de se réaliser. En prenant $f = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$, on trouverait $b = 0$; d'où $\mu'' = \frac{1}{2}y'$, quantité constante avec y'.

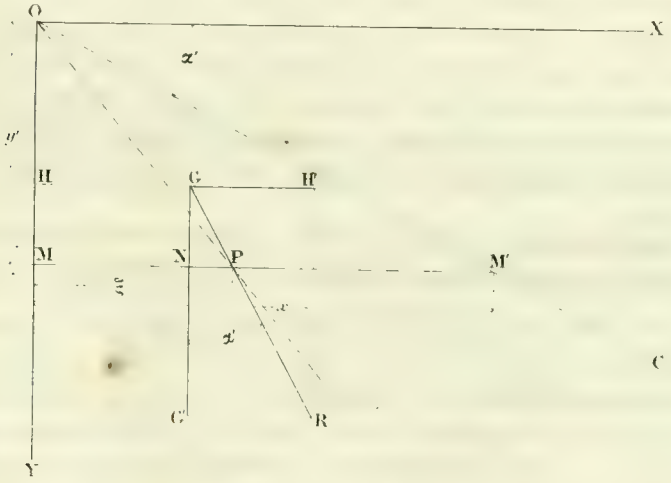
la charge qui peut agir supérieurement; 2° la poussée horizontale exercée par le massif; 3° les réactions qui se développent contre le plan (y'). Les composantes horizontales et verticales des premières forces sont connues, et donnent par un simple changement de signe les valeurs des composantes des réactions dans le plan (y'). Les moments des premières forces sont pareillement connus, en sorte que, si l'on substitue dans l'équation des moments les composantes connues de la résultante des réactions contre le plan (y'), cette équation ne contiendra d'autres inconnues que les coordonnées du point d'application de la résultante des réactions.

Soient ξ et η ces coordonnées, l'équation des moments présentera une relation entre ξ, η et y' qui n'est autre chose que l'équation de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions. La direction de cette résultante dépend de la valeur de y' que l'on considère, de sorte que, pour chaque valeur de y', on aura une droite particulière. Si l'on suppose construites les diverses droites qui répondent à toutes les valeurs possibles de y', les intersections deux à deux des droites consécutives détermineront leur *courbe enveloppe*. Pour obtenir l'équation de cette courbe, il suffira, suivant la théorie connue des *courbes enveloppes*, d'éliminer y' entre l'équation des moments et sa dérivée par rapport à la même quantité y'.

Si l'on fait $\eta = y'$ dans l'équation des moments ou de la droite suivant laquelle agit la résultante des réactions, cette équation fournira l'abscisse ξ du point d'application de la résultante dans le plan (y'). L'équation que l'on obtiendra ainsi entre ξ et η est celle du lieu géométrique des points de rencontre des résultantes des réactions exercées sur les divers plans (y') avec ces mêmes plans. Cette courbe est celle que l'on nomme *courbe des pressions*. La direction de la résultante s'obtiendrait en tirant de l'équation entre ξ, η et y' le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$ qui est égal à la tangente de l'angle formé par la résultante avec l'axe des x, et compté de x vers y. On aurait encore cette direction en menant par le point de rencontre avec le plan (y') une tangente à la *courbe enveloppe*.

Au lieu de développer l'analyse qui vient d'être indiquée, nous nous bornerons à présenter la détermination de la direction de la résultante des pressions et la construction de la *courbe des pressions*, dans le cas très-simple où le massif et la culée ayant la même densité, le profil extérieur de celle-ci est rectiligne, et aboutit dans sa partie supérieure à l'origine des coordonnées, la poussée exercée par le massif étant supposée, contrairement à ce que nous avons admis jusqu'ici, commencer à se produire en ce point.

Nous aurons recours à des considérations très-élémentaires de statique et de géométrie, et quoique les données actuelles soient sensiblement différentes des données primitives, le résultat sera cependant de nature à faire entrevoir ce qui devrait se passer s'il s'agissait de celles-ci.



Soient OC le profil rectiligne de la culée faisant avec l'horizontale l'angle α' (*); y' l'ordonnée d'un plan horizontal MM'; G le centre de gravité du triangle OMM' dont l'ordonnée est $\frac{2}{3}y'$; H le

(*) Cet angle ne doit pas être confondu avec l'auxiliaire α' des n^os^ 36 et suivants.

point d'application de la poussée horizontale exercée par le massif et dont l'ordonnée est aussi $\frac{2}{3}y'$, en vertu de l'hypothèse de la fluidité.

Le poids de la partie supérieure de la culée limitée au plan MM' est $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'x$, la résultante des pressions horizontales produites sur cette partie par le massif est simplement $\frac{1}{2}\varpi\lambda y'^2$. D'après ce qui vient d'être dit, ces forces concourent au point G, et la direction de leur résultante s'obtiendra en menant par ce point deux droites, l'une verticale, l'autre horizontale, respectivement proportionnelles aux intensités de ces forces, ou aux coordonnées x et y', et achevant le parallélogramme qui se résout ici en le rectangle G'GH'R. De cette manière, le triangle G'GR que l'on obtiendra sera semblable au triangle MM'O; l'angle G'GR sera égal à l'angle MM'O et aussi à l'angle M'OX que fait le profil avec l'horizontale. Il s'ensuit que la direction GR de la résultante des réactions est constante pour les divers plans horizontaux MM', et que cette direction fait avec la verticale un angle égal à celui du profil avec l'horizon. On voit déjà que la condition d'équilibre relative au frottement est que ce dernier angle soit moindre que *l'angle du frottement*.

Soit ξ l'abscisse du point P où la résultante des réactions rencontre le plan MM'; l'angle G'GR étant égal à COX ou α', on aura

$$\xi = \overline{\mathrm{MN}} + \overline{\mathrm{NP}} = \overline{\mathrm{HG}} + \overline{\mathrm{NG}}\,\mathrm{tang}\alpha',$$

ou, à cause de $\overline{\mathrm{HG}} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}x$, et $\overline{\mathrm{NG}} = \frac{1}{3}y'$,

$$\xi = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y'\,\mathrm{tang}\,\alpha'.$$

Exprimons d'abord ξ en fonction de x : en vertu de

$$y' = x\,\mathrm{tang}\alpha',$$

il viendra

$$\xi = \frac{1}{3\cos^2\alpha'}x.$$

Si l'on suppose α' égal à l'angle du frottement, et que l'on prenne, comme quelques auteurs, $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{2}{3}$, on aura $\xi = \frac{13}{27}x$: la résultante des pressions passera, comme on le voit, très-près du milieu de la base MM'; pour qu'elle passât exactement au milieu, il faudrait que l'on eût $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$ ou $\alpha' = 35^\circ\,15'\,52''$. Cette valeur de $\operatorname{tang}\alpha'$ est presque la moyenne exacte entre le coefficient $\frac{2}{3}$ et le coefficient 0,76 indiqué par M. Boistard.

En éliminant x entre les deux dernières équations, et changeant ensuite y' en η, nous aurons pour équation de la *courbe des pressions*,

$$\xi = \frac{2}{3\sin 2\alpha'}\eta,$$

ou

$$\eta = \frac{3}{2}\sin 2\alpha'\,\xi.$$

Cette équation montre que la courbe des pressions se réduit ici à une ligne droite passant par l'origine et inclinée sur l'axe des x d'une quantité égale à $\frac{3}{2}\sin 2\alpha'$; c'est la droite OP de la figure. Son inclinaison serait égale à $\frac{18}{13}$ dans le cas de $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{2}{3}$, et à $\sqrt{2}$ dans le cas de $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans cette dernière hypothèse, la droite OP se confondrait avec la direction PR des pressions.

Généralement, les directions PR menées par les divers points P étant toutes parallèles, n'ont pas de *courbe enveloppe*, ou du moins une telle courbe doit se réduire à une droite parallèle à PR, dont on ne considérerait que les points situés à l'infini.

Nous terminerons cette digression en faisant remarquer que l'établissement de la culée d'une arche *complète* serait entièrement fixé d'après ce que nous venons d'exposer, si le plan horizontal passant par le point inférieur de l'extrados, contre lequel s'appuie le dessus de la culée, présentait une résistance indéfinie; si, par

exemple, le roc vif affleurait à ce niveau. Dans le cas contraire, il y aura à considérer une autre portion de la culée sollicitée par des forces connues qui sont : 1° les actions qu'exerce la partie de la culée que nous venons d'étudier; 2° la force de direction presque verticale T_1 que nous avons calculée précédemment; et sollicitée en outre par les forces inconnues qui proviennent, tant du propre poids de la construction, que des réactions du sol et des actions fortuites ou accidentelles, lorsqu'on en voudra tenir compte.

EXAMEN RAPIDE ET SUCCINCT DE QUELQUES ARCHES DE PONTS DÉCRITES DANS LES OUVRAGES DE PERRONET ET GAUTHEY.

50. Dans les numéros précédents, nous avons présenté avec les plus grands détails l'ensemble des calculs à effectuer pour fixer définitivement les formes et dimensions d'une arche projetée, ainsi que les poussées auxquelles l'arche devra donner naissance dans son état normal. Nous nous abstiendrons d'entrer ici dans ces détails : examinant diverses arches décrites dans les ouvrages de Perronet et Gauthey, nous prendrons, soit dans le texte, soit dans les figures qui l'accompagnent, les dimensions principales de ces arches. La quantité h qui suppose la construction terminée supérieurement par un plan horizontal, tandis que le profil du pavé et des trottoirs est loin d'être rectiligne, ne peut être estimée qu'en remplaçant ce profil par une droite horizontale disposée de manière à ne pas changer la superficie de la section. Le plus souvent les données nécessaires ayant manqué, nous avons supposé h très-voisin de $0^m,65$. L'incertitude qui affecte cette quantité affecte également les ordonnées Y_0 et Y_1, mais leur différence f en est exempte.

Partant des données spéciales à chaque cas, nous nous proposerons de déterminer les constantes principales à l'aide de nos Tables, comme s'il s'agissait de faire un avant-projet. Nous suivrons dans ces calculs la marche tracée au n° 45. La comparaison des valeurs trouvées avec celles adoptées pourra donner lieu à une

courte critique : et, en ce qui concerne les arches *en anse de panier*, nous espérons que le rapprochement des résultats auxquels l'examen de chaque arche en particulier nous aura conduit, pourra jeter quelque lumière sur la question des limites qu'il convient d'assigner au surbaissement des arches de cette espèce.

ARCHES INCOMPLÈTES, DITES *EN ARC DE CERCLE*.

Pont de Valence, sur le Guadalaviar.

Cet ouvrage, dit Gauthey, est composé de dix arches de 13 mètres d'ouverture, dont la flèche est à peine de $1^{m},3$. En l'absence d'autres données, nous supposerons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^{m},69$, et nous admettrons que les matériaux dont on a pu disposer présentent une résistance au moins égale à celle des pierres de Saillancourt 2e qualité, dont le $\frac{1}{10}$ est $42^{m},9$. Les données seront ainsi :

$$g = 6^{m},50; \quad f = 1^{m},30; \quad Y_0 = 1^{m},69; \quad \mu_1 = 42^{m},9,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 5,00; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

Avec ces deux derniers nombres, la Table I donne $\frac{Q^2}{f^2} = 18,961$, et l'on en déduit (valeur approchée) $Q^2 = 32,044$. On trouve ensuite par la formule (i), $\mu_0 = 41^{m},551$, et, par la formule (ii) (valeur approchée), $c = 0^{m},793$. On tire ensuite de la Table II, $\frac{\delta(Q^2)}{c^2} = 0,3482$, d'où

$$\delta(Q^2) = 0,219$$

puis

$$Q^2 = 32,263.$$

Par la formule (v), il vient $h'' = 1^{m},684$; et, en reprenant le calcul de c par la formule (ii) à l'aide des valeurs corrigées, on trouve

finalement $e = 0^m,7986$. La valeur $h = 0^m,885$ qui en résulte n'est pas trop faible. Cette quantité pouvant, en pratique, recevoir une moindre valeur, on en conclut que le pont de Valence aurait pu être construit avec des matériaux moins résistants que nous ne l'avons supposé : les épaisseurs auraient alors reçu un accroissement égal à la réduction de l'ordonnée h.

Pont de Pont-Sainte-Maxence, sur l'Oise.

Ce pont, construit par Perronet, est formé de trois arches de $23^m,39$ d'ouverture et $2^m,09$ de flèche; l'épaisseur des voûtes au sommet est de $1^m,46$. Aux parements extérieurs, les voussoirs se prolongent jusqu'au plan horizontal tangent à l'extrados : nous ferons abstraction de cette particularité. Les piles, au lieu d'être pleines comme d'ordinaire, consistent en quatre colonnes de $2^m,923$ de diamètre, groupées par deux aux extrémités de chaque pile, de manière qu'il existe entre les colonnes intérieures un espace égal au diamètre de ces colonnes : en outre, les plans des têtes passent par les axes des colonnes extrêmes, de telle sorte que les moitiés extérieures des mêmes colonnes servent d'avant-becs et d'arrière-becs. La distance d'une tête à l'autre ou la largeur du pont est de $12^m,667$. D'après les dessins de Perronet, on peut admettre que l'ordonnée du sommet de l'intrados est égale à la flèche. Nous admettrons, en outre, que la hauteur h ait été fixée à $0^m,65$. Les matériaux employés dans la construction des voûtes sont les pierres de Saillancourt, et des pierres des environs de Pont-Sainte-Maxence, qui ont présenté à l'essai une résistance environ quatre fois plus grande que celles de Saillancourt.

Les données sont ainsi :

$$g = 11^m,695;\ f = 2^m,09;\ Y_0 = 2^m,09;\ h = 0^m,65;\ \lambda = 12^m,667,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 5,60;\quad \frac{Y_0}{f} = 1,0.$$

Avec ces deux nombres, on tire de la Table I : $\frac{Q'}{f^2} = 18,6935$,

d'où (valeur approchée) $Q^2 = 81{,}656$. Les formules (o) et (III) donnent (valeur approchée) $e = 1^m{,}44$, et l'on a, par la Table II, $\frac{\delta(Q^2)}{e^2} = 0{,}3422$, d'où

$$\delta(Q^2) = 0{,}710$$

puis

$$Q^2 = 82{,}366.$$

Par la formule (V), on a ensuite

$$h'' = 2^m{,}0813,$$

d'où

$$e = 1^m{,}4313.$$

Actuellement les formules (IV) donnent

$$\mu_0 = 58^m{,}674; \qquad \mu_1 = 60^m{,}838.$$

On aurait pour épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 1^m{,}44$, quantité qui diffère seulement de 2 centimètres de celle adoptée par Perronet. Au reste, ce rapprochement tient uniquement au choix que nous avons fait des données Y_0 et h. Quant à la valeur de μ_1, on voit qu'elle est environ $\frac{1}{9{,}5}$ de la résistance absolue 581 mètres des pierres de Saillancourt 1re qualité, et environ $\frac{1}{38}$ de la résistance de celles de Pont-Sainte-Maxence, d'après ce qui a été dit plus haut. Il est facile d'en conclure que si nous avions pris pour donnée $\mu_1 = 58^m{,}1$ à la place de h, nous aurions obtenu une valeur de e un peu plus faible et une valeur de h d'autant plus forte.

Déterminons maintenant la limite inférieure de l'épaisseur des piles. Pour cela nous aurons d'abord, par la première équation (XII),

$$q^2 = 167{,}960,$$

puis ensuite, par les formules (XIV),

$$y''_1 = 4^m,1641; \quad \alpha_1 = 23^\circ\,1'.$$

On en déduit pour la largeur minimum $2e\sin\alpha_1$ à donner aux piles en leur partie supérieure, $2e\sin\alpha_1 = 1^m,119$. La charge que supportent les piles en cette partie est représentée par μ_1; si l'on veut que les piles ne soient pas plus chargées à leur base, il faudra à très-peu près augmenter leur largeur d'une fraction égale au rapport de la hauteur des piles à la quantité μ_1; or cette hauteur étant de $5^m,846$, il faudrait augmenter la largeur ci-dessus de la fraction $\frac{5,846}{60,838} = 0,096$, ou de $0^m,107$, ce qui porterait la limite inférieure de la largeur des piles à $1^m,226$, et la limite inférieure de la section horizontale à $1^m,226.\lambda$ ou $15^{m.q},53$. Pour comparer cette section à celle réalisée par Perronet, nous pourrons réduire à trois le nombre des colonnes qui supportent le poids des arches, à cause de la situation des colonnes extrêmes; de cette manière, la somme des sections horizontales sera $3\frac{\pi}{4}(2,923)^2 = 20^{m.q},13$. En comparant ce nombre à la limite théorique $15^{m.q},53$, on voit que le célèbre ingénieur ne s'en est écarté que de la fraction 0,296 ou environ trois dixièmes. A vrai dire, les colonnes qui servent de piles supportent une charge verticale un peu moindre que μ_1, attendu que le poids des voûtes a été diminué au moyen de *lunettes* pratiquées dans le sens de la longueur du pont. Quoi qu'il en soit, on peut conclure, de la comparaison que nous venons de faire, qu'il serait suffisant d'augmenter de $\frac{1}{3}$ la largeur limite $2e\sin\alpha_1$ des piles, lorsqu'il s'agira d'établir des ponts dans des conditions comparables à celles que présente celui de Pont-Sainte-Maxence.

Pont de Mirepoix, sur le Lers.

Ce pont est formé de sept arches de $19^m,5$ d'ouverture et de $2^m,612$ de flèche. Les autres données nous manquant, nous sup-

poserons l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,5672$, et nous admettrons que les matériaux présentent une résistance au moins égale à celle de la pierre de Saillancourt 2e qualité. En fixant la limite des charges au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue, nous aurons le système de données suivant :

$$g = 9^m,75; \quad f = 2^m,612; \quad Y_0 = 1^m,5672; \quad \mu_1 = 42^m,9,$$

d'où $\frac{g}{f} = 3,7328; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6.$

En procédant comme dans le premier exemple, on trouvera

$$\mu_0 = 40^m,164; \quad h'' = 1^m,5607; \quad e = 0^m,9835;$$
$$h = 0^m,5772; \quad Q^2 = 38,610.$$

L'épaisseur e pourra paraître un peu forte, et la charge h un peu faible; pour diminuer la première et augmenter la seconde, il suffirait de faire μ_1 un peu plus fort (50 mètres par exemple).

Pont de Homps, sur l'Aude.

Ce pont, construit par M. Ducros, se compose de trois arches de $21^m,4$ d'ouverture et de $2^m,87$ de flèche. (Nous n'aurons point égard aux petites *cornes de vache* que l'on a pratiquées dans le voisinage des têtes.) Nous compléterons les données précédentes par des nombres supposés. Soient donc

$$g = 10^m,70; \quad f = 2^m,87; \quad Y_0 = 1^m,722; \quad h = 0^m,652,$$

d'où $\frac{g}{f} = 3,7282; \quad \frac{Y_0}{f} = 0,6;$

on trouvera, en procédant comme dans le deuxième exemple :

$$Q^2 = 46,508; \quad h'' = 1^m,7149; \quad e = 1^m,0629;$$
$$\mu_0 = 44^m,762; \quad \mu_1 = 47^m,766.$$

La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{9}$ environ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 2^e qualité, et se trouve au-dessous de $\frac{1}{12}$ de celle qui se rapporte à la 1re qualité.

Pont de Pesmes, sur l'Ognon.

Ce pont, construit par M. Bertrand, est composé de trois arches de 13^m,64 d'ouverture et de 1^m,19 de flèche; l'épaisseur à la clef adoptée dans la construction est de 1^m,19, égale à la flèche. Comme dans les exemples précédents, nous joindrons à ces nombres des données hypothétiques; nous partirons des données suivantes :

$$g = 6^m,82; \quad f = 1^m,19; \quad Y_0 = 1^m,547; \quad h = 0^m,647,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 5,731; \quad \frac{Y_0}{f} = 1,3;$$

puis, en suivant la même marche que précédemment,

$$Q^2 = 35,216; \quad h'' = 1^m,5411; \quad e = 0^m,8941;$$

$$\mu_0 = 40^m,332; \quad \mu_1 = 41^m,564.$$

L'épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 0^m,9$ qu'on en déduit est moindre de 0^m,29 que celle adoptée dans la construction, et cependant la valeur de μ_1 est inférieure au $\frac{1}{10}$ de la hauteur qui représente la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2^e qualité et de Conflans.

Pont Fouchards, sur le Thouet, à Saumur.

Ce pont, construit sur le projet de M. de Limay, est formé de trois arches de 25^m,99 d'ouverture et de 2^m,635 de flèche. Nous supposerons les données qui nous manquent. Soient

$$g = 12^m,995; \quad f = 2^m,635; \quad Y_0 = 1^m,8445; \quad \mu_1 = 62^m,5$$

(la valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue de la roche douce de Bagneux); on aura d'abord

$$\frac{g}{f} = 4{,}9316; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}7;$$

puis, pour résultat final des calculs,

$$Q^2 = 75{,}409; \qquad e = 1^m{,}2827; \qquad h'' = 1^m{,}8379;$$
$$h = 0^m{,}5552; \qquad \mu_0 = 59^m{,}772.$$

On pourrait faire ici les mêmes remarques qu'à l'occasion du pont de Mirepoix.

Pont de Saint-Diez, sur la Meurthe.

Ce pont, construit sur les dessins de M. Lecreulx, se compose de trois arches de 12 mètres d'ouverture sur 1 mètre de flèche, et de deux petites arches latérales en plein cintre de 4 mètres d'ouverture. Nous ne nous occuperons que des premières. Les données étant encore incomplètes, nous admettrons les suivantes:

$$g = 6^m{,}0; \qquad f = 1^m{,}0; \qquad Y_0 = 1^m{,}3; \qquad h = 0^m{,}65,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 6{,}0; \qquad \frac{Y_0}{f} = 1{,}3.$$

Le calcul conduit aux résultats que voici:

$$Q^2 = 27{,}112; \qquad h'' = 1^m{,}2966; \qquad e = 0^m{,}6466;$$
$$\mu_0 = 42^m{,}795; \qquad \mu_1 = 43^m{,}823.$$

La valeur de μ_1 répond à peu près à $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres fermes de Conflans.

Pont de Brunoy, sur l'Hyères.

Ce pont a été construit sur les dessins de Perronet; il se compose de trois arches de $5^m{,}846$ d'ouverture et de $0^m{,}783$ de

flèche. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $0^m,65$; l'ordonnée du sommet de l'intrados peut être évaluée à 1 mètre et quelques centimètres. Nous prendrons cette ordonnée égale à $1^m,0179$, et la hauteur h égale à $0^m,50$; en sorte que les données seront

$$g = 2^m,923; \quad f = 0^m,783; \quad Y_0 = 1^m,0179; \quad h = 0^m,50.$$

d'où $$\frac{g}{f} = 3,7331; \qquad \frac{Y_0}{f} = 1,3.$$

On en déduit, par le calcul :

$$Q^2 = 6,784; \quad h'' = 1^m,0112; \quad e = 0^m,5112;$$
$$\mu_0 = 13^m,941; \quad \mu_1 = 14^m,777,$$

puis l'épaisseur réelle à la clef $\varepsilon_0 = 0^m,5179$, quantité moindre de $0^m,132$ que celle adoptée par Perronet. La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{8,7}$ de la résistance absolue de la lambourde de qualité inférieure, et à $\frac{1}{22}$ de celle de la pierre tendre employée à Paris.

Pont de Rosoi, sur l'Hyères.

Ce pont a été construit, comme le précédent, sur les dessins de Perronet; il est formé de deux arches de $7^m,80$ d'ouverture et de $0^m,975$ de flèche; l'ordonnée du sommet de l'intrados est de $1^m,25$ à $1^m,30$, d'après les dessins de Perronet; l'épaisseur des voûtes à la clef a été faite de $0^m,812$, et les voussoirs sont en grès très-dur. Au lieu de supposer que l'on ait à sa disposition des matériaux aussi résistants, nous admettrons que les matériaux ne présentent pas plus de résistance que le mortier ordinaire. En prenant le $\frac{1}{10}$ seulement de la résistance absolue représentée par 219 mètres, et supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m,2675$, nous aurons pour données

$$g = 3^m,90; \quad f = 0^m,975; \quad Y_0 = 1^m,2675; \quad \mu_1 = 21^m,9,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 4{,}00; \qquad \frac{Y_0}{f} = 1{,}3.$$

On déduit de ces nombres:

$$Q^2 = 11{,}922; \qquad e = 0^m{,}5960; \qquad h'' = 1^m{,}2613;$$
$$h = 0^m{,}6653; \qquad \mu_0 = 20^m{,}870.$$

L'épaisseur réelle à la clef est $\varepsilon_0 = 0^m{,}6022$: elle est moindre que celle adoptée par Perronet de $0^m{,}21$, et cependant la plus grande valeur de μ est extrêmement faible. La construction, réalisée avec des matériaux beaucoup plus résistants que nous ne l'avons supposé, présenterait donc une très-grande stabilité. La hauteur h est, du reste, très-admissible dans la pratique.

Pont de la Concorde, à Paris.

Ce pont, construit sur les dessins de Perronet, se compose de cinq arches d'ouvertures et de flèches inégales : la chaussée est disposée en pentes qui s'étendent seulement aux quatre arches latérales; elle est de niveau dans le sens de la longueur sur l'arche du milieu seulement. Il est facile de reconnaître qu'il était impossible de substituer au projet de Perronet celui d'un pont horizontal formé de cinq arches égales, sans élever le niveau des abords ou abaisser celui des naissances d'au moins 50 à 60 centimètres. Nous nous occuperons seulement de l'arche du milieu, qui a $28^m{,}6$ d'ouverture et $2^m{,}99$ de flèche, et à laquelle on a donné $1^m{,}14$ d'épaisseur à la clef : supposant l'ordonnée du sommet de l'intrados égale à $1^m{,}794$, et la charge h égale à $0^m{,}65$, nous aurons les données suivantes :

$$g = 14^m{,}30; \qquad f = 2^m{,}99; \qquad Y_0 = 1^m{,}794; \qquad h = 0^m{,}65,$$

d'où $$\frac{g}{f} = 4{,}7827; \qquad \frac{Y_0}{f} = 0{,}6.$$

A l'aide de ces nombres et des précédents, on trouve la solution

$$Q^2 = 80{,}435; \quad h'' = 1^m{,}7891; \quad e = 1^m{,}1391;$$
$$\mu_0 = 71^m{,}642; \quad \mu_1 = 74^m{,}723;$$

l'épaisseur réelle à la clef s'en déduit $\varepsilon_0 = 1^m{,}144$. Cette dimension coïncide à peu près avec celle adoptée par Perronet. Quant à la valeur de μ_1, elle répond à $\frac{1}{7{,}8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt, que l'on a employées dans la construction.

ARCHES COMPLÈTES, DITES *EN ANSE DE PANIER*.

Pont de Nogent, sur la Seine.

Ce pont, construit par Perronet, se compose d'une seule arche de $29^m{,}24$ d'ouverture et de $8^m{,}77$ de flèche, dont la voûte est construite en grès très-dur : malgré les rampes légèrement inclinées qui conduisent au milieu, nous procéderons comme si la chaussée était exactement horizontale dans le sens de la longueur du pont. En ajoutant aux données précédentes la charge $h = 0^m{,}65$ prise hypothétiquement, les données seront

$$g = 14^m{,}62; \quad f = 8^m{,}77; \quad h = 0^m{,}65.$$

En suivant la marche indiquée n° 45, nous aurons d'abord

$$\frac{g}{f} = 1{,}6671,$$

quantité qui répond sensiblement à un surbaissement de $\frac{3}{10}$. On tire ensuite de la Table III, relativement à la valeur de $\frac{g}{f}$,

$$\frac{f}{Y_1} = 0{,}81006, \quad \text{d'où } Y_1 = 10^m{,}826;$$

et les équations (x) donnent : $h'' = 2^m{,}0443$, $e = 1^m{,}3943$; puis il vient, par les équations (xi), $\mu_0 = 42^m{,}112$; $\mu_1 = 51^m{,}776$;

et l'équation (XXIII) donne, pour la superficie du profil de la demi-arche et de la partie correspondante du massif, $\frac{V}{\lambda} = e\mu_1 = 72^{m.q},192$.

La charge représentée par μ_1 est un peu faible, puisque les voussoirs ont été faits de grès très-dur; l'épaisseur est d'ailleurs peu différente de celle adoptée dans la construction, qui est de $1^m,60$ pour les voussoirs des têtes, et de $1^m,30$ pour les voussoirs intermédiaires. On eût pu diminuer l'épaisseur des voussoirs sans exagérer la charge μ_1, en diminuant la flèche et élevant d'autant les naissances, afin que le sommet de l'intrados restât au même niveau. La diminution de l'épaisseur aurait ainsi permis de réduire l'inclinaison des rampes.

En effet, soit $f = 8^m,44$, ce qui revient à diminuer la flèche de $0^m,33$, et, tout en conservant la même valeur de g, portons la valeur de μ_1 à $58^m,1$ ou au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité, les données seront

$$g = 14^m,62; \quad f = 8^m,44; \quad \mu_1 = 58^m,1,$$

d'où

$$\frac{g}{f} = 1,7322.$$

On aura, par la Table III,

$$\frac{f}{Y_1} = 0,83265, \quad \text{puis } Y_1 = 10^m,136.$$

Les équations (VIII), en ayant égard à la première équation (VII), donneront $\mu_0 = 48^m,990$; $e = 1^m,0481$; et il viendra, par les formules (IX), $h'' = 1^m,6901$; $h = 0^m,6420$; puis, par l'équation (XXIII), $\frac{V}{\lambda} = 60^{m.q},894$. [La formule (IX *bis*) donnerait plus exactement $e = 1^m,0482$; on voit que la deuxième équation (VIII) est suffisamment approchée.]

Ces nombres, comparés à ceux qui résultent des données primitives, présentent une réduction de $0^m,346$ sur les épaisseurs,

ou de près de $\frac{1}{4}$ sur les premières. La surface du profil de la voûte et du massif serait réduite de plus de $\frac{1}{7}$: il est vrai de dire que les culées devraient être élevées de $0^m,33$ de plus que dans la première solution; mais l'élévation des naissances faciliterait le débouché. La solution que nous présentons ici eût donc offert des avantages marqués sur celle adoptée par l'illustre constructeur de nos plus beaux ponts.

Pont de Mantes, sur la Seine.

La chaussée de ce pont formé de trois arches inégales, est disposée en rampes des deux côtés à partir du milieu; la pente est de $\frac{1}{72}$. Nous ferons abstraction de cette pente, et nous ne nous occuperons d'abord que de l'arche du milieu, dont l'ouverture et la flèche sont respectivement $38^m,98$ et $11^m,37$: la charge h peut être estimée approximativement à $0^m,74$. Les données sont ainsi:

$$g = 19^m,49; \qquad f = 11^m,37; \qquad h = 0^m,74;$$

d'où $\frac{g}{f} = 1,7142$, et, par la Table III, $Y_1 = 13^m,753$. En procédant comme dans l'exemple précédent, on trouve

$$h'' = 2^m,3714; \qquad e = 1^m,6314; \qquad \mu_0 = 58^m,075;$$
$$\mu_1 = 70^m,498; \qquad \frac{V}{\lambda} = 115^{m.q},01.$$

Les pierres employées à la construction des voûtes du pont de Mantes sont celles de Saillancourt, dont la résistance absolue est représentée par 581 mètres. La valeur de μ_0 coïncide avec le dixième de cette dernière quantité, tandis que celle de μ_1 s'en écarte notablement : elle répond en effet à $\frac{1}{8}$ environ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt. Si, à l'exemple de beaucoup d'ingénieurs, on n'a égard qu'à la pression au sommet, on trouvera que la pierre employée présente une suffisante résis-

tance. Cela est du reste assez admissible, puisque c'est au sommet que les pressions varient le plus par l'action des surcharges accidentelles, et que ces dernières ne produisent que peu d'effet sur les voussoirs inférieurs : si donc les voussoirs peuvent résister à la charge μ_0 au sommet de la voûte, et en outre à l'action des surcharges, il est vraisemblable qu'ils résisteront encore à la charge μ_1 qui a lieu dans les plans des naissances, augmentée de ses très-faibles variations. Quoi qu'il en soit, il serait évidemment préférable d'employer de la pierre plus résistante.

L'épaisseur adoptée dans la construction est de $1^m,949$; mais Perronet avoue qu'on aurait pu la réduire à 5 pieds ou $1^m,624$, nombre qui coïncide à très-peu près avec la valeur $\varepsilon_0 = 1^m,6431$ que fournit notre solution. On doit remarquer que cette réduction de l'épaisseur à la clef eût permis de diminuer la pente longitudinale de la chaussée.

Actuellement nous allons examiner s'il n'eût pas été possible, sans élever les abords, de construire un pont horizontal formé de trois arches égales ayant leurs naissances au niveau de l'étiage. (Les naissances dans la construction sont à $0^m,974$ au-dessous de l'étiage.)

Les arches latérales ont $35^m,07$ d'ouverture, et les piles ont $7^m,80$ de largeur : en ajoutant au premier de ces nombres la demi-ouverture $19^m,49$ de l'arche du milieu, on a pour la demi-longueur du débouché $54^m,56$, dont le tiers donne, pour la demi-ouverture d'arches égales, $g = 18^m,1867$. La demi-longueur du pont s'obtiendra en ajoutant la largeur d'une pile à la demi-longueur du débouché, ce qui donnera $62^m,36$, et pour la pente de la chaussée, $\frac{1}{72}\,62^m,36 = 0^m,866$. La hauteur du sommet de la chaussée au-dessus du plan des naissances est égale à la longueur formée par la flèche de l'arche du milieu, l'épaisseur adoptée dans la construction et la hauteur que nous supposons équivalente à $0^m,74$: en déduisant de cette somme la pente $0^m,866$, et la profondeur $0^m,974$ à laquelle les naissances ont été placées au-dessous de l'étiage, nous aurons la différence de niveau des

abords du pont et des naissances relevées à la hauteur de l'étiage, égale à $12^{m},219 = Y_1$. L'élévation actuelle du sommet de l'intrados de l'arche du milieu au-dessus de l'étiage est d'ailleurs $11^{m},37 - 0^{m},974 = 10^{m},396$, tandis que l'élévation des autres arches est moindre de $0^{m},487$. Il importe que la solution cherchée donne une flèche peu différente de $10^{m},396$, afin que le débouché ne soit pas diminué et que la navigation puisse se faire avec la même facilité.

Soient donc $g = 18^{m},1867$; $Y_1 = 12^{m},219$; $h = 0^{m},60$, d'où $\frac{g}{Y_1} = 1,4884$. On déduit de ces données, par la Table III, $f = 10^{m},301$; ce dernier nombre n'est inférieur à $10^{m},396$ que de $0^{m},095$, et il excède ceux qui répondent au niveau du sommet de l'intrados des arches latérales de $0^{m},392$. En poursuivant le calcul, on trouve

$$h'' = 1^{m},9104; \qquad c = 1^{m},3104; \qquad \mu_0 = 57^{m},052;$$
$$\mu_1 = 68^{m},204; \qquad \frac{V}{\lambda} = 89^{m.q},372.$$

Dans cette solution, les pressions sont un tant soit peu moindres que dans la précédente, et, quoique l'inégalité des arches ne permette pas de comparer directement les sommes des surfaces $\frac{V}{\lambda}$ des deux profils, notre solution aurait évidemment présenté une économie notable des matériaux des voûtes, indépendamment des avantages qui se rattachent à l'horizontalité de la chaussée et à l'élévation des naissances, et cela sans que le niveau des abords ait été changé.

Pont de Neuilly, sur la Seine.

Le pont de Neuilly, construit par Perronet, est formé de cinq arches terminées du côté des têtes par des voussures qui donnent à l'ensemble de la construction un caractère de hardiesse fort remarquable. Nous n'aurons point égard à ces voussures, qui exigeraient une théorie à part, et nous appliquerons nos formules comme s'il s'agissait d'intrados purement cylindriques. A cela

près, les arches sont en *anse de panier* surbaissée au quart; leur ouverture est de $38^{m},98$, la même que celle du pont de Mantes. L'épaisseur des voûtes à la clef est de $1^{m},624$, et la hauteur moyenne de charge h peut être évaluée approximativement à $1^{m},15$.

Quant aux pierres employées à la confection des voussoirs, elles sont de provenances diverses[1]; toutefois leur qualité ne paraît pas devoir être estimée beaucoup au-dessous de celle des meilleures pierres de Saillancourt.

Soient données

$$g = 19^{m},490; \quad f = 9^{m},745; \quad h = 1^{m},15; \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 2;$$

on aura, par la Table III, $\frac{f}{Y_1} = 0,89759$, d'où $Y_1 = 10^{m},857$; puis par les formules (x), $h'' = 1^{m},112$; $e = -0^{m},038$.

La valeur négative de e que nous rencontrons ici, et déduite de la relation $e = h'' - h$, montre que la donnée h est incompatible avec les autres. Il est visible, en effet, qu'en diminuant h, la valeur de e deviendrait positive, mais sans pouvoir dépasser la limite $1^{m},112$, ni même l'atteindre tout à fait en faisant $h = 0$.

Nous allons changer les données, en conservant cependant la demi-ouverture g, et nous astreignant à conserver également l'ordonnée Y_1 des naissances : pour calculer cette ordonnée, nous ferons la somme des trois quantités

Charge approximative.....	$1^{m},15$
Épaisseur à la clef adoptée.....	$1,624$
Flèche adoptée.....	$9,745$
d'où, Ordonnée des naissances..... $Y_1 =$	$12^{m},519$

[1] On trouve dans une Note jointe au *Mémoire* de Perronet *sur l'épaisseur des piles et la courbure des voûtes*, le résultat d'expériences qu'il a faites sur les pierres de Saillancourt employées par lui à la construction du pont de Neuilly. L'habile ingénieur paraît avoir fait usage des hauteurs de charge à la place des pressions par unité de surface; il dit en effet qu'il faudrait, pour opérer la rupture de la pierre en question, la charger *du poids d'une colonne de 1580 pieds de hauteur de la même pierre*. Ce nombre, ramené aux nouvelles mesures, donne $513^{m},2$, résultat inférieur à celui que fournit notre tableau pour les pierres de Saillancourt 1re qualité.

Soient donc

$$g = 19^{m},490; \quad Y_1 = 12^{m},519; \quad h = 0^{m},55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,5568;$$

on en déduit, par la Table III, $f = 10^{m},731$. Ce nombre, comparé à la donnée primitive, répond à une surélévation du sommet de l'intrados d'un mètre à très-peu près : le niveau des naissances restant d'ailleurs le même qu'auparavant, il est clair que la nouvelle flèche sera plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux que celle adoptée par Perronet. Il reste à voir si les avantages de la nouvelle solution se maintiendront dans les éléments qu'il nous reste à déterminer. Or, en poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^{m},7820; \quad e = 1^{m},2320; \quad \mu_0 = 63^{m},689;$$

$$\mu_1 = 75^{m},224; \quad \frac{V}{\lambda} = 92^{m.q},67,$$

puis

$$\varepsilon_0 = 1^{m},2380.$$

Cette valeur de l'épaisseur réelle à la clef comparée à celle réalisée par Perronet présente une réduction de $0^{m},386$ ou d'à peu près un quart. Quant à la valeur de μ_1, elle répond à $\frac{1}{6,8}$ ou $\frac{1}{7}$ environ de la résistance absolue 513 mètres déterminée par Perronet : pour ne faire travailler la pierre qu'au $\frac{1}{10}$, il faudrait employer la roche de Châtillon par exemple, dont la résistance absolue est représentée par 742 mètres. La valeur de μ_1 est loin d'atteindre la limite indiquée par Navier; mais sans recourir à l'autorité de cet auteur, il est admissible que la solution déduite de notre théorie aurait pu être réalisée avec des matériaux un peu plus résistants que ceux employés, et, à la rigueur, avec ces derniers, si l'on se rappelle que le coefficient $\frac{1}{10}$ est proposé pour des constructions qui ne jouissent pas d'un degré de stabilité comparable à celui que nous pouvons atteindre. Les avantages de notre

solution sont assez manifestes pour que nous ne croyons pas devoir insister davantage.

Pont d'Orléans, sur la Loire.

Ce pont, construit sur le projet de M. Hupeau, est composé de neuf arches inégales, dont les naissances sont établies à $0^m,325$ au-dessus des basses eaux. L'arche du milieu a $32^m,484$ d'ouverture et $9^m,095$ de flèche; l'épaisseur à la clef est de $2^m,111$ pour cette arche. Quant aux autres arches, leurs dimensions sont successivement décroissantes. Les arches des culées ont $29^m,885$ d'ouverture, $8^m,121$ de flèche et $1^m,787$ d'épaisseur à la clef. La longueur totale du pont entre les culées est de $334^m,839$: quatre des piles ont une largeur de $5^m,522$; la largeur des quatre autres est de $5^m,847$, ce qui donne, pour la largeur totale des huit piles, $45^m,476$; en sorte que le débouché des neuf arches est de $279^m,363$. La pente longitudinale du pavé du pont a été réglée de part et d'autre à $\frac{1}{108}$, d'où il suit que la différence de niveau de la chaussée au milieu du pont et à ses abords s'élève à $\frac{1}{108}\frac{324^m,839}{2} = 1^m,504$. La hauteur de charge h peut être évaluée approximativement à $0^m,85$.

Nous ferons remarquer qu'en construisant le pont d'Orléans, l'on a cru convenable de réserver, dans le massif, des cavités qui ont pour effet de diminuer la charge. Cette manière de décharger les voûtes nous paraît vicieuse dans l'application que l'on en a faite jusqu'ici. Pour concilier de semblables dispositions avec les exigences de la théorie, il faudrait que les voûtes des arches présentassent des solutions de continuité dans leur courbure, aux endroits où les naissances des voûtes en décharge s'appuient sur les reins de la voûte principale. Nous ferons abstraction de ces particularités dans ce qui va suivre, en supposant le massif plein.

Nous nous dispenserons d'étudier en particulier l'arche du milieu, et nous examinerons s'il n'aurait pas été possible d'établir à Orléans un pont horizontal formé d'arches égales et en même

nombre, sans changer les niveaux des abords du pont et des naissances. En conservant la largeur totale des piles, on a pour chacune d'elles $5^{m},6845$, moyenne des largeurs inégales qui ont été adoptées dans la construction. L'ouverture d'une arche devient égale à $\frac{1}{9}\,279^{m},363 = 31^{m},0403$. L'ordonnée des naissances, pour l'arche du milieu, est égale à $9^{m},095 + 2^{m},111 + 0^{m},85 = 12^{m},056$; déduisant la différence de niveau $1^{m},504$, nous aurons $10^{m},552$ pour ordonnée des naissances, dans le pont horizontal, en conservant le niveau des abords. Nous réduirons la hauteur h en la prenant, comme dans l'exemple précédent, égale à $0^{m},55$. De cette manière nous aurons d'abord les données suivantes :

$$g = 15^{m},5202; \qquad Y_1 = 10^{m},552; \qquad h = 0^{m},55,$$

d'où

$$\frac{g}{Y_1} = 1,47085.$$

On en tire, au moyen de la Table III, $f = 8^{m},8542$, ce qui donne lieu au surbaissement $\frac{1}{3,5057}$. La flèche que nous déterminons ici est moindre que celle de l'arche du milieu du pont d'Orléans de $0^{m},241$, et plus grande de $0^{m},733$ que celle des arches extrêmes. En ayant égard à ces différences, et observant que nos intrados sont plus convexes vers les reins que ceux pratiqués jusqu'ici, on aperçoit, sans calcul, que le débouché correspondant à la valeur de f que nous venons de déterminer, excède celui que présentent les arches du pont d'Orléans. Nous devons cependant constater que la réduction $0^{m},241$ de la montée de l'arche dite *marinière*, bien qu'elle soit assez faible, apporterait peut-être quelques obstacles à la navigation par les hautes eaux. En poursuivant les calculs, on trouve

$$h'' = 1^{m},6909; \qquad c = 1^{m},1409; \qquad \mu_0 = 48^{m},853;$$

$$\mu_1 = 58^{m},447; \qquad \frac{V}{\lambda} = 66^{m.q},682,$$

puis

$$\varepsilon_0 = 1^{m},1478.$$

L'épaisseur à la clef que nous obtenons est de beaucoup moindre que celles adoptées dans la construction, et qui varient de $2^{m},111$ à $1^{m},787$; la réduction dans les épaisseurs varie par conséquent de $\frac{1}{2,2}$ à $\frac{1}{2,8}$. La valeur de μ_1 répond très-sensiblement au $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Nous ignorons quelle était la résistance des pierres de Mignier et de Beaugency qui ont été employées; celles de Beaugency sont signalées comme dures. Malgré le défaut d'indications plus précises, nous sommes porté à regarder la solution précédente comme offrant d'assez grands avantages sur celle adoptée.

Pont de Gignac, sur l'Hérault (arche du milieu).

L'arche du milieu de ce pont est surbaissée au tiers, et son ouverture est de $48^{m},70$, d'où

$$g = 24^{m},35; \quad f = 16^{m},2333, \quad \text{et } \frac{g}{f} = 1,5.$$

En admettant ces données, on trouve par la Table III, $Y_1 = 22^{m},160$, d'où $Y_1 - f$ ou $y''_1 - f = 5^{m},927$. Or, on voit qu'en supposant par exemple e compris entre 2 mètres et 3 mètres, h serait compris entre $3^{m},9$ et $2^{m},9$: ces valeurs de h étant de beaucoup supérieures à la hauteur de charge strictement nécessaire, on voit qu'en admettant la valeur donnée de f, on serait conduit à surcharger la voûte d'une masse énorme de matériaux tout à fait inutile. L'inconvénient que nous rencontrons ici tient au surbaissement $\frac{1}{3}$, qui conduira toujours à de pareils résultats dans les arches de grande ouverture. Mais nous avons la ressource de diminuer la flèche, ce qui nécessite simplement une élévation égale du sommet des piles ou des naissances. Pour fixer les idées, nous substituerons aux données primitives les suivantes :

$$g = 24^{m},35; \quad f = 13^{m},25; \quad \mu_1 = 100^{m},00, \text{ d'où } \frac{g}{f} = 1,8377.$$

A l'aide de la Table III, on en déduit $Y_1 = 15^m,3575$; puis, en achevant les calculs, il vient

$$\mu_1 = 85^m,861; \qquad e = 1^m,3740; \qquad h'' = 2^m,1018;$$
$$h = 0^m,7278; \qquad \frac{V}{\lambda} = 137^{m.q.},40.$$

En prenant μ_1 moindre que 100 mètres, la valeur de e croîtrait et celle de h diminuerait. Nous ne donnons les chiffres précédents que pour montrer l'effet de la variation du surbaissement. Il est clair qu'en consultant certaines convenances locales, on trouverait le moyen de fixer d'une manière moins arbitraire les valeurs de f et de μ_1 ou h.

Pont de Vizille, sur la Romanche.

Ce pont, construit par M. Bouchet, sur la route de Grenoble à Briançon, consiste en une arche unique de $41^m,90$ d'ouverture et de $11^m,69$ de flèche. Nous supposerons la hauteur de charge h égale à $0^m,66$. Les données seront ainsi

$$g = 20^m,95; \quad f = 11^m,69; \quad h = 0^m,66, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,79213.$$

Par la Table III, on en déduit $Y_1 = 13^m,7426$; et, en achevant les calculs,

$$h'' = 2^m,0454; \qquad e = 1^m,3854; \qquad \mu_0 = 68^m,234;$$
$$\mu_1 = 80^m,826; \qquad \frac{V}{\lambda} = 111^{m.q.},98,$$

puis
$$\varepsilon_0 = 1^m,3926.$$

L'épaisseur adoptée dans la construction est de $1^m,95$; notre solution aurait donc permis une économie de $0^m,557$ sur l'épaisseur des voussoirs, ou de $\frac{1}{3,5}$ de l'épaisseur réalisée. La valeur de μ_1 n'est pas excessive, elle supposerait l'emploi de pierres présentant

la résistance du calcaire de Jaumont 1re qualité, travaillant au $\frac{1}{10}$. La roche douce d'Arcueil employée à Paris offrirait une résistance plus que suffisante.

Le surbaissement du pont de Vizille est $\frac{1}{3,5843}$, et par conséquent assez éloigné de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; c'est à cette circonstance que nous devons de n'avoir pas rencontré les difficultés relatives aux données, qui se sont présentées dans quelques-uns des exemples précédents.

Pont de Céret, sur le Tech.

Comme presque tous les ponts qui datent de la même époque, le pont de Céret a été construit en plein cintre. Il se compose d'une seule arche de 45 mètres d'ouverture, dont les pieds-droits s'appuient contre des rochers. La forme de plein cintre a tellement exhaussé le sommet de la voûte, que l'on est obligé de franchir des pentes très-rapides pour arriver au milieu du pont. Malgré l'abondance des eaux torrentielles qui descendent des Pyrénées, il n'est guère probable que l'on ait élevé si considérablement le sommet de la voûte dans le but unique d'offrir un grand débouché à l'écoulement des eaux.

En examinant les dessins du pont de Céret, on reconnaît aisément qu'il aurait été possible d'établir à sa place un pont horizontal formé d'une arche en *anse de panier,* et de se passer des fortes rampes qui existent aux abords. Admettons, par exemple, le surbaissement $\frac{1}{3,5}$, qui donne, pour l'ouverture de 45 mètres, une flèche de $12^m,857$. Cette flèche, comparée au rayon $22^m,50$ de l'arche en plein cintre, présente une différence de $9^m,643$ dont on aurait pu abaisser le sommet de l'intrados, en conservant le même plan des naissances; en élevant les naissances d'une fraction de cette quantité, pour ne pas trop réduire la hauteur du débouché, on abaisserait le sommet de l'intrados d'une quantité égale au reste. Dans tous les cas, l'établissement des culées serait

facilité par la présence des rochers contigus. (Voir l'exemple du n° 49.)

Faisons le calcul avec les données suivantes :

$$g = 22^{m},50; \quad f = 12^{m},857; \quad h = 0,^{m}65, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,75.$$

Nous trouverons, par la Table III, $Y_1 = 15^{m},338$; puis ensuite

$$h'' = 2^{m},4690; \qquad e = 1^{m},8190; \qquad \mu_0 = 64^{m},854;$$

$$\mu_1 = 78^{m},888; \qquad \frac{V}{\lambda} = 143^{m.q},50.$$

La valeur de e n'a rien d'exagéré; celle de μ_1 exigerait dans les matériaux des voussoirs une résistance comprise entre celles de la roche de Châtillon et celle du calcaire de Jaumont 1re qualité. On doit prévoir assez aisément l'effet des variations de f et de h par rapport à e et μ_1, pour que nous n'insistions pas davantage sur ce sujet.

Pont de Tours, sur la Loire.

Ce pont est composé de quinze arches en *anse de panier* surbaissée au tiers, de $24^{m},4$ d'ouverture, ce qui donne $8^{m},1333$ de flèche; les piles ont $4^{m},87$ d'épaisseur.

Avec les données $f = 8^{m},1333$ et $\frac{g}{f} = 1,5$, on trouve, par la Table III, $Y_1 = 11^{m},103$, d'où $Y_1 - f = 2^{m},970$, quantité égale à la somme de l'épaisseur réelle à la clef et de la surcharge h. En prenant h dans les limites usuelles, l'épaisseur serait encore très-considérable pour une assez faible ouverture, et les pressions dans les joints resteraient très-faibles, ce qui impliquerait un emploi peu économique des matériaux. La cause des inconvénients qui se présentent ici est, comme pour le pont de Gignac, dans le surbaissement $\frac{1}{3}$.

Nous pourrions obtenir une solution exempte de pareils inconvénients en diminuant la flèche des arches, ce qui permettrait d'élever les naissances et favoriserait l'écoulement des eaux, sans

que le niveau de la chaussée fût changé; nous irons plus loin. La construction du pont de Tours a été signalée par une suite de désastres paraissant avoir eu pour origine la difficulté de fonder les piles, et la facilité avec laquelle se sont produits les affouillements. Il nous semble qu'en réduisant le nombre des piles et leur largeur, on aurait réduit d'autant les difficultés du travail des fondations, et que, d'un autre côté, la largeur du débouché se trouvant augmentée, les affouillements auraient été moins à redouter. On peut objecter à cette manière de voir, que les conséquences de la chute des arches, par suite de vices de fondation des piles, seraient plus graves que dans le cas d'arches de moindres dimensions; cependant il faut reconnaître que les chances de pareils accidents seraient bien diminuées : en outre, il n'est pas impossible aujourd'hui de s'assurer que des piles établies dans des conditions déterminées pourront résister à des charges données. En nous plaçant à ce point de vue, nous proposerions de composer le pont de treize arches, et de donner aux piles 4 mètres seulement de largeur. Le débouché des quinze arches est de 366 mètres; la somme des épaisseurs des piles est de $68^{m},18$, ce qui donne une longueur totale entre les culées de $434^{m},18$. De ce nombre déduisons 48 mètres, épaisseur totale des douze piles, et nous aurons pour le nouveau débouché $386^{m},18$, nombre qui excède celui du pont de Tours de $20^{m},18$, et dont le $\frac{1}{13}$ est $29^{m},70615$. Telles seraient les dimensions des ouvertures des arches. Au lieu de nous donner la flèche, nous admettrons la condition que l'ordonnée des naissances reste la même : or, d'après les planches de l'ouvrage de Gauthey, cette ordonnée peut être évaluée à environ $10^{m},80$. Soient donc

$$g = 14^{m},8531; \quad Y_1 = 10^{m},80; \quad h = 0^{m},65;$$

on trouve la solution suivante :

$$f = 8^{m},8174; \quad h'' = 1^{m},9722; \quad e = 1^{m},3222;$$

$$\mu_0 = 44^{m},169; \quad \mu_1 = 53^{m},837; \quad \frac{V}{\lambda} = 71^{m.q},182.$$

On observera que la flèche excède celle adoptée dans la construction, de $0^m,684$; elle est donc plus favorable à la navigation et à l'écoulement des eaux. L'épaisseur ne présente rien d'exagéré, et la valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{10,8}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 1re qualité. Si l'on admet que les matériaux présentent une résistance même un peu inférieure à cette dernière, la solution que nous venons d'obtenir pourra être regardée comme préférable au projet qui a servi de base à l'établissement du pont de Tours.

Quant aux piles, les nombres précédents donnent $\varepsilon_1 = 1^m,376$, dont le double est $2^m,752$: or cette quantité est de beaucoup inférieure à la largeur 4 mètres des piles; les matériaux intérieurs des piles n'auront donc pas besoin de présenter une résistance aussi grande que celle des voussoirs, les parements extérieurs seront seuls assujettis à la condition d'être aussi résistants que les voussoirs sur une profondeur égale à l'épaisseur de ceux-ci, et encore suffira-t-il qu'il en soit ainsi vers la partie supérieure des piles.

Pont des Chavannes, à Chalon-sur-Saône.

Ce pont, construit par Gauthey, est composé de sept arches surbaissées au tiers, ayant 13 mètres d'ouverture, et par conséquent $4^m,3333$ de flèche. L'épaisseur des piles est de $4^m,55$. Si nous admettons que la charge au-dessus de la clef soit $0^m,65$, les données seront

$$g = 6^m,5; \quad f = 4^m,3333; \quad h = 0^m,65. \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,5,$$

et l'on obtiendra la solution suivante :

$$Y_1 = 5^m,9155; \quad h'' = 1^m,5681; \quad e = 0^m,9181;$$
$$\mu_0 = 18^m,980; \quad \mu_1 = 23^m,884; \quad \frac{V}{\gamma} = 21^{m\,q},928.$$

L'épaisseur est un peu forte pour des arches d'aussi faible portée; la valeur de μ_1 est en même temps très-faible : les pierres de la moindre qualité présenteraient une résistance suffisante. Construites avec ces valeurs, les arches pécheraient plutôt, si cela était possible, par un excès de stabilité que par l'excès contraire.

Si le pont était à reconstruire, nous ne nous arrêterions pas aux chiffres que nous venons de trouver. On lit, en effet, dans l'ouvrage de Gauthey, page 101 : « La disposition du terrain ne permettant pas d'élever suffisamment la surface du pavé du pont, les grandes eaux montent jusqu'à la clef des arches; et afin de compenser la diminution de largeur que leur débouché éprouve à mesure qu'elles s'élèvent, on a pratiqué dans la partie supérieure des piles des ouvertures ovales de $2^m,6$ de largeur. » En consultant les planches qui accompagnent le même ouvrage, on trouve que la hauteur du pavé au-dessus des naissances est de $6^m,30$ environ.

Pour obvier à l'inconvénient signalé par Gauthey, il faudrait augmenter le débouché, ce qui peut se faire de diverses manières : par exemple, en réduisant l'épaisseur des piles. Réduisons cette épaisseur à $3^m,50$, les six piles donneront un accroissement de débouché égal à $6.1^m,05 = 6^m,3$, lequel, réparti également entre les sept arches, donne pour chacune un accroissement d'ouverture égal à $0^m,9$: les nouvelles dimensions des ouvertures seront de la sorte $13^m,90$. Nous pourrions aussi élever les naissances; mais conservons leur position et celle du niveau de la chaussée : l'ordonnée des naissances pourra être prise, d'après les dessins de Gauthey, égale à $6^m,30$ environ. En partant des nouvelles données

$$g = 6^m,95; \qquad Y_1 = 6^m,30; \qquad h = 0^m,65,$$

on trouvera la solution suivante :

$$f = 4^m,6248; \quad h'' = 1^m,6593; \quad e = 1^m,0093;$$

$$\mu_0 = 19^m,621; \quad \mu_1 = 24^m,872; \quad \frac{V}{\lambda} = 25^{m.q},104.$$

Indépendamment de l'accroissement du débouché dû à la réduction de la largeur des piles, la flèche que nous trouvons ici, et qui excède celle adoptée de $0^{m},291$, détermine un nouvel accroissement du débouché; et l'on aperçoit, sans calcul, que l'accroissement total excède de beaucoup celui qui est dû aux ouvertures pratiquées au sommet des piles. Les considérations présentées dans l'exemple précédent, au sujet de la largeur des piles, sont applicables ici. L'épaisseur à la clef est très-admissible, et la valeur de μ_1 excède à peine celle trouvée dans la première solution; en sorte que les pierres les moins résistantes pourraient encore être employées. La surface $\frac{V}{\lambda}$ du profil de la demi-arche et de son massif est augmentée de $\frac{1}{7}$ environ, mais cet accroissement est en partie compensé par la diminution de largeur des piles.

Nous ne donnons pas la solution précédente comme étant la meilleure; mais elle suffit pour montrer la facilité avec laquelle il devient possible de satisfaire aux diverses conditions du problème en substituant à un surbaissement trop voisin de $\frac{1}{3}$ un autre qui soit moins éloigné de $\frac{1}{4}$.

Pont de Neuville, sur l'Ain.

Ce pont, construit sur le projet de M. Aubry, est formé de deux arches de $29^{m},20$ d'ouverture. D'après les planches de Gauthey, la flèche paraît être égale à $\frac{1}{3,4}$ de l'ouverture. Soient

$$g = 14^{m},60; \quad f = 8^{m},5882; \quad h = 0^{m},65,$$

on aura la solution

$$Y_1 = 10^{m},4491; \quad h'' = 1^{m},8523; \quad e = 1^{m},2023;$$

$$\mu_0 = 45^{m},431; \quad \mu_1 = 54^{m},795; \quad \frac{V}{\lambda} = 65^{m.q},879.$$

Ces nombres sont réalisables, si l'on dispose de matériaux dont la résistance ne soit pas notablement inférieure à la résistance

de la pierre de Saillancourt 1re qualité. Le dessin que nous avons sous les yeux ne nous permet pas de comparer l'épaisseur adoptée dans la construction avec celle que nous venons de déterminer.

Pont de Roanne, sur la Loire.

Ce pont est formé de sept arches surbaissées au tiers, de $23^{m},40$ d'ouverture, et, par conséquent, de $7^{m},80$ de flèche. En admettant ces données, on aurait $y''_1 - f$ ou $\varepsilon_0 + h = 2^{m},8478$; de sorte qu'en prenant h dans les limites habituelles, l'épaisseur ε_0 excéderait 2 mètres, et la valeur de μ_1 serait assez faible. Comme précédemment, ces résultats tiennent à ce que le surbaissement est égal à $\frac{1}{3}$.

Le niveau de la chaussée paraît, d'après les dessins de Gauthey, supérieur au sommet de l'intrados d'environ $1^{m},7$. En conservant le niveau de la chaussée, nous nous proposerons de réduire la flèche en nous astreignant à la condition que l'ordonnée du sommet de l'intrados n'excède pas $1^{m},7$. L'élévation des naissances qui en résultera favorisera l'écoulement des eaux. Prenons par exemple pour nouvelles données

$$g = 11^{m},70; \quad f = 7^{m},00; \quad h = 0^{m},65,$$

il viendra

$$Y_1 = 8^{m},6242; \quad h'' = 1^{m},6171; \quad e = 0^{m},9671;$$
$$\mu_0 = 38^{m},399; \quad \mu_1 = 46^{m},021; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{m.q},505,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^{m},9742$. L'ordonnée du sommet de l'intrados réel est $\varepsilon_0 + h = 1^{m},6242$, quantité un peu moindre que $1^{m},7$; ainsi notre solution exhausse le sommet des arches de $0^{m},076$. Quant aux naissances, leur ordonnée se trouve être, au pont de Roanne, égale à $1^{m},7 + 7^{m},8 = 9^{m},5$: or nous trouvons $Y_1 = 8^{m},624$; les naissances sont donc exhaussées de $0^{m},876$ dans notre solu-

tion. La valeur de μ_1 répond à $\frac{1}{12,6}$ de la résistance absolue de la pierre de Saillancourt 1re qualité, et à $\frac{1}{9,5}$ environ de celle de la pierre ferme de Conflans. Les nombres que nous venons d'obtenir seraient réalisables; peut-être même l'accroissement de débouché dû à l'exhaussement du sommet et des naissances de l'intrados eût-il suffi pour éviter la ruine du pont de Roanne survenue pendant la terrible inondation qui a désolé les populations riveraines de la Loire, dans l'hiver de 1846-47. Mais on aurait évité plus sûrement les effets désastreux des grandes crues, en construisant les arches de ce pont dans le système de celles que nous nommons *arches incomplètes*.

Pont de Frouards, sur la Moselle.

Ce pont, construit par M. Lecreulx, est composé de sept arches dont le surbaissement est compris « entre le tiers et le quart, » dit Gauthey, et dont les ouvertures sont de $19^m,5$. D'après les dessins de ce dernier ingénieur, le surbaissement peut être évalué à $\frac{1}{3,64}$, ou la flèche à $5^m,3571$. En partant des données

$$g = 9^m,75; \qquad f = 5^m,3571, \qquad \text{d'où } \frac{g}{f} = 1,82,$$

on trouverait $y''_1 - f$ ou $\varepsilon_0'' + h = 0^m,8851$; en sorte que la somme de l'épaisseur à la clef et de la hauteur de charge h n'atteindrait pas seulement $0^m,9$. La moindre valeur admissible que l'on attribuerait à h laisserait pour ε_0 une valeur inadmissible en raison de sa petitesse, et à laquelle répondraient d'énormes pressions dans les joints. La cause de ces inconvénients tient à ce que le surbaissement est trop voisin de $\frac{1}{4}$: ainsi les données doivent être modifiées. En conservant l'ouverture des arches, admettons la condition que la différence de niveau des naissances et de la chaussée, qui paraît être de $7^m,35$ environ, d'après les dessins

de Gauthey, reste la même, et attribuons comme dans d'autres exemples, à la hauteur h, la valeur $0^m,65$; les données seront

$$g = 9^m,75; \qquad Y_1 = 7^m,35; \qquad h = 0^m,65;$$

au moyen de quoi, l'on aura la solution suivante :

$$f = 5^m,9073; \quad h'' = 1^m,4369; \quad e = 0^m,7869;$$
$$\mu_0 = 34^m,191; \quad \mu_1 = 40^m,605; \quad \frac{V}{\lambda} = 31^{m.q},950,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^m,7928$.

Cette solution est plus favorable sous le rapport du débouché et de la facilité du passage des bateaux, que le projet réalisé par M. Lecreulx, puisque la flèche excède celle du pont de Frouards d'environ $0^m,55$; l'épaisseur à la clef est très-admissible, et la résistance mesurée par μ_1 est $\frac{1}{10,6}$ de la résistance absolue des pierres de Saillancourt 2e qualité, et $\frac{1}{10,7}$ de celle de la pierre ferme de Conflans. Le surbaissement auquel répondent les valeurs de g et de f est $\frac{1}{3,3009}$.

Pont des Tuileries, à Paris, sur la Seine.

Ce pont, construit sur les dessins de Mansard, est formé de cinq arches inégales : l'ouverture de l'arche du milieu est de $23^m,5$; celles des arches latérales sont de $22^m,2$ et $21^m,0$. La chaussée du pont forme deux rampes, et les naissances des arches sont situées à des niveaux différents. Les dimensions des flèches ne sont pas données dans Gauthey, et il est difficile de les obtenir à l'aide des planches de son ouvrage. Nous allons examiner s'il n'aurait pas été possible d'établir un pont horizontal composé d'arches égales, en satisfaisant principalement à la condition que le sommet des arches ne fût pas sensiblement moins élevé que celui de l'arche du milieu du pont des Tuileries, le niveau des abords restant le

même. La différence de niveau des abords et du sommet de l'arche du milieu paraît être d'environ $1^m,7$ à $1^m,8$, d'après les dessins de Gauthey. La somme des cinq ouvertures est $109^m,9$, dont le cinquième est $21^m,98$; essayons le surbaissement $\frac{1}{3,25}$, la flèche sera de $6^m,7632$, et en prenant $h = 0^m,65$, les données seront:

$$g = 10^m,99; \quad f = 6^m,7632; \quad h'' = 0^m,65.$$

A l'aide de ces nombres, on obtient la solution

$$Y_1 = 8^m,5233; \quad h'' = 1^m,7498; \quad e = 1^m,0998;$$
$$\mu_0 = 33^m,020; \quad \mu_1 = 40^m,485; \quad \frac{V}{\lambda} = 44^{m.q},524,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^m,1102$: il s'ensuit $\varepsilon_0 + h = 1^m,7602$. Ce nombre est compris entre les limites $1^m,7$ et $1^m,8$ que nous ont fournies les dessins de Gauthey. Autant qu'on en peut juger d'après les mêmes dessins, la position des naissances donnée par la valeur de Y_1 serait à peu près au niveau de celles de l'arche du milieu du pont des Tuileries. L'épaisseur que nous venons de trouver est très-admissible, et la valeur de μ_1 est compatible avec l'emploi des pierres de qualité inférieure, telles que celles de Saillancourt 2^e qualité et de Conflans. En supposant que les dessins de Gauthey ne nous aient point induit en erreur, on voit que notre solution présente des avantages marqués sur celle qui a été réalisée.

Pont de Dôle, sur le Doubs.

Ce pont, construit par M. Guéret, est composé de sept arches inégales surbaissées au tiers, dont la plus grande a $18^m,80$ d'ouverture, et, par conséquent, $6^m,2667$ de flèche. Les piles ont de $3^m,25$ à $3^m,50$ d'épaisseur. On trouve dans le Tableau général des ponts de Gauthey, que le débouché total est de $122^m,40$. D'après le dessin que donne cet auteur, on peut estimer qu'il existe une différence de niveau de $7^m,0$ à $7^m,10$ entre le niveau de la

chaussée aux abords du pont et les naissances : soit $7^{m},05$. Ce nombre, comparé à la flèche de l'arche du milieu, donne $0^{m},7833$ pour la différence de niveau entre celui des abords du pont et le sommet de cette même arche. Proposons-nous de déterminer les dimensions principales d'un pont horizontal formé de sept arches égales, dans lequel on conservera le niveau des abords et celui des naissances, en augmentant d'ailleurs le débouché par la réduction de la largeur des piles. La largeur moyenne de celles-ci étant de $3^{m},375$, la somme pour les six piles est $20^{m},25$; nous pouvons, sans hésiter, réduire la largeur de chacune d'elles à 3 mètres, ce qui augmentera le débouché de $2^{m},25$, et élèvera la somme des ouvertures à $124^{m},65$, dimension dont le $\frac{1}{7}$ est $17^{m},807$. Prenons donc pour données

$$g = 8^{m},9035; \quad Y_1 = 7^{m},05; \quad h = 0^{m},65;$$

nous obtiendrons la solution que voici :

$$f = 5^{m},5403; \quad h'' = 1^{m},5019; \quad e = 0^{m},8519;$$
$$\mu_0 = 29^{m},065; \quad \mu_1 = 35^{m},149; \quad \frac{V}{\lambda} = 29^{m.q},943,$$

puis $\varepsilon_0 = 0^{m},8597$.

Cette solution serait réalisable avec les pierres à bâtir les moins résistantes; mais elle peut pécher en ce que le sommet des arches est ici moins élevé qu'au milieu du pont de Dôle de $0^{m},726$, différence des valeurs de f. Une telle réduction de la flèche peut être nuisible à la navigation et dangereuse dans le cas de grandes crues. On diminuerait ces inconvénients en élevant les naissances, ce qui aurait pour effet de diminuer l'épaisseur à clef et d'exiger l'emploi de matériaux plus résistants; mais il est clair que l'on ne parviendrait pas pratiquement à réduire l'ordonnée du sommet de l'intrados à $0^{m},783$.

Pont de Lavaur, sur l'Agoût.

Ce pont, qui date seulement de 1775, est composé d'une grande arche *en anse de panier,* approchant du plein cintre, dont l'ouverture est de $48^{m},7$, la même que celle de l'arche du milieu du pont de Gignac. L'épaisseur de la voûte à la clef est de près de $3^{m},25$.

« Cette grande épaisseur, dit Gauthey, est une des causes des dégradations qui se sont manifestées à ce pont. Les accidents ne proviennent point, d'ailleurs, d'un manque de force de la part des culées, qui sont très-épaisses. » A cette cause, on peut, selon nous, ajouter la grande épaisseur de la surcharge.

Nous avons vu déjà que, dans le cas des grandes arches, le surbaissement $\frac{1}{3}$ entraîne des inconvénients, et que le surbaissement $\frac{1}{4}$ exige des matériaux très-résistants et de faibles épaisseurs à la clef. Les surbaissements voisins de $\frac{1}{3,5}$ réussissent bien dans les arches d'assez grandes dimensions : nous adopterons ici un surbaissement un peu plus voisin de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3,6}$; et, en prenant, comme plus haut, $0^{m},65$ pour hauteur de la surcharge, nous aurons les données suivantes :

$$g = 24^{m},35; \quad f = 13^{m},5278; \quad h = 0^{m},65.$$

Avec ces données, on obtient la solution :

$$Y_1 = 15^{m},8628; \quad h'' = 2^{m},3260; \quad e = 1^{m},6760;$$

$$\mu_0 = 75^{m},222; \quad \mu_1 = 89^{m},841; \quad \frac{V}{\lambda} = 150^{m.q},57.$$

puis $\varepsilon_0 = 1^{m},6850$.

La flèche adoptée dans la construction paraît être de 21 à 22 mètres. La réduction que nous lui faisons subir exigerait un exhaussement des naissances d'au moins $7^{m},5$, si le sommet de

l'intrados devait être maintenu à la même hauteur. En l'absence de renseignements suffisamment exacts sur le niveau de la chaussée et la nécessité de le maintenir, ou la convenance qu'il aurait pu y avoir de l'abaisser, nous ne discuterons pas la valeur de Y_1. Nous ferons remarquer que l'épaisseur réelle à la clef que nous obtenons excède, de quelques centimètres seulement, la moitié de celle qui a été adoptée. Quant à la valeur de μ_1, elle montre que les voussoirs seraient soumis à des pressions pouvant atteindre le $\frac{1}{12}$ de la résistance absolue de la roche d'Arcueil, ou le $\frac{1}{9}$ de celle du calcaire de Jaumont 1re qualité.

Pont d'Ingersheim, sur le Fecht.

Ce pont a été construit en 1773 par M. Clinchamp, ingénieur militaire. Il se compose de trois arches *en anse de panier* dont le surbaissement est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, et dont les ouvertures sont de $15^m,3$ et $18^m,3$. D'après le dessin de Gauthey, la chaussée serait disposée en pentes très-douces de part et d'autre du milieu du pont, et les naissances seraient à $5^m,4$ environ au-dessous du niveau de la chaussée aux abords du pont.

Si l'on fait abstraction de la légère pente pour l'arche du milieu, et que l'on parte du surbaissement $\frac{1}{4,5}$ et de l'ouverture $18^m,3$ comme données, d'où résulte $f = 4^m,0667$, on trouvera $\varepsilon_0 + h = 0^m,2909$, quantité évidemment inadmissible dans la pratique.

Si l'on se propose l'établissement d'un pont horizontal de même débouché et formé de trois arches égales, et que l'on ajoute la condition que la différence de niveau des abords du pont et des naissances soit de $5^m,4$, les données seront d'abord

$$g = 8^m,15; \qquad Y_1 = 5^m,40,$$

et l'on trouvera $f = 4^m,5762$; $\varepsilon_0 + h = 0^m,8238$. Il est évident qu'en attribuant à h une valeur comprise dans les limites ordi-

naires, l'épaisseur à la clef restera encore très-petite et répondra à des pressions très-considérables dans les joints. Il suffirait d'élever les abords de quelques décimètres, pour obtenir une solution admissible en pratique. Si les exigences locales ne le permettent pas, il conviendra de renoncer aux arches *en anse de panier*, et de recourir à l'emploi des arches incomplètes. Au reste, il semble que l'ingénieur a fait quelque chose d'analogue, car en examinant le dessin du pont d'Ingersheim dans l'ouvrage de Gauthey, on reconnaît que l'intrados est formé d'un arc de cercle de grand rayon raccordé avec les pieds-droits, au moyen de deux arcs de rayons beaucoup plus petits. En prolongeant le tracé de l'arc principal jusqu'aux pieds-droits, on aurait un intrados circulaire très-peu différent, au fond, de celui dont il s'agit. La direction des plans de joint dans le voisinage des naissances peut seule établir une différence marquée entre les deux genres d'intrados : ne sachant pas au juste quelle est cette direction, il nous est impossible de dire si les arches du pont d'Ingersheim appartiennent à la classe des arches *en anse de panier* ou à celle des arches *en arc de cercle*.

Pont de Vieille-Brioude, sur l'Allier.

On lit dans Gauthey : « Ce pont a été bâti en 1454, par les entrepreneurs Grenier et Estone, aux frais de la dame du lieu. Il est composé d'une seule arche *en arc de cercle* de $54^{m},2$ d'ouverture, et de 21 mètres de flèche. C'est la plus grande de toutes les arches qui existent en France, et probablement en Europe; elle n'a que $4^{m},9$ de largeur, ainsi que les levées qui y aboutissent.

« La voûte est formée de deux rangs de voussoirs posés l'un sur l'autre, sans que l'on ait pratiqué entre eux presque aucune liaison; l'un est en pierres volcaniques, et l'autre en grès très-dur. Les pierres n'ont que $0^{m},20$ à $0^{m},25$ d'épaisseur sur $0^{m},65$ au plus de longueur de coupe. Le pont est fondé solidement sur deux rochers qui s'élèvent au-dessus des basses eaux. »

Il est moins probable que la grandeur de la flèche ait été

fixée par la nécessité de donner de la hauteur au débouché, que par l'obligation où croyaient être beaucoup de constructeurs des siècles passés d'éviter le plus possible les formes éloignées du plein cintre. La grande hauteur de l'arche a nécessité l'établissement de rampes très-rapides qui se prolongent à une assez grande distance des deux côtés du pont. Le sommet du pavé est, d'après le dessin de Gauthey, élevé d'environ $24^{m},6$ au-dessus des naissances.

Nous supposerons qu'il s'agisse de construire un pont horizontal, à une seule arche *en anse de panier* de $54^{m},2$ d'ouverture, et que l'on ait à utiliser la résistance de matériaux du genre de ceux qui ont été employés au pont de Vieille-Brioude. (Les constructeurs de ce pont ont dû s'imposer une telle condition d'économie, puisque les frais ont été supportés par la *dame du lieu* et non pas par une province ou partie de province.) Nous admettrons un surbaissement voisin de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{3,8}$; et une hauteur $0^{m},65$ de charge au-dessus de la clef. De cette manière, les données seront

$$g = 27^{m},10; \quad f = 14^{m},2633; \quad h = 0^{m},65.$$

On en déduit

$$Y_1 = 16^{m},2532; \quad h'' = 1^{m},9853; \quad e = 1^{m},3353;$$

$$\mu_0 = 98^{m},976; \quad \mu_1 = 114^{m},116; \quad \frac{V}{\lambda} = 151^{m.q},38,$$

puis $\varepsilon_0 = 1^{m},3399$. La présence des deux rochers dont parle Gauthey, permettrait d'appliquer ici les notions que nous avons exposées au n° 49 sur l'établissement des culées. Le profil d'une culée serait un trapèze rectangle dont les bases supérieure et inférieure de niveau respectivement avec le sommet de l'extrados et les naissances, auraient des dimensions qui excèdent $\frac{0^{m},65}{0,76}$ et $\frac{16^{m},25}{0,76}$ ou $0^{m},9$ et $21^{m},4$ environ. Il est clair que la partie des rochers s'élevant au-dessus du plan des naissances serait comprise dans

la culée déterminée par ce profil, moyennant un raccordement convenable avec les maçonneries.

En supposant que la flèche trouvée laisse un débouché suffisant, on voit que l'ordonnée $16^{m},25$ du plan des naissances permettrait un abaissement du sommet du pavé égal à $8^{m},35$. On observera que l'épaisseur réelle à la clef $1^{m},34$ excède peu la somme des épaisseurs des deux rangs de voussoirs, laquelle serait $1^{m},30$ au plus, selon Gauthey. Enfin la valeur de μ_1 est très-loin d'atteindre le $\frac{1}{10}$ de la résistance absolue des pierres volcaniques et des grès durs; elle répond à $\frac{1}{9,5}$ de celle de la roche d'Arcueil.

La solution que nous venons de trouver, bien que s'écartant un peu des habitudes actuelles des ingénieurs, nous paraît très-admissible dans les conditions d'économie que nous nous sommes imposées. Hors de ces conditions, il eût été facile, en augmentant la flèche de quelques décimètres, d'obtenir des épaisseurs plus considérables, sous de moindres pressions.

REMARQUES RELATIVES AUX ARCHES DE PONT *EN ANSE DE PANIER*.

51. Nous venons de passer en revue un assez grand nombre de ponts actuellement existants, et nous avons fait l'application de notre théorie aux données relatives à ces ponts, comme s'il se fût agi de procéder à leur construction. Dans beaucoup de cas, les résultats du calcul appliqué aux arches *en anse de panier* nous ont montré une incompatibilité entre les données, et nous avons été obligé de les modifier, pour arriver à la détermination d'un système d'éléments de construction qui pût satisfaire à la fois aux conditions d'une très-grande stabilité et aux exigences d'une économie bien entendue. En nous bornant toujours aux arches *en anse de panier* peu chargées au-dessus de la clef, ou dans lesquelles l'ordre de grandeur de la hauteur qui représente la charge est celui de l'épaisseur, il nous semble résulter des applications présentées dans le numéro précédent, et des courtes discussions auxquelles elles ont donné lieu, quelques conséquences importantes.

1° *Le surbaissement des arches complètes doit rester compris entre le tiers et le quart, et même ne point atteindre ces limites*, du moins tant que les matériaux employés seront des pierres calcaires, même les plus résistantes. Il s'ensuit que les arches *en plein cintre* ne doivent point être adoptées dans la construction des ponts : nous avons dit ailleurs qu'elles répondent à des charges infinies au-dessus de la clef, et que les voûtes qui s'en rapprochent le plus sont celles des tunnels, en raison des charges considérables qu'elles peuvent avoir à supporter.

2° *Le surbaissement des arches complètes doit être d'autant plus voisin du tiers ou du quart, que les ouvertures sont moindres ou plus grandes.* Cette conséquence, déduite de faits particuliers, est facile à expliquer : en effet, dans les arches de pont, la hauteur h de la charge au-dessus de la clef, qui sera plus généralement prise pour donnée que la quantité μ_1, peut être regardée comme indépendante des dimensions du pont en hauteur et largeur; elle ne dépend que de la nature et de l'emploi des matériaux qui composent la chaussée. La hauteur h est donc une grandeur absolue très-peu variable et qui se trouve, dès lors, être une fraction des autres dimensions, d'autant plus grande, que celles-ci sont moindres. Or nous savons que les formes d'arches doivent se rapprocher du *plein cintre* à mesure que les hauteurs de charge sont plus considérables (et il faut entendre ici les hauteurs relatives); donc, la forme des arches *en anse de panier* doit se rapprocher d'autant plus du *plein cintre* que ces arches ont une plus faible ouverture.

Les ingénieurs sont aujourd'hui dans l'habitude d'employer les surbaissements un tiers et un quart, et le plus souvent le premier de ces rapports; mais il est rare qu'ils adoptent des nombres intermédiaires, qui seraient cependant de beaucoup préférables.

Notre théorie, envisagée dans toute sa généralité, laisse le choix entièrement arbitraire de deux données, entre les trois quantités f, g et Y_1; mais, d'après ce qui vient d'être dit, les deux arbitraires doivent, dans la pratique, être assujetties à la condition que le surbaissement qui en résultera tombe entre le tiers et le quart.

Les valeurs admissibles de ce surbaissement seront, dans chaque cas, assez peu variables, pour que l'on soit tenté de regarder le rapport des deux arbitraires restantes comme ne pouvant pas être donné absolument *a priori*, et de rechercher, ailleurs que dans les circonstances locales, les raisons de ce rapport. Développons notre pensée.

Jusqu'ici nous avons considéré les arches comme soumises uniquement à l'action du poids de leurs diverses parties, et aux actions et réactions mutuelles de ces mêmes parties. C'est en ayant égard à la résistance des matériaux employés, et au peu de variabilité de la quantité h, que nous avons été conduit à établir les limites du surbaissement dans les arches complètes. Mais on conçoit que, si l'on tient compte en même temps des surcharges accidentelles et des chocs que les voitures lourdement chargées peuvent occasionner, on parvienne à déterminer la pression maximum par unité de surface à laquelle les voussoirs seront soumis, et qui se développera, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de vibration résultant de chocs plus ou moins répétés. Les pressions dépendront naturellement des hypothèses que l'on fera sur les surcharges et le mouvement des voitures; mais elles dépendront aussi de la constitution physique et géométrique des arches, que nous supposerons toutefois établies conformément à la théorie de l'équilibre des arches non soumises à des actions accidentelles. Or, comme nos équations laissent deux des trois quantités f, g et Y_1 entièrement arbitraires, on doit profiter de cette indétermination pour satisfaire à la condition que, dans le nouvel état du système, la pression maximum qui pourra se développer n'excède point une limite donnée, l'amplitude des oscillations étant d'ailleurs supposée très-petite.

L'analyse mathématique de cette partie de la question de la stabilité des voûtes dépend de l'intégration des équations aux différences partielles, et notre intention n'est pas de l'aborder en ce moment.

A défaut d'une solution théorique, l'expérience doit être con-

sultée; mais les ponts actuellement existants ne peuvent fournir que peu de renseignements, leurs formes et dimensions relatives n'ayant point été déterminées de manière à satisfaire à nos équations. Il serait fort à désirer que l'on appliquât notre méthode à quelques-uns au moins des nombreux ponts ou viaducs dont la construction des chemins de fer exige l'établissement. Comme il est toujours possible, en faisant varier assez peu la flèche ou l'ordonnée des naissances, de ramener l'épaisseur à la clef aux dimensions usitées, qui ne dépendent que de l'ouverture, il y aurait en cela de quoi rassurer les plus timorés d'entre les ingénieurs, et, dans ce cas, l'important avantage d'obtenir la plus grande stabilité que puisse présenter une arche dont les dimensions principales sont données.

Les arches incomplètes n'étant, au fond, que des portions d'arches complètes seraient l'objet de considérations analogues à celles qui ont été présentées relativement aux restrictions que les surcharges accidentelles doivent apporter dans le choix des données; mais les arches incomplètes comprenant une arbitraire de plus, il restera toujours plus de latitude à cet égard que dans le cas des autres arches.

RÉFLEXIONS GÉNÉRALES SUR LA THÉORIE EXPOSÉE DANS CE MÉMOIRE.

52. Les deux conditions que nous avons établies pour obtenir une très-grande stabilité dans les arches de pont, sont que la résultante des pressions dans les joints passe très-près du milieu de l'épaisseur des voussoirs, et que cette résultante soit normale aux plans de joint. Pour remplir le mieux possible la première de ces deux conditions, nous avons supposé, dans la mise en équation, les surfaces de joint réduites à celui de leurs éléments qui rencontre la *courbe des centres de gravité*, et nous avons admis que le contact étant ensuite rétabli sur des portions égales du plan de joint de part et d'autre de l'élément primitif, les pressions se répartiraient uniformément sur toute l'étendue du nouveau joint :

les défauts d'exécution des surfaces de joint ou d'homogénéité des voussoirs et des mortiers pourraient empêcher qu'il en fût ainsi; mais ce sont là des causes accidentelles. La seconde condition, relative à la direction normale de la résultante des pressions, a été remplie par le seul fait que les actions tangentielles ou frottements n'ont point été introduites dans les équations de l'équilibre : il est facile de réaliser cette condition dans la pratique, à l'aide de quelques précautions apportées dans la pose des voussoirs.

Nous avons vu comment les accidents de rupture qui se manifestent après le décintrement, dans les voûtes partiellement extradossées *en gradins*, peuvent être attribués à ce que la résultante des actions exercées par les assises sur les voussoirs est alors dirigée obliquement à l'extrados. L'indétermination des actions exercées sur la voûte dans ce genre de constructions et dans le cas où le massif est un simple blocage, jointe à des considérations théoriques, nous ont fait rechercher une disposition des matériaux formant le massif, qui, au frottement près (et il est inutile d'y avoir égard), donne lieu à des pressions normales égales à celles que produirait un liquide de même densité que le massif et soumis supérieurement à la même charge que celui-ci. C'est à cette disposition que s'appliquent ensuite nos calculs. Il n'est pas indispensable qu'elle soit réalisée en toute rigueur; il suffit, pour que nos calculs fournissent des indications satisfaisantes, que l'on supprime la disposition *en gradins*, comme le font déjà beaucoup d'ingénieurs, ou que la surface extrados soit sensiblement continue, sinon dans toute l'étendue de la voûte, du moins dans l'espace où l'inclinaison des joints avec la verticale s'étend de 18° à 75° environ.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu [1] sont essentiel-

[1] Il ne sera pas sans intérêt de montrer jusqu'à quel point la manière abstraite dont les géomètres du siècle dernier ont traité les questions de statique, leur permettait cependant d'obtenir des solutions applicables aux cas de la pratique. Ces géomètres assimilaient l'équilibre des voûtes à celui d'un système d'éléments matériels de dimensions infiniment petites : c'est de cette manière qu'ils ont trouvé que la forme d'équilibre d'une voûte infiniment mince et d'épaisseur constante devait

lement relatifs à l'état de la voûte après le décintrement, celle-ci étant supposée soumise aux actions de son poids, de la surcharge permanente et aux réactions mutuelles de ses parties; de sorte qu'il faut encore rechercher quelle doit être la forme de la voûte sur ses cintres, pour qu'elle prenne, après leur enlèvement, la forme déterminée par la théorie que nous avons exposée. En un

être celle d'une chaînette renversée, lorsque la voûte est soumise uniquement à l'action de son propre poids.

Dans la question des arches de pont soumises à des forces normales dues à la pression d'un liquide, la manière de faire des anciens géomètres conduirait à des résultats identiques avec ceux qu'on déduirait de nos équations en y faisant $i = 1$, et négligeant les termes dépendants des épaisseurs autres que le terme fini $e\mu_0 = \frac{1}{2}q^2$: l'expression (w) du rayon de courbure traitée ainsi, donne immédiatement

$$\rho'' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{y''}.$$

Nous avons obtenu cette équation sous une autre forme, dans notre deuxième article sur l'*Équilibre des voûtes en berceaux cylindriques*, en nous plaçant au point de vue abstrait des géomètres.

Or si l'on néglige seulement les termes du deuxième ordre dans le cas de $i = 1$, la première équation (XXIV) se réduit à

$$\rho'' = \frac{Q^2}{y''};$$

on a d'ailleurs par l'équation (VI), entre q^2, Q^2, h'' et e, la relation

$$\frac{q^2}{2} = Q^2 + h''e - \frac{2}{3}e^2;$$

d'où il suit que les deux relations précédentes seraient identiques, si les termes $h''e - \frac{2}{3}e^2$ pouvaient se réduire à zéro ou être négligés. Or, dans les arches de pont, h'' étant généralement supérieur à e d'une fraction assez faible, le produit $h''e$ est du deuxième ordre, et l'opposition de signe de ces termes atténue l'erreur commise en les négligeant entièrement. On peut donc dire que la solution abstraite ne diffère de celle plus approchée que nous avons obtenue, que de quantités du deuxième ordre, et nous avons vu qu'en pratique ces termes sont presque négligeables. La transition de la solution abstraite à la solution pratique consisterait à

mot, la question de l'inflexion est encore à résoudre; mais elle ne nous paraît pas susceptible d'être traitée rigoureusement, si l'on n'étudie en même temps celle de l'équilibre du cintre lui-même, question dans laquelle le mode de pose des voussoirs ne devra pas être négligé. Toutefois, nous croyons avoir établi que, si l'on s'astreint aux formes que nous proposons, si l'on prend les

décomposer la constante $\frac{1}{2}q^2$ en un produit de deux facteurs finis e et μ_0, le premier étant très-petit par rapport au second, mais non pas infiniment petit.

L'assimilation faite par les anciens géomètres, de leur système idéal avec une voûte ou une arche de pont, n'était pas suffisamment justifiée *a priori*, et l'on conçoit que les ingénieurs n'aient tenu aucun compte de résultats théoriques ainsi obtenus; mais il n'en faut pas moins remarquer l'espèce d'intuition qui a permis aux premiers de poser le problème de manière à obtenir des solutions beaucoup plus approchées qu'on ne devait rationnellement s'y attendre.

La solution approchée dont il vient d'être question donne lieu à une remarque digne d'intérêt : c'est que, à ce degré d'approximation, la courbe intrados coïncide avec la courbe dite *élastique*, dans un de ses cas particuliers. Considérons, en effet, l'équilibre d'une verge élastique assujettie à la condition de couper normalement l'axe des y en un point fixe dont l'ordonnée soit h'', et sollicitée du côté des x positifs par une force P parallèle à l'axe des x et de même sens que cet axe, dont l'ordonnée du point d'application soit b''; on aura, la concavité de la verge étant tournée du côté des y positifs (voir le *Traité de Mécanique* de Poisson, 2ᵉ édition, n° 308),

$$\frac{1}{\rho''} = -\frac{P}{\beta}(b'' - y''),$$

équation où β désigne un coefficient qui dépend des dimensions de la section transversale de la verge et du coefficient d'élasticité de la matière dont elle est formée. Les conditions d'identité de cette équation et de l'expression renversée du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{y''}{Q^2},$$

sont

$$b'' = 0, \qquad \frac{P}{\beta} = \frac{1}{Q^2}.$$

La première indique que la force P doit être appliquée dans le plan qui limite le massif supérieurement. Cette condition est facile à remplir au moyen d'une tige rigide disposée parallèlement à l'axe des y et liée invariablement à la courbe *élastique* en son extrémité libre : la force P s'appliquerait au point où cette tige rencontre l'axe des x. Si l'on conçoit une disposition toute pareille pour la partie de la verge située du côté des x négatifs, et dans laquelle la force P soit de sens

précautions convenables dans l'exécution et la pose des voussoirs, et que, d'ailleurs, on ait le soin de ne décintrer qu'après un certain avancement, sinon l'achèvement entier du massif, l'inflexion de la voûte sera très-faible, ou du moins incomparablement plus petite que les inflexions observées jusqu'ici[1].

Quant à l'action des surcharges accidentelles et des chocs pro-

opposé à la première, il est évident que l'on pourra supprimer le point fixe; il y a plus : les deux forces P égales et de sens opposés pourront être remplacées par une troisième tige rigide de longueur égale à la corde qui joint les deux extrémités libres de la verge, et placée dans l'intervalle compris entre les deux premières tiges, de manière à coïncider avec l'axe des x. En supposant mesurée la compression qu'éprouverait la troisième tige, sa valeur P permettrait de déduire, de la seconde équation de condition, la valeur du paramètre Q de l'équation de l'intrados.

Nous ne pouvons exposer ici comment l'appareil que nous venons d'examiner pourrait être utilisé dans la résolution des questions relatives aux arches de pont, ni comment on parvient, par de simples raisonnements, à vérifier la dépendance mutuelle des trois quantités f, g et Y_1 dans les arches complètes, et à distinguer le cas où ces arches se réduisent au plein cintre; chacun le devinera aisément. Mais la construction de nos Tables permettant d'obtenir une exactitude très-suffisante, le rapprochement de deux problèmes aussi différents en apparence que ceux des arches de pont et des lames élastiques n'offre plus qu'un intérêt purement spéculatif.

[1] Nous ne pouvons exposer dans ce mémoire les recherches que nous avons entreprises sur la détermination de la forme à donner aux cintres supposés parfaitement rigides, pour que le profil de la voûte, après le décintrement, devienne identique avec celui qui résulte de notre théorie, dans le cas où l'opération du décintrement serait effectuée après l'achèvement du massif : le résultat de ces recherches est trop incomplet. Nous avons pu obtenir l'expression des limites de l'accroissement de flèche qu'il conviendrait de donner aux cintres : malheureusement, on ne possède aucune notion satisfaisante sur l'élasticité des pierres à bâtir et des mortiers ou ciments. Pour nous faire une idée de l'ordre de grandeur de l'inflexion du sommet d'une arche, inflexion qui est toujours en raison inverse du coefficient d'élasticité de la matière de la voûte, nous avons été réduit à supposer que les ciments solidifiés se contractent à peu près comme les voussoirs eux-mêmes, et à prendre un coefficient d'élasticité moyen entre ceux que l'on emploie ordinairement pour le bois et la fonte de fer. En faisant l'application de nos formules et de ce coefficient moyen aux grandes arches que nous avons étudiées n^{os} 47 et 48, nous avons trouvé des variations de flèche notablement moindres qu'un centimètre. Ces résultats nous paraissent confirmer l'opinion énoncée dans le texte, malgré l'incertitude que présente le coefficient d'élasticité employé. Beaucoup d'ingénieurs assurément regarderaient de pareilles inflexions comme négligeables dans la pratique.

duits par le mouvement des lourdes voitures[1], nous avons vu que l'un des moyens à employer pour en prévenir les effets désastreux consiste à faire en sorte que dans l'état d'équilibre de la voûte non soumise à ces actions, la résultante des pressions passe très-près du milieu de l'épaisseur, et soit normale au plan de joint. Or notre théorie comprend déjà ces conditions. Mais il résulte des remarques du numéro précédent, que l'une des arbitraires du problème est assujettie pratiquement à rester dans des limites assez restreintes, pour qu'on doive plutôt la regarder comme une indéterminée dont on ait à profiter pour satisfaire aux nouvelles conditions statiques ou dynamiques résultant de la considération des surcharges accidentelles. Voici donc une nouvelle question à traiter dont la solution devrait précéder l'application de la théorie de l'inflexion de la voûte et de l'équilibre des cintres[2].

Tels sont les deux importants problèmes à résoudre pour que la question de l'établissement des arches de pont soit entièrement résolue : la théorie exposée dans le présent mémoire nous paraît

[1] Le mouvement des locomotives sur les ponts et viaducs détermine des pressions variables dues au mouvement relatif de leurs différents organes; en sorte que pour tenir compte de la surcharge qui en résulte, il faudrait connaître les valeurs de ces pressions : à cet égard, nous renverrons aux n^os^ 20 et 28 de notre *Théorie de la stabilité des machines locomotives en mouvement.*

[2] Ici les difficultés provenant de l'indétermination des pressions dans les joints ne pourraient être levées par le procédé qui nous a réussi lors de la mise en équation; il serait de toute nécessité d'introduire l'élasticité des voussoirs. En attendant qu'une solution rigoureuse se produise, on pourrait procéder par voie de tâtonnements. Attribuant, par exemple, à l'indéterminée dont nous avons parlé, une valeur prise entre de certaines limites, et faisant l'application de notre théorie, on examinerait, à l'aide des procédés en usage, quelles sont, pour un mode donné d'action des surcharges accidentelles, la situation du point d'application, la direction et l'intensité de la résultante des pressions en chaque joint; et l'on ferait varier l'indéterminée jusqu'à ce que l'on parvienne à des valeurs telles, que les trois éléments de la résultante des pressions restent compris dans des limites que la pratique tolère. Si l'étendue des valeurs de l'indéterminée qui satisfont à ces conditions restait sensible, on en profiterait pour choisir celle qui se rapproche le plus de la valeur donnée primitivement.

être le véritable point de départ dans l'étude de cette matière difficile.

ADDITIONS.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE L'INTRADOS FICTIF PAR LES SÉRIES.

La théorie des fonctions elliptiques n'étant connue que d'un très-petit nombre d'ingénieurs, nous présenterons ici l'expression en séries de l'équation de l'intrados fictif, pour le cas où le massif et la voûte sont supposés d'égale densité.

En faisant $i = 1$ dans les équations (z) et (a') (première partie du mémoire), et posant, pour abréger,

$$q''^2 = q^2 - 2h''e + \frac{4}{3}e^2, \qquad (\alpha)$$

l'équation différentielle (a') peut se mettre sous la forme

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{1 - \dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2} - \dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{q''^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{y''^2 - h''^2}{q''^2}}}\,\frac{dy''}{\sqrt{y''^2 - h''^2}}. \qquad (\beta)$$

La quantité sous le premier radical dans le second membre, étant élevée à la puissance $-\frac{1}{2}$, l'équation (β) devient, après de simples transformations,

$$\pm\sqrt{2}\,\frac{dx''}{q''} = \frac{d\dfrac{y''}{h''}}{\sqrt{\dfrac{y''^2}{h''^2} - 1}}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\frac{h''^2}{2q''^2}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right) - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^2\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^3\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^3 - \text{etc.}\right\}, \qquad (\gamma)$$

La loi de la série comprise sous les parenthèses est manifeste.

Il reste à obtenir une suite d'intégrales de même forme. Posons généralement

$$A_m = \int \left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} d\frac{y''}{h''}; \qquad (\delta)$$

au moyen des formules connues de réduction des expressions des différentielles binômes, nous aurons, entre les diverses intégrales A_m, la relation suivante :

$$2m\,A_m = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{m-\frac{1}{2}} - (2m-1)\,A_{m-1}; \qquad (\varepsilon)$$

et chacune d'elles se trouvera ramenée à ne plus dépendre que de l'intégrale

$$A_0 = \int \frac{d\frac{y''}{h''}}{\sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}} = \log\left[\frac{y''}{h''} + \sqrt{\frac{y''^2}{h''^2} - 1}\right] + \text{const.}$$

La condition que l'intégrale de l'expression (γ) donne $x'' = 0$ pour $y'' = h''$, détermine une valeur nulle de la constante.

On peut donner à A_0 les formes suivantes :

$$A_0 = \log \frac{\sqrt{y''+h''} + \sqrt{y''-h''}}{\sqrt{y''+h''} - \sqrt{y''-h''}} = \log \frac{1 + \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}{1 - \sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}}, \qquad (\zeta)$$

dont l'identité avec la précédente se vérifie aisément. Le dernier de ces logarithmes donne, pour expression de A_0 en série,

$$A_0 = 2\sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}}\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{y''-h''}{y''+h''} + \frac{1}{5}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{y''-h''}{y''+h''}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Cette série est très-convergente, lorsque $y'' - h''$ est une petite fraction de $y'' + h''$.

En faisant successivement $m = 1$, $m = 2$,... dans la relation (ε), on a

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1\,A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - 3\,A_1,$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - 5\,A_2,$$

.....

et, en substituant ces valeurs les unes dans les autres, on trouve

$$2\,A_1 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - A_0,$$

$$4\,A_2 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}A_0,$$

$$6\,A_3 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5}{2.4}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3.5}{2.4}A_0,$$

$$8\,A_4 = \frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5.7}{4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5.7}{2.4.6}\frac{y''}{h''}\left(\frac{y''^2}{h''^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3.5.7}{2.4.6}A_0,$$

.....

Intégrant actuellement l'expression (γ), et supposant, comme il a été dit, $x''' = 0$ pour $y'' = h''$, il viendra

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{2}\frac{x''}{q''} = \left(1 - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)A_0 &- \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\frac{h''^2}{2q''^2}\,A_1, \\ &- \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^2 A_2, \\ &- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)\left(\frac{h''^2}{2q''^2}\right)^3 A_3, \\ &\text{etc.....} \end{aligned}\right\} \quad (\eta)$$

Telle est l'une des formes que l'on peut donner à l'équation de la courbe intrados fictif, à l'aide des séries.

Les fonctions A_0, A_1, etc., sont susceptibles d'être mises sous d'autres formes. Soit, en désignant par des lettres gothiques les sinus, cosinus hyperboliques et leurs fonctions inverses,

$$\cos A_0 = \frac{y''}{h''};$$

d'où

$$\sin \tfrac{1}{2} A_0 = \pm \sqrt{\frac{y''-h''}{2h''}}, \qquad \cos \tfrac{1}{2} A_0 = \sqrt{\frac{y''+h''}{2h''}}, \tag{\theta}$$

puis

$$A_m = \int \sin^{2m} A_0 \, dA_0; \tag{\iota}$$

on aura les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2A_1 &= \cos A_0 \sin A_0 - 1A_0, \\ 4A_2 &= \cos A_0 \sin^3 A_0 - 3A_1, \\ 6A_3 &= \cos A_0 \sin^5 A_0 - 5A_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{\varkappa}$$

Ces expressions peuvent être substituées les unes dans les autres. Il y a plus : la nouvelle forme donnée à la fonction A_m permet de la développer au moyen des sinus hyperboliques des multiples de $2A_0$; il suffit, pour cela, de développer $\sin^{2m} A_0$ et d'intégrer après avoir tout multiplié par dA_0 : on trouve ainsi

$$A_m = \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{\frac{\sin 2m A_0}{2m} - \frac{2m}{1}\frac{\sin(2m-2)A_0}{2m-2} + \frac{2m(2m-1)}{1.2}\frac{\sin(2m-4)A_0}{2m-4} - \cdots \pm \frac{1}{2}\frac{2m(2m-1)\,(2m-2)\cdots(m+1)}{1.2.3\cdots m}A_0\right\}.$$

Enfin, au moyen des fonctions trigonométriques, si l'on pose

$$\cos\theta = \frac{h'}{y'},$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y''-h''}{2y''}};\quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{y''+h''}{2y''}};\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{y''-h''}{y''+h''}},\qquad (\mu)$$

puis

$$A_m = \int \frac{\operatorname{tang}^{2m}\theta}{\cos\theta}\,d\theta; \qquad (\nu)$$

on aura

$$2m\,A_m = \frac{\operatorname{tang}^{2m-1}\theta}{\cos\theta} - (2m-1)\,A_{m-1},$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta),\\ 2\,A_1 &= \sec\theta\operatorname{tang}\theta - 1\,A_0,\\ 4\,A_2 &= \sec\theta\operatorname{tang}^3\theta - 3\,A_1,\\ 6\,A_3 &= \sec\theta\operatorname{tang}^5\theta - 5\,A_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} (\xi)$$

L'angle θ et la fonction A_0, dans les formules qui dépendent des sinus hyperboliques, étant affectés du double signe, il devient inutile de conserver le signe $\pm$ qui affecte le premier membre de l'équation de l'intrados. On voit d'ailleurs clairement que la fonction A_m est une fonction impaire de θ dans les formules qui contiennent les fonctions trigonométriques, et de A_0 dans les autres, comme cela doit être.

Les formules que nous venons de présenter auraient pu servir au calcul de notre Table I; et elles serviraient, au besoin, à en augmenter l'étendue. Toutefois, la concordance parfaite entre les résultats qu'elles fournissent et ceux qui sont consignés dans cette même table offrent une nouvelle preuve de l'exactitude de nos calculs. Donnons un exemple de l'application numérique des formules précédentes : supposons qu'il s'agisse de construire l'une des

tables dont se compose la Table I; nous exclurons les termes du deuxième ordre et nous observerons que l'équation (α) comparée à la deuxième équation (3), n° 36, donne

$$q''^2 = 2\,Q^2; \qquad (o)$$

de cette manière, la série deviendra

$$\frac{x''}{Q} = A_0 - \frac{3}{2}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)A_1 - \frac{1}{2}\frac{5}{4}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^2 A_2 - \frac{1.3}{2.4}\frac{7}{6}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^3 A_3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{9}{8}\left(\frac{h''^2}{4Q^2}\right)^4 A_4 - \text{etc.} \qquad (\varpi)$$

Au même degré d'approximation, l'on a

$$h'' = Y_0, \quad y''_1 = f + h'', \quad x''_1 = g, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{f}{f+2h''}}. \qquad (\rho)$$

Si l'on se donne le rapport $\frac{Y_0}{f}$, on voit que les fonctions A_0, A_1,.. seront des constantes pour chacune des tables, et que $\frac{g}{f}$ sera une fonction de $\frac{Q}{f}$ ou de $\frac{Q^2}{f^2}$ seulement.

Soit, par exemple,

$$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1}{\sqrt{2{,}4}}, \text{ d'où } \tfrac{1}{2}\theta = 32^\circ\,50'\,31'',67; \quad \theta = 65^\circ\,41'\,3'',35,$$

puis

$$A_0 = 1{,}5350817; \quad \text{l.}A_1 = 0{,}2832641; \quad \text{l.}A_2 = 0{,}711086;$$
$$\text{l.}A_3 = 1{,}235668; \quad \text{l.}A_4 = 1{,}80542; \quad \text{l.}A_5 = 2{,}40111.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient la formule

$$\frac{g}{f}\frac{f}{Q} = 1{,}5350817 - (9{,}5474914)\frac{f^2}{Q^2} - (8{,}683238)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^2$$
$$- (8{,}141054)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^3 - (7{,}703397)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^4$$
$$- (7{,}32004)\left(\frac{f^2}{Q^2}\right)^5 - \text{etc.},$$

dans laquelle les nombres entre parenthèses sont les logarithmes des facteurs numériques dont ils tiennent la place. Cette formule permettrait de calculer avec une grande facilité la table inverse de celle qui forme la quatrième colonne de la Table I; mais elle se prêterait moins facilement au calcul de la fonction $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$ donnée dans la Table II.

En faisant, par exemple, $\frac{Q^2}{f^2} = 5{,}8$, les termes de la série deviendront

$$+ 1{,}5350817$$
$$- 0{,}0608224$$
$$- 0{,}0014334$$
$$- 0{,}0000709$$
$$- 0{,}0000045$$
$$- 0{,}0000003$$

$$\text{somme} = 1{,}4727502 = \frac{g}{f}\frac{f}{Q}, \quad \text{d'où } \frac{g}{f} = 3{,}546853;$$

or ce résultat coïncide, à une unité près du dernier ordre, avec celui que nous avons obtenu en calculant nos tables à l'aide des formules du n° 36, et l'on ne pourrait pas répondre d'une unité de cet ordre, dans les calculs. Si l'on cherche dans la Table I la valeur de $\frac{g}{f}$ correspondante à $\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$ et $\frac{Q^2}{f^2} = 5{,}8$, on trouvera $\frac{g}{f} = 3{,}54685$, seules figures que peut donner cette table.

L'intégrale de l'équation (β) peut encore être exprimée au moyen d'une autre série, en posant, comme dans le n° 35 *bis*,

$$\cos\alpha' = 1 - \frac{\gamma''^2 - h''^2}{q''^2}, \qquad (\sigma)$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha' = \pm\sqrt{\frac{\gamma''^2 - h''^2}{2q''^2}}, \qquad (\tau)$$

puis

$$\sin\alpha'\,d\alpha' = \frac{2y''}{q''^2}\,dy'' : \qquad (\upsilon)$$

on pourra mettre d'abord l'équation (β) sous la forme

$$\frac{dx''}{dy''} = \frac{\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'}, \qquad (\varphi)$$

et l'on aura, à cause de $\frac{dx''}{dy''} = \cot\alpha$,

$$\cot\alpha - \cot\alpha' = -\frac{\frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}}{\sin\alpha'},$$

d'où l'on tire aisément

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\sin\alpha'. \qquad (\chi)$$

L'interprétation géométrique de cette relation entre les angles α et α' a été présentée dans le n° 35 *bis*. L'angle α se déduira avec facilité du système des équations (τ) et (χ).

En éliminant y'' et dy'' entre les trois équations (σ), (υ) et (φ), et posant, pour abréger,

$$\xi = \frac{q'^2}{q'^2 + h'^2}, \qquad (\psi)$$

il vient

$$2\frac{dx''}{\sqrt{q''^2 + h'^2}} = \frac{\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)}{\sqrt{1 - \xi\cos\alpha'}}\,d\alpha'. \qquad (\omega)$$

Pour intégrer cette expression, ayant effectué le développement de la quantité $1 - \xi\cos\alpha'$ à la puissance $-\frac{1}{2}$, et multiplié ensuite par $\xi\left(\cos\alpha' - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q''^2}\right)d\alpha'$, nous avons obtenu une suite de

termes de la forme $\cos^m\alpha' d\alpha'$ auxquels a été appliquée la formule de réduction

$$\int \cos^m\alpha' d\alpha' = \frac{1}{m}\sin\alpha'\cos^{m-1}\alpha' + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}\alpha' d\alpha'.$$

Nous nous bornerons à présenter le résultat des calculs. Posant

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= \frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
C_1 &= \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
C_2 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^3}{3}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
C_3 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^4}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha')$$

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\frac{\xi}{1}\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{2.4}{3.5}\xi^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}\frac{2.4.6}{3.5.7}\xi^6 + \ldots\right)\\
c_1 &= \frac{1.3}{2.4}\frac{\xi^3}{2}\left(1 + \frac{5.7}{6.8}\frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5.7.9.11}{6.8.10.12}\frac{3.5}{4.6}\xi^4 + \ldots\right)\\
c_2 &= \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\xi^5}{3}\left(1 + \frac{7.9}{8.10}\frac{4}{5}\xi^2 + \ldots\right)\\
c_3 &= \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\xi^6}{4}\left(1 + \ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (\beta')$$

on a pour intégrale de l'équation (ω),

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{x''}{\sqrt{q''^2+h''^2}} &= C_1\alpha' + C_0\sin\alpha' + C_1\sin\alpha'\cos\alpha' + C_2\sin\alpha'\cos^2\alpha' + C_3\sin\alpha'\cos^3\alpha' + \ldots\\
&\quad - \frac{1}{3}\frac{e^2}{q'^2}\xi\left\{\begin{aligned}&(1+c_1)\alpha' + c_0\sin\alpha' + c_1\sin\alpha'\cos\alpha'\\ &+ c_2\sin\alpha'\cos^2\alpha' + c_3\sin\alpha'\cos^3\alpha' + \ldots\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (\gamma')$$

La constante de l'intégration est nulle, attendu que l'on suppose x'' nul lorsque y'' est égal à h''. On aurait pu se proposer d'obtenir l'intégrale sous forme d'une suite de termes procédant suivant les sinus des multiples de α' : pour cela il eût fallu transformer les puissances de cosinus en cosinus de multiples. L'expression (γ'), qui contient l'angle α' en dehors des signes sinus et cosinus, met en évidence la reproduction périodique des mêmes formes de la courbe intrados : elle ne pourrait être de quelque utilité que dans les cas où la constante ξ serait une fraction assez petite, comme dans ceux que présentent les tunnels et les *poitrails*.

Considérons le cas idéal où l'on supposerait l'épaisseur nulle, et la hauteur h'' infinie : soit f'' la flèche correspondante à la valeur maximum de x''; l'équation (ω) donne pour condition de ce maximum, $\cos\alpha' = 0$; l'équation (σ), en y égalant son second membre à zéro, et écrivant $f'' + h''$ à la place de y'', fournit la valeur de la constante q''^2,

$$q'^2 = f''(f'' + 2h''), \qquad (\delta')$$

d'où résulte

$$q''^2 + h''^2 = (f'' + h'')^2; \qquad \xi = \frac{f''(f'' + 2h'')}{(f'' + h'')^2}. \qquad (\varepsilon')$$

La flèche f'' étant finie, on voit que la quantité ξ est infiniment petite du premier ordre. Cette circonstance réduit l'équation (γ') à

$$2x'' \frac{f'' + h''}{f''(f'' + 2h'')} = \sin\alpha',$$

en vertu des valeurs précédentes; l'équation (σ) donne elle-même

$$1 - \frac{(y'' - h'')(y'' + h'')}{f''(f'' + 2h'')} = \cos\alpha'.$$

Éliminant α' entre ces deux équations, il vient

$$4\frac{x''^2}{f''^2}\left(\frac{f'' + h''}{f'' + 2h''}\right)^2 + \left[\frac{(y'' - h'')(y'' + h'') - f''(f'' + 2h'')}{f''(f'' + 2h'')}\right]^2 = 1.$$

Or, on peut négliger ici f'' devant h'' et mettre $2h''$ à la place de $y'' + h''$, en sorte que cette équation se réduit à

$$\frac{x''^2}{f''^2} + \frac{(y'' - h'' - f')^2}{f''^2} = 1,$$

équation qui n'est autre chose que celle d'un cercle de rayon f'', et dont le centre a pour ordonnée $h'' + f''$. Ce résultat était facile à prévoir, d'après ce qui a été dit plusieurs fois à l'égard des hauteurs de charge considérables.

Nous ne nous étendrons pas sur l'usage que l'on pourrait faire des expressions de x'' en séries; nous croyons en avoir assez dit pour que chacun, au besoin, puisse aisément tirer parti de ces développements.

PONTS TERMINÉS PAR DES ARCHES SECONDAIRES DE DIMENSIONS GÉNÉRALEMENT MOINDRES QUE CELLES DES ARCHES PRINCIPALES.

Dans l'impossibilité d'aborder ici, sous toutes ses faces, le problème que présente l'établissement des ponts formés d'arches inégales, nous nous bornerons à des indications sommaires. Ces indications suffiront aux ingénieurs qui possèdent les notions relatives à l'établissement d'un massif de maçonnerie soumis à l'action de forces données.

Les arches principales et les arches secondaires sont séparées par une pile de largeur beaucoup plus considérable que celle des piles interposées entre les arches principales. Cette pile peut être envisagée comme faisant, en partie, fonction de culée à l'égard des deux arches inégales. Le défaut de symétrie de ces arches entraîne une complication dont la question de l'établissement des piles ordinaires se trouve exempte.

Supposons tout d'abord les diverses parties de la construction déterminées, la question à examiner sera celle de la stabilité de la pile-culée qui sépare deux arches inégales. A cet effet, considérons l'équilibre d'une portion de cette pile-culée limitée dans

le sens vertical par deux plans menés, l'un par celle des arêtes inférieures des deux extrados qui est la plus élevée, l'autre à un niveau inférieur d'une quantité quelconque au niveau le moins élevé des naissances des deux intrados, les limites dans le sens horizontal étant les plans des pieds-droits, et un plan vertical passant par l'arête inférieure la moins élevée des deux extrados, tandis que les plans de joint des naissances achèvent de déterminer la portion de la pile-culée dont il s'agit. Les forces qui sollicitent ce système considéré dans son ensemble, doivent satisfaire aux conditions de l'équilibre d'un corps solide; celles d'entre elles qui sont censées connues sont : le poids des matériaux qui reposent directement sur le plan horizontal supérieur et le poids propre du système, puis les poussées exercées normalement aux plans des naissances, enfin la poussée horizontale produite par le massif contre le plan vertical mené par l'arête inférieure la moins élevée des deux intrados. Les points d'application de ces forces sont d'ailleurs également connus, en sorte que leur résultante, qui ne se réduira pas généralement à un couple, étant prise en sens contraire, déterminera la résultante des réactions exercées contre le plan inférieur dans le cas de l'équilibre. Sous le rapport de la stabilité, la direction, l'intensité et la situation des points d'application de cette force devront satisfaire à des conditions relatives à la nature des matériaux et à l'hypothèse faite sur la distribution des réactions (voir la note du n° 49). La détermination des actions intérieures qui se développent dans le système, présente des difficultés insurmontables dans l'état actuel de nos connaissances en cette matière, et l'on ne peut que recommander d'apporter dans le choix des pierres et mortiers et leur arrangement, toutes les précautions nécessaires pour que l'ensemble puisse être assimilé à un seul corps solide, lors du décintrement des arches.

Supposons que les conditions de stabilité soient remplies à l'égard du système limité inférieurement par l'assise correspondante à celle des naissances qui est la moins élevée; il sera facile,

en partant de la résultante obtenue, et au moyen des poids des assises inférieures, de construire le polygone des pressions exercées sur les surfaces de joint des diverses assises jusqu'aux fondations. Les diverses résultantes obtenues devront pouvoir satisfaire aux mêmes conditions que ci-dessus, pour que la stabilité de la pile-culée soit assurée.

Si ces conditions n'étaient pas remplies, on serait dans la nécessité de modifier une ou plusieurs des données du problème qui ne seraient pas fixées d'une manière absolue, et le sens de ces modifications serait facile à découvrir : une suite de tâtonnements, en l'absence d'un système de formules appropriées à la question, conduirait à la détermination d'un ensemble d'éléments qui satisferait aux conditions de stabilité.

Les différentes manières suivant lesquelles on groupera ceux des éléments de la construction que l'on pourra regarder comme donnés, présenteront autant de problèmes distincts, dont la solution dépendra des courtes notions que nous venons d'exposer.

L'auteur du mémoire qu'on vient de lire, ayant abandonné en 1846 la carrière de l'ingénieur pour entrer à l'Observatoire de Paris, s'est trouvé, par suite de l'exigence de ses nouvelles fonctions, dans l'impossibilité de continuer ses recherches sur la théorie des voûtes, et il s'est décidé à présenter la deuxième partie de son mémoire à l'Académie, quoiqu'il n'eût point encore calculé de tables relatives aux arches dites *en arc de cercle,* ni produit d'application de pareilles tables.

La nécessité de combler une telle lacune a déterminé l'auteur, au moment de l'impression du mémoire, à consacrer la partie disponible de son temps au calcul de nouvelles tables : cette

circonstance l'a empêché de réduire l'étendue de la première partie du mémoire, et de rechercher, quant à la seconde, une distribution des matières qui lui permît d'éviter les répétitions qu'on y pourrait remarquer.

TABLES

RELATIVES

A L'ÉTABLISSEMENT DES ARCHES INCOMPLÈTES,

DITES *EN ARC DE CERCLE*,

ET

DES ARCHES COMPLÈTES, OU *EN ANSE DE PANIER*.

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
3,50	3,6144	189	4,3019	226	4,9830	262	5,6600	297	6,3340	333
3,51	3,6333	190	4,3245	226	5,0092	262	5,6897	298	6,3673	333
3,52	3,6523	190	4,3471	227	5,0354	263	5,7195	299	6,4006	335
3,53	3,6713	190	4,3698	227	5,0617	264	5,7494	300	6,4341	336
3,54	3,6903	192	4,3925	228	5,0881	265	5,7794	301	6,4677	337
3,55	3,7095	191	4,4153	229	5,1146	265	5,8095	301	6,5014	338
3,56	3,7286	193	4,4382	229	5,1411	266	5,8396	303	6,5352	339
3,57	3,7479	192	4,4611	230	5,1677	266	5,8699	303	6,5691	339
3,58	3,7671	194	4,4841	230	5,1943	268	5,9002	305	6,6030	341
3,59	3,7865	194	4,5071	232	5,2211	268	5,9307	304	6,6371	342
3,60	3,8059	195	4,5303	232	5,2479	270	5,9611	306	6,6713	343
3,61	3,8254	194	4,5535	233	5,2749	269	5,9917	307	6,7056	343
3,62	3,8448	196	4,5768	233	5,3018	271	6,0224	308	6,7399	344
3,63	3,8644	196	4,6001	234	5,3289	271	6,0532	308	6,7743	346
3,64	3,8840	197	4,6235	234	5,3560	272	6,0840	309	6,8089	346
3,65	3,9037	197	4,6469	235	5,3832	273	6,1149	310	6,8435	347
3,66	3,9234	198	4,6704	236	5,4105	273	6,1459	312	6,8782	349
3,67	3,9432	198	4,6940	236	5,4378	274	6,1771	311	6,9131	349
3,68	3,9630	199	4,7176	238	5,4652	275	6,2082	313	6,9480	350
3,69	3,9829	199	4,7414	237	5,4927	276	6,2395	313	6,9830	352
3,70	4,0028	200	4,7651	238	5,5203	277	6,2708	315	7,0182	351
3,71	4,0228	200	4,7889	239	5,5480	277	6,3023	315	7,0533	353
3,72	4,0428	202	4,8128	240	5,5757	278	6,3338	316	7,0886	354
3,73	4,0630	201	4,8368	241	5,6035	279	6,3654	317	7,1240	355
3,74	4,0831	202	4,8609	241	5,6314	279	6,3971	318	7,1595	356
3,75	4,1033	203	4,8850	241	5,6593	280	6,4289	318	7,1951	357
3,76	4,1236	203	4,9091	242	5,6873	281	6,4607	319	7,2308	358
3,77	4,1439	204	4,9333	243	5,7154	282	6,4926	321	7,2666	359
3,78	4,1643	204	4,9576	244	5,7436	282	6,5247	321	7,3025	359
3,79	4,1847	204	4,9820	244	5,7718	283	6,5568	322	7,3384	360
3,80	4,2051		5,0064		5,8001		6,5890		7,3744	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
3,50	7,0059	368	7,6761	405	8,3454	439	9,0136	475	9,6810	510
3,51	7,0427	370	7,7166	405	8,3893	441	9,0611	476	9,7320	512
3,52	7,0797	371	7,7571	407	8,4334	442	9,1087	477	9,7832	513
3,53	7,1168	372	7,7978	408	8,4776	443	9,1564	479	9,8345	515
3,54	7,1540	372	7,8386	408	8,5219	445	9,2043	480	9,8860	516
3,55	7,1912	374	7,8794	410	8,5664	445	9,2523	482	9,9376	518
3,56	7,2286	376	7,9204	411	8,6109	447	9,3005	483	9,9894	518
3,57	7,2662	375	7,9615	412	8,6556	449	9,3488	485	10,0412	520
3,58	7,3037	377	8,0027	413	8,7005	449	9,3973	485	10,0932	522
3,59	7,3414	378	8,0440	415	8,7454	451	9,4458	487	10,1454	524
3,60	7,3792	379	8,0855	415	8,7905	452	9,4945	489	10,1978	524
3,61	7,4171	380	8,1270	417	8,8357	454	9,5434	490	10,2502	526
3,62	7,4551	382	8,1687	418	8,8811	454	9,5924	491	10,3028	528
3,63	7,4933	382	8,2105	419	8,9265	456	9,6415	492	10,3556	529
3,64	7,5315	383	8,2524	420	8,9721	457	9,6907	494	10,4085	531
3,65	7,5698	385	8,2944	422	9,0178	459	9,7401	495	10,4616	532
3,66	7,6083	385	8,3366	422	9,0637	459	9,7896	497	10,5148	533
3,67	7,6468	387	8,3788	424	9,1096	461	9,8393	498	10,5681	535
3,68	7,6855	387	8,4212	425	9,1557	462	9,8891	499	10,6216	537
3,69	7,7242	389	8,4637	426	9,2019	463	9,9390	500	10,6753	538
3,70	7,7631	389	8,5063	427	9,2482	465	9,9890	502	10,7291	539
3,71	7,8020	391	8,5490	429	9,2947	466	10,0392	504	10,7830	541
3,72	7,8411	392	8,5919	429	9,3413	467	10,0896	505	10,8371	542
3,73	7,8803	393	8,6348	431	9,3880	468	10,1401	506	10,8913	544
3,74	7,9196	394	8,6779	431	9,4348	470	10,1907	507	10,9457	545
3,75	7,9590	395	8,7210	433	9,4818	470	10,2414	508	11,0002	546
3,76	7,9985	396	8,7643	435	9,5288	472	10,2922	510	11,0548	548
3,77	8,0381	397	8,8078	435	9,5760	474	10,3432	512	11,1096	549
3,78	8,0778	398	8,8513	436	9,6234	475	10,3944	513	11,1645	551
3,79	8,1176	399	8,8949	437	9,6709	476	10,4457	514	11,2196	553
3,80	8,1575		8,9386		9,7185		10,4971		11,2749	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q'}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
3,80	4,2051	206	5,0064	245	5,8001	285	6,5890	323	7,3744	362
3,81	4,2257	205	5,0309	245	5,8286	284	6,6213	324	7,4106	363
3,82	4,2462	207	5,0554	246	5,8570	286	6,6537	324	7,4469	363
3,83	4,2669	207	5,0800	247	5,8856	286	6,6861	326	7,4832	365
3,84	4,2876	208	5,1047	248	5,9142	287	6,7187	326	7,5197	365
3,85	4,3084	207	5,1295	248	5,9429	287	6,7513	327	7,5562	367
3,86	4,3291	209	5,1543	249	5,9716	289	6,7840	328	7,5929	367
3,87	4,3500	209	5,1792	249	6,0005	289	6,8168	329	7,6296	369
3,88	4,3709	210	5,2041	250	6,0294	290	6,8497	329	7,6665	369
3,89	4,3919	210	5,2291	250	6,0584	291	6,8826	331	7,7034	370
3,90	4,4129	210	5,2541	251	6,0875	291	6,9157	331	7,7404	371
3,91	4,4339	212	5,2792	252	6,1166	293	6,9488	332	7,7775	371
3,92	4,4551	211	5,3044	253	6,1459	292	6,9820	333	7,8146	373
3,93	4,4762	212	5,3297	253	6,1751	294	7,0153	334	7,8519	374
3,94	4,4974	214	5,3550	254	6,2045	295	7,0487	335	7,8893	375
3,95	4,5188	213	5,3804	255	6,2340	295	7,0822	336	7,9268	376
3,96	4,5401	214	5,4059	255	6,2635	296	7,1158	336	7,9644	377
3,97	4,5615	215	5,4314	256	6,2931	296	7,1494	338	8,0021	378
3,98	4,5830	214	5,4570	256	6,3227	298	7,1832	338	8,0399	378
3,99	4,6044	216	5,4826	257	6,3525	298	7,2170	339	8,0777	380
4,00	4,6260	216	5,5083	258	6,3823	299	7,2509	339	8,1157	381
4,01	4,6476	217	5,5341	258	6,4122	299	7,2848	341	8,1538	381
4,02	4,6693	217	5,5599	259	6,4421	301	7,3189	342	8,1919	382
4,03	4,6910	218	5,5858	259	6,4722	301	7,3531	342	8,2301	384
4,04	4,7128	218	5,6117	261	6,5023	302	7,3873	344	8,2685	385
4,05	4,7346	219	5,6378	261	6,5325	303	7,4217	344	8,3070	385
4,06	4,7565	219	5,6639	261	6,5628	303	7,4561	345	8,3455	387
4,07	4,7784	220	5,6900	262	6,5931	304	7,4906	345	8,3842	387
4,08	4,8004	220	5,7162	263	6,6235	305	7,5251	347	8,4229	388
4,09	4,8224	221	5,7425	264	6,6540	305	7,5598	348	8,4617	389
4,10	4,8445		5,7689		6,6845		7,5946		8,5006	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
3,80	8,1575	400	8,9386	439	9,7185	477	10,4971	516	11,2749	554
3,81	8,1975	401	8,9825	440	9,7662	478	10,5487	517	11,3303	555
3,82	8,2376	402	9,0265	441	9,8140	480	10,6004	518	11,3858	557
3,83	8,2778	404	9,0706	442	9,8620	481	10,6522	519	11,4415	558
3,84	8,3182	404	9,1148	444	9,9101	482	10,7041	521	11,4973	560
3,85	8,3586	406	9,1592	444	9,9583	483	10,7562	522	11,5533	561
3,86	8,3992	406	9,2036	446	10,0066	484	10,8084	524	11,6094	563
3,87	8,4398	408	9,2482	446	10,0550	486	10,8608	525	11,6657	564
3,88	8,4806	408	9,2928	448	10,1036	488	10,9133	526	11,7221	565
3,89	8,5214	410	9,3376	449	10,1524	488	10,9659	528	11,7786	567
3,90	8,5624	411	9,3825	451	10,2012	490	11,0187	530	11,8353	569
3,91	8,6035	412	9,4276	451	10,2502	491	11,0717	530	11,8922	570
3,92	8,6447	413	9,4727	453	10,2993	492	11,1247	532	11,9492	571
3,93	8,6860	413	9,5180	453	10,3485	493	11,1779	533	12,0063	573
3,94	8,7273	415	9,5633	455	10,3978	495	11,2312	534	12,0636	574
3,95	8,7688	416	9,6088	456	10,4473	496	11,2846	536	12,1210	576
3,96	8,8104	417	9,6544	458	10,4969	497	11,3382	537	12,1786	577
3,97	8,8521	418	9,7002	458	10,5466	499	11,3919	539	12,2363	579
3,98	8,8939	419	9,7460	459	10,5965	500	11,4458	540	12,2942	580
3,99	8,9358	420	9,7919	461	10,6465	501	11,4998	541	12,3522	581
4,00	8,9778	422	9,8380	462	10,6966	502	11,5539	543	12,4103	583
4,01	9,0200	422	9,8842	462	10,7468	503	11,6082	544	12,4686	584
4,02	9,0622	424	9,9304	464	10,7971	505	11,6626	545	12,5270	586
4,03	9,1046	424	9,9768	466	10,8476	506	11,7171	547	12,5856	588
4,04	9,1470	425	10,0234	466	10,8982	507	11,7718	548	12,6444	589
4,05	9,1895	427	10,0700	468	10,9489	509	11,8266	549	12,7033	590
4,06	9,2322	428	10,1168	468	10,9998	510	11,8815	551	12,7623	592
4,07	9,2750	428	10,1636	470	11,0508	511	11,9366	552	12,8215	593
4,08	9,3178	430	10,2106	472	11,1019	512	11,9918	553	12,8808	595
4,09	9,3608	430	10,2578	472	11,1531	513	12,0471	555	12,9403	596
4,10	9,4038		10,3050		11,2044		12,1026		12,9999	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
4,10	4,8445	222	5,7689	264	6,6845	307	7,5946	348	8,5006	390
4,11	4,8667	222	5,7953	265	6,7152	307	7,6294	349	8,5396	391
4,12	4,8889	223	5,8218	266	6,7459	308	7,6643	350	8,5787	392
4,13	4,9112	223	5,8484	266	6,7767	309	7,6993	351	8,6179	393
4,14	4,9335	224	5,8750	266	6,8076	309	7,7344	351	8,6572	394
4,15	4,9559	224	5,9016	268	6,8385	310	7,7695	353	8,6966	395
4,16	4,9783	225	5,9284	268	6,8695	311	7,8048	353	8,7361	396
4,17	5,0008	225	5,9552	269	6,9006	311	7,8401	355	8,7757	397
4,18	5,0233	226	5,9821	269	6,9317	313	7,8756	355	8,8154	398
4,19	5,0459	226	6,0090	270	6,9630	313	7,9111	356	8,8552	398
4,20	5,0685	227	6,0360	270	6,9943	314	7,9467	358	8,8950	400
4,21	5,0912	228	6,0630	271	7,0257	314	7,9825	357	8,9350	400
4,22	5,1140	228	6,0901	272	7,0571	315	8,0182	358	8,9750	402
4,23	5,1368	228	6,1173	273	7,0886	316	8,0540	359	9,0152	402
4,24	5,1596	229	6,1446	273	7,1202	317	8,0899	360	9,0554	404
4,25	5,1825	230	6,1719	274	7,1519	318	8,1259	361	9,0958	404
4,26	5,2055	230	6,1993	274	7,1837	318	8,1620	363	9,1362	405
4,27	5,2285	231	6,2267	275	7,2155	319	8,1983	362	9,1767	406
4,28	5,2516	231	6,2542	276	7,2474	320	8,2345	364	9,2173	407
4,29	5,2747	232	6,2818	276	7,2794	321	8,2709	364	9,2580	409
4,30	5,2979	232	6,3094	278	7,3115	321	8,3073	366	9,2989	409
4,31	5,3211	233	6,3372	277	7,3436	322	8,3439	366	9,3398	410
4,32	5,3444	233	6,3649	278	7,3758	323	8,3805	367	9,3808	411
4,33	5,3677	234	6,3927	279	7,4081	324	8,4172	368	9,4219	412
4,34	5,3911	235	6,4206	280	7,4405	324	8,4540	368	9,4631	413
4,35	5,4146	234	6,4486	280	7,4729	325	8,4908	370	9,5044	414
4,36	5,4380	236	6,4766	281	7,5054	326	8,5278	370	9,5458	415
4,37	5,4616	236	6,5047	281	7,5380	326	8,5648	372	9,5873	416
4,38	5,4852	237	6,5328	282	7,5706	327	8,6020	372	9,6289	416
4,39	5,5089	237	6,5610	283	7,6033	328	8,6392	373	9,6705	418
4,40	5,5326		6,5893		7,6361		8,6765		9,7123	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
4,10	9,4038	432	10,3050	473	11,2044	515	12,1026	556	12,9999	597
4,11	9,4470	433	10,3523	474	11,2559	516	12,1582	558	13,0596	599
4,12	9,4903	434	10,3997	475	11,3075	517	12,2140	559	13,1195	600
4,13	9,5337	435	10,4472	477	11,3592	519	12,2699	560	13,1795	602
4,14	9,5772	436	10,4949	478	11,4111	520	12,3259	562	13,2397	604
4,15	9,6208	437	10,5427	479	11,4631	521	12,3821	563	13,3001	605
4,16	9,6645	438	10,5906	481	11,5152	522	12,4384	564	13,3606	606
4,17	9,7083	439	10,6387	481	11,5674	524	12,4948	566	13,4212	608
4,18	9,7522	440	10,6868	483	11,6198	525	12,5514	567	13,4820	609
4,19	9,7962	441	10,7351	483	11,6723	526	12,6081	569	13,5429	610
4,20	9,8403	443	10,7834	485	11,7249	527	12,6650	569	13,6039	612
4,21	9,8846	443	10,8319	486	11,7776	529	12,7219	571	13,6651	614
4,22	9,9289	444	10,8805	487	11,8305	529	12,7790	573	13,7265	615
4,23	9,9733	445	10,9292	489	11,8834	531	12,8363	574	13,7880	617
4,24	10,0178	447	10,9781	489	11,9365	533	12,8937	575	13,8497	618
4,25	10,0625	448	11,0270	491	11,9898	533	12,9512	576	13,9115	619
4,26	10,1073	449	11,0761	492	12,0431	535	13,0088	578	13,9734	621
4,27	10,1522	449	11,1253	493	12,0966	536	13,0666	579	14,0355	622
4,28	10,1971	451	11,1746	494	12,1502	538	13,1245	581	14,0977	624
4,29	10,2422	451	11,2240	495	12,2040	538	13,1826	582	14,1601	625
4,30	10,2873	453	11,2735	496	12,2578	540	13,2408	583	14,2226	627
4,31	10,3326	454	11,3231	498	12,3118	541	13,2991	585	14,2853	628
4,32	10,3780	455	11,3729	499	12,3659	543	13,3576	586	14,3481	629
4,33	10,4235	456	11,4228	499	12,4202	543	13,4162	587	14,4110	631
4,34	10,4691	457	11,4727	501	12,4745	545	13,4749	589	14,4741	633
4,35	10,5148	458	11,5228	502	12,5290	546	13,5338	590	14,5374	634
4,36	10,5606	459	11,5730	504	12,5836	548	13,5928	591	14,6008	635
4,37	10,6065	461	11,6234	504	12,6384	548	13,6519	593	14,6643	637
4,38	10,6526	461	11,6738	506	12,6932	550	13,7112	594	14,7280	639
4,39	10,6987	462	11,7244	507	12,7482	551	13,7706	596	14,7919	640
4,40	10,7449		11,7751		12,8033		13,8302		14,8559	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
4,40	5,5326	238	6,5893	284	7,6361	329	8,6765	374	9,7123	419
4,41	5,5564	238	6,6177	284	7,6690	329	8,7139	374	9,7542	419
4,42	5,5802	239	6,6461	285	7,7019	331	8,7513	376	9,7961	421
4,43	5,6041	239	6,6746	285	7,7350	331	8,7889	376	9,8382	421
4,44	5,6280	240	6,7031	286	7,7681	332	8,8265	377	9,8803	423
4,45	5,6520	240	6,7317	287	7,8013	333	8,8642	378	9,9226	423
4,46	5,6760	241	6,7604	288	7,8346	333	8,9020	380	9,9649	424
4,47	5,7001	242	6,7892	287	7,8679	334	8,9400	379	10,0073	426
4,48	5,7243	242	6,8179	289	7,9013	335	8,9779	381	10,0499	426
4,49	5,7485	243	6,8468	289	7,9348	335	9,0160	381	10,0925	427
4,50	5,7728	243	6,8757	290	7,9683	336	9,0541	382	10,1352	429
4,51	5,7971	244	6,9047	291	8,0019	337	9,0923	383	10,1781	429
4,52	5,8215	244	6,9338	291	8,0356	338	9,1306	384	10,2210	430
4,53	5,8459	244	6,9629	292	8,0694	339	9,1690	385	10,2640	430
4,54	5,8703	245	6,9921	292	8,1033	339	9,2075	386	10,3070	432
4,55	5,8948	246	7,0213	293	8,1372	340	9,2461	386	10,3502	433
4,56	5,9194	247	7,0506	294	8,1712	341	9,2847	388	10,3935	434
4,57	5,9441	247	7,0800	295	8,2053	341	9,3235	388	10,4369	435
4,58	5,9688	247	7,1095	295	8,2394	342	9,3623	389	10,4804	436
4,59	5,9935	248	7,1390	295	8,2736	344	9,4012	390	10,5240	436
4,60	6,0183	249	7,1685	297	8,3080	343	9,4402	391	10,5676	438
4,61	6,0432	249	7,1982	297	8,3423	345	9,4793	392	10,6114	439
4,62	6,0681	250	7,2279	298	8,3768	345	9,5185	392	10,6553	440
4,63	6,0931	249	7,2577	298	8,4113	346	9,5577	393	10,6993	440
4,64	6,1180	251	7,2875	298	8,4459	346	9,5970	395	10,7433	441
4,65	6,1431	251	7,3173	300	8,4805	347	9,6365	395	10,7874	443
4,66	6,1682	252	7,3473	300	8,5152	349	9,6760	396	10,8317	443
4,67	6,1934	253	7,3773	301	8,5501	349	9,7156	397	10,8760	444
4,68	6,2187	253	7,4074	302	8,5850	350	9,7553	397	10,9204	445
4,69	6,2440	253	7,4376	302	8,6200	350	9,7950	398	10,9649	447
4,70	6,2693		7,4678		8,6550		9,8348		11,0096	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
4,40	10,7449	464	11,7751	508	12,8033	553	13,8302	597	14,8559	641
4,41	10,7913	464	11,8259	508	12,8586	553	13,8899	598	14,9200	643
4,42	10,8377	465	11,8767	510	12,9139	555	13,9497	599	14,9843	644
4,43	10,8842	467	11,9277	512	12,9694	557	14,0096	601	15,0487	645
4,44	10,9309	467	11,9789	513	13,0251	557	14,0697	602	15,1132	647
4,45	10,9776	469	12,0302	513	13,0808	559	14,1299	604	15,1779	649
4,46	11,0245	470	12,0815	515	13,1367	560	14,1903	605	15,2428	650
4,47	11,0715	470	12,1330	516	13,1927	561	14,2508	607	15,3078	651
4,48	11,1185	472	12,1846	517	13,2488	562	14,3115	607	15,3729	653
4,49	11,1657	473	12,2363	518	13,3050	564	14,3722	609	15,4382	654
4,50	11,2130	474	12,2881	520	13,3614	565	14,4331	611	15,5036	656
4,51	11,2604	474	12,3401	521	13,4179	566	14,4942	612	15,5692	657
4,52	11,3078	476	12,3922	521	13,4745	568	14,5554	613	15,6349	659
4,53	11,3554	477	12,4443	523	13,5313	569	14,6167	614	15,7008	660
4,54	11,4031	478	12,4966	524	13,5882	569	14,6781	616	15,7668	662
4,55	11,4509	479	12,5490	526	13,6451	571	14,7397	617	15,8330	663
4,56	11,4988	480	12,6016	526	13,7022	573	14,8014	619	15,8993	665
4,57	11,5468	482	12,6542	527	13,7595	574	14,8633	619	15,9658	666
4,58	11,5950	482	12,7069	529	13,8169	575	14,9252	621	16,0324	667
4,59	11,6432	484	12,7598	530	13,8744	576	14,9873	623	16,0991	669
4,60	11,6916	484	12,8128	531	13,9320	578	15,0496	624	16,1660	670
4,61	11,7400	486	12,8659	533	13,9898	578	15,1120	626	16,2330	672
4,62	11,7886	486	12,9192	533	14,0476	580	15,1746	626	16,3002	673
4,63	11,8372	487	12,9725	534	14,1056	581	15,2372	628	16,3675	675
4,64	11,8859	488	13,0259	535	14,1637	583	15,3000	629	16,4350	676
4,65	11,9347	490	13,0794	537	14,2220	584	15,3629	631	16,5026	678
4,66	11,9837	491	13,1331	538	14,2804	585	15,4260	632	16,5704	679
4,67	12,0328	492	13,1869	539	14,3389	586	15,4892	634	16,6383	681
4,68	12,0820	493	13,2408	540	14,3975	587	15,5526	635	16,7064	682
4,69	12,1313	494	13,2948	541	14,4562	589	15,6161	636	16,7746	683
4,70	12,1807		13,3489		14,5151		15,6797		16,8429	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
4,70	6,2693	254	7,4678	303	8,6550	351	9,8348	400	11,0096	447
4,71	6,2947	254	7,4981	303	8,6901	352	9,8748	400	11,0543	448
4,72	6,3201	255	7,5284	304	8,7253	353	9,9148	402	11,0991	449
4,73	6,3456	256	7,5588	305	8,7606	353	9,9550	401	11,1440	450
4,74	6,3712	256	7,5893	305	8,7959	354	9,9951	402	11,1890	451
4,75	6,3968	256	7,6198	306	8,8313	355	10,0353	404	11,2341	452
4,76	6,4224	257	7,6504	307	8,8668	356	10,0757	405	11,2793	453
4,77	6,4481	258	7,6811	307	8,9024	356	10,1162	404	11,3246	453
4,78	6,4739	258	7,7118	308	8,9380	357	10,1566	406	11,3699	455
4,79	6,4997	259	7,7426	309	8,9737	359	10,1972	407	11,4154	456
4,80	6,5256	260	7,7735	309	9,0096	358	10,2379	408	11,4610	457
4,81	6,5516	260	7,8044	310	9,0454	359	10,2787	409	11,5067	458
4,82	6,5776	260	7,8354	310	9,0813	360	10,3196	409	11,5525	458
4,83	6,6036	261	7,8664	311	9,1173	362	10,3605	411	11,5983	460
4,84	6,6297	261	7,8975	312	9,1535	361	10,4016	411	11,6443	461
4,85	6,6558	262	7,9287	313	9,1896	363	10,4427	412	11,6904	461
4,86	6,6820	263	7,9600	313	9,2259	363	10,4839	413	11,7365	462
4,87	6,7083	263	7,9913	314	9,2622	364	10,5252	413	11,7827	463
4,88	6,7346	264	8,0227	314	9,2986	364	10,5665	415	11,8290	465
4,89	6,7610	264	8,0541	315	9,3350	366	10,6080	415	11,8755	465
4,90	6,7874	265	8,0856	316	9,3716	366	10,6495	417	11,9220	466
4,91	6,8139	265	8,1172	316	9,4082	367	10,6912	416	11,9686	467
4,92	6,8404	266	8,1488	317	9,4449	367	10,7328	418	12,0153	468
4,93	6,8670	266	8,1805	317	9,4816	369	10,7746	419	12,0621	469
4,94	6,8936	267	8,2122	318	9,5185	369	10,8165	420	12,1090	470
4,95	6,9203	268	8,2440	319	9,5554	370	10,8585	421	12,1560	471
4,96	6,9471	267	8,2759	320	9,5924	370	10,9006	421	12,2031	472
4,97	6,9738	269	8,3079	320	9,6294	372	10,9427	422	12,2503	473
4,98	7,0007	269	8,3399	321	9,6666	372	10,9849	423	12,2976	474
4,99	7,0276	270	8,3720	322	9,7038	373	11,0272	424	12,3450	475
5,00	7,0546		8,4042		9,7411		11,0696		12,3925	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
4,70	12,1807	495	13,3489	543	14,5151	591	15,6797	638	16,8429	685
4,71	12,2302	496	13,4032	544	14,5742	591	15,7435	639	16,9114	686
4,72	12,2798	496	13,4576	545	14,6333	593	15,8074	640	16,9800	688
4,73	12,3294	498	13,5121	546	14,6926	593	15,8714	641	17,0488	689
4,74	12,3792	499	13,5667	547	14,7519	595	15,9355	643	17,1177	691
4,75	12,4291	500	13,6214	548	14,8114	597	15,9998	644	17,1868	692
4,76	12,4791	502	13,6762	550	14,8711	598	16,0642	646	17,2560	694
4,77	12,5293	502	13,7312	550	14,9309	598	16,1288	647	17,3254	695
4,78	12,5795	503	13,7862	552	14,9907	600	16,1935	648	17,3949	697
4,79	12,6298	505	13,8414	553	15,0507	602	16,2583	650	17,4646	698
4,80	12,6803	505	13,8967	554	15,1109	602	16,3233	651	17,5344	699
4,81	12,7308	506	13,9521	555	15,1711	604	16,3884	652	17,6043	701
4,82	12,7814	508	14,0076	556	15,2315	605	16,4536	654	17,6744	702
4,83	12,8322	509	14,0632	558	15,2920	607	16,5190	656	17,7446	704
4,84	12,8831	509	14,1190	558	15,3527	607	16,5846	656	17,8150	706
4,85	12,9340	511	14,1748	560	15,4134	609	16,6502	658	17,8856	707
4,86	12,9851	512	14,2308	561	15,4743	610	16,7160	659	17,9563	708
4,87	13,0363	513	14,2869	562	15,5353	611	16,7819	660	18,0271	709
4,88	13,0876	514	14,3431	564	15,5964	613	16,8479	662	18,0980	711
4,89	13,1390	515	14,3995	564	15,6577	614	16,9141	663	18,1691	713
4,90	13,1905	515	14,4559	566	15,7191	615	16,9804	665	18,2404	714
4,91	13,2420	517	14,5125	566	15,7806	616	17,0469	666	18,3118	715
4,92	13,2937	518	14,5691	568	15,8422	618	17,1135	667	18,3833	717
4,93	13,3455	520	14,6259	569	15,9040	619	17,1802	669	18,4550	719
4,94	13,3975	520	14,6828	571	15,9659	620	17,2471	670	18,5269	720
4,95	13,4495	521	14,7399	571	16,0279	621	17,3141	672	18,5989	721
4,96	13,5016	522	14,7970	572	16,0900	623	17,3813	672	18,6710	723
4,97	13,5538	524	14,8542	574	16,1523	624	17,4485	674	18,7433	724
4,98	13,6062	524	14,9116	575	16,2147	625	17,5159	676	18,8157	726
4,99	13,6586	525	14,9691	576	16,2772	626	17,5835	677	18,8883	727
5,00	13,7111		15,0267		16,3398		17,6512		18,9610	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$ (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
5,00	7,0546	270	8,4042	322	9,7411	373	11,0696	425	12,3925	475
5,01	7,0816	270	8,4364	323	9,7784	374	11,1121	425	12,4400	477
5,02	7,1086	272	8,4687	323	9,8158	375	11,1546	427	12,4877	477
5,03	7,1358	271	8,5010	324	9,8533	376	11,1973	427	12,5354	479
5,04	7,1629	273	8,5334	324	9,8909	377	11,2400	428	12,5833	479
5,05	7,1902	272	8,5658	326	9,9286	377	11,2828	429	12,6312	481
5,06	7,2174	274	8,5984	326	9,9663	378	11,3257	430	12,6793	481
5,07	7,2448	274	8,6310	327	10,0041	379	11,3687	431	12,7274	482
5,08	7,2722	275	8,6637	327	10,0420	380	11,4118	431	12,7756	484
5,09	7,2997	274	8,6964	328	10,0800	380	11,4549	433	12,8240	484
5,10	7,3271	276	8,7292	328	10,1180	381	11,4982	433	12,8724	485
5,11	7,3547	276	8,7620	329	10,1561	382	11,5415	434	12,9209	486
5,12	7,3823	277	8,7949	330	10,1943	382	11,5849	436	12,9695	487
5,13	7,4100	277	8,8279	331	10,2325	383	11,6285	435	13,0182	488
5,14	7,4377	277	8,8610	331	10,2708	384	11,6720	437	13,0670	489
5,15	7,4654	278	8,8941	332	10,3092	385	11,7157	437	13,1159	490
5,16	7,4932	279	8,9273	332	10,3477	386	11,7594	439	13,1649	491
5,17	7,5211	279	8,9605	333	10,3863	386	11,8033	439	13,2140	492
5,18	7,5490	280	8,9938	334	10,4249	387	11,8472	440	13,2632	492
5,19	7,5770	281	9,0272	334	10,4636	388	11,8912	440	13,3124	494
5,20	7,6051	281	9,0606	335	10,5024	389	11,9352	442	13,3618	495
5,21	7,6332	282	9,0941	336	10,5413	389	11,9794	443	13,4113	496
5,22	7,6614	282	9,1277	336	10,5802	390	12,0237	443	13,4609	497
5,23	7,6896	282	9,1613	337	10,6192	391	12,0680	445	13,5106	497
5,24	7,7178	283	9,1950	338	10,6583	391	12,1125	445	13,5603	499
5,25	7,7461	283	9,2288	338	10,6974	392	12,1570	446	13,6102	499
5,26	7,7744	284	9,2626	338	10,7366	394	12,2016	447	13,6601	501
5,27	7,8028	285	9,2964	340	10,7760	393	12,2463	447	13,7102	501
5,28	7,8313	285	9,3304	340	10,8153	395	12,2910	448	13,7603	502
5,29	7,8598	286	9,3644	341	10,8548	395	12,3358	450	13,8105	504
5,30	7,8884		9,3985		10,8943		12,3808		13,8609	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,00	13,7111	527	15,0267	577	16,3398	628	17,6512	678	18,9610	728
5,01	13,7638	527	15,0844	578	16,4026	630	17,7190	680	19,0338	730
5,02	13,8165	529	15,1422	580	16,4656	630	17,7870	680	19,1068	732
5,03	13,8694	529	15,2002	580	16,5286	631	17,8550	682	19,1800	733
5,04	13,9223	531	15,2582	582	16,5917	632	17,9232	684	19,2533	734
5,05	13,9754	532	15,3164	583	16,6549	634	17,9916	685	19,3267	736
5,06	14,0286	532	15,3747	584	16,7183	636	18,0601	686	19,4003	738
5,07	14,0818	534	15,4331	585	16,7819	636	18,1287	688	19,4741	739
5,08	14,1352	535	15,4916	587	16,8455	638	18,1975	689	19,5480	740
5,09	14,1887	536	15,5503	587	16,9093	639	18,2664	690	19,6220	742
5,10	14,2423	537	15,6090	589	16,9732	640	18,3354	692	19,6962	743
5,11	14,2960	538	15,6679	589	17,0372	642	18,4046	693	19,7705	744
5,12	14,3498	539	15,7268	591	17,1014	642	18,4739	695	19,8449	746
5,13	14,4037	540	15,7859	592	17,1656	644	18,5434	696	19,9195	748
5,14	14,4577	541	15,8451	593	17,2300	645	18,6130	697	19,9943	749
5,15	14,5118	542	15,9044	595	17,2945	647	18,6827	698	20,0692	750
5,16	14,5660	544	15,9639	596	17,3592	648	18,7525	700	20,1442	752
5,17	14,6204	544	16,0235	596	17,4240	649	18,8225	701	20,2194	754
5,18	14,6748	546	16,0831	598	17,4889	650	18,8926	703	20,2948	755
5,19	14,7294	546	16,1429	599	17,5539	652	18,9629	704	20,3703	756
5,20	14,7840	548	16,2028	601	17,6191	653	19,0333	706	20,4459	757
5,21	14,8388	548	16,2629	601	17,6844	654	19,1039	706	20,5216	759
5,22	14,8936	550	16,3230	602	17,7498	655	19,1745	708	20,5975	761
5,23	14,9486	550	16,3832	604	17,8153	656	19,2453	709	20,6736	762
5,24	15,0036	552	16,4436	605	17,8809	658	19,3162	711	20,7498	764
5,25	15,0588	553	16,5041	606	17,9467	659	19,3873	712	20,8262	765
5,26	15,1141	554	16,5647	607	18,0126	660	19,4585	713	20,9027	766
5,27	15,1695	555	16,6254	608	18,0786	662	19,5298	715	20,9793	768
5,28	15,2250	556	16,6862	610	18,1448	663	19,6013	716	21,0561	769
5,29	15,2806	557	16,7472	610	18,2111	664	19,6729	717	21,1330	771
5,30	15,3363		16,8082		18,2775		19,7446		21,2101	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$	Diff.
5,30	7,8884	287	9,3985	341	10,8943	396	12,3808	450	13,8609	504
5,31	7,9171	287	9,4326	342	10,9339	397	12,4258	451	13,9113	505
5,32	7,9458	287	9,4668	343	10,9736	397	12,4709	452	13,9618	506
5,33	7,9745	288	9,5011	343	11,0133	398	12,5161	453	14,0124	507
5,34	8,0033	288	9,5354	344	11,0531	400	12,5614	453	14,0631	508
5,35	8,0321	289	9,5698	345	11,0931	399	12,6067	455	14,1139	509
5,36	8,0610	290	9,6043	345	11,1330	400	12,6522	455	14,1648	510
5,37	8,0900	290	9,6388	346	11,1730	402	12,6977	456	14,2158	511
5,38	8,1190	291	9,6734	347	11,2132	402	12,7433	457	14,2669	512
5,39	8,1481	291	9,7081	347	11,2534	403	12,7890	458	14,3181	512
5,40	8,1772	292	9,7428	348	11,2937	403	12,8348	459	14,3693	514
5,41	8,2064	292	9,7776	348	11,3340	404	12,8807	459	14,4207	515
5,42	8,2356	293	9,8124	349	11,3744	405	12,9266	461	14,4722	515
5,43	8,2649	293	9,8473	350	11,4149	406	12,9727	461	14,5237	517
5,44	8,2942	294	9,8823	351	11,4555	407	13,0188	462	14,5754	517
5,45	8,3236	294	9,9174	351	11,4962	407	13,0650	463	14,6271	519
5,46	8,3530	295	9,9525	352	11,5369	408	13,1113	464	14,6790	519
5,47	8,3825	296	9,9877	352	11,5777	408	13,1577	465	14,7309	520
5,48	8,4121	296	10,0229	353	11,6185	410	13,2042	465	14,7829	522
5,49	8,4417	297	10,0582	354	11,6595	410	13,2507	467	14,8351	522
5,50	8,4714	297	10,0936	354	11,7005	411	13,2974	467	14,8873	523
5,51	8,5011	298	10,1290	355	11,7416	411	13,3441	468	14,9396	525
5,52	8,5309	298	10,1645	355	11,7827	412	13,3909	469	14,9921	525
5,53	8,5607	298	10,2000	357	11,8239	414	13,4378	470	15,0446	526
5,54	8,5905	299	10,2357	357	11,8653	414	13,4848	470	15,0972	527
5,55	8,6204	301	10,2714	357	11,9067	415	13,5318	472	15,1499	527
5,56	8,6505	300	10,3071	358	11,9482	415	13,5790	472	15,2026	529
5,57	8,6805	301	10,3429	359	11,9897	416	13,6262	473	15,2555	531
5,58	8,7106	302	10,3788	359	12,0313	417	13,6735	474	15,3086	530
5,59	8,7408	301	10,4147	360	12,0730	418	13,7209	475	15,3616	532
5,60	8,7709		10,4507		12,1148		13,7684		15,4148	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,30	15,3363	558	16,8082	612	18,2775	665	19,7446	719	21,2101	772
5,31	15,3921	559	16,8694	612	18,3440	667	19,8165	720	21,2873	774
5,32	15,4480	560	16,9306	614	18,4107	667	19,8885	722	21,3647	775
5,33	15,5040	561	16,9920	616	18,4774	669	19,9607	723	21,4422	777
5,34	15,5601	562	17,0536	617	18,5443	670	20,0330	725	21,5199	778
5,35	15,6163	564	17,1153	617	18,6113	672	20,1055	725	21,5977	780
5,36	15,6727	564	17,1770	619	18,6785	673	20,1780	727	21,6757	781
5,37	15,7291	565	17,2389	619	18,7458	674	20,2507	728	21,7538	782
5,38	15,7856	567	17,3008	621	18,8132	675	20,3235	729	21,8320	784
5,39	15,8423	567	17,3629	622	18,8807	677	20,3964	731	21,9104	786
5,40	15,8990	569	17,4251	623	18,9484	678	20,4695	733	21,9890	787
5,41	15,9559	569	17,4874	625	19,0162	679	20,5428	734	22,0677	788
5,42	16,0128	571	17,5499	625	19,0841	681	20,6162	735	22,1465	790
5,43	16,0699	571	17,6124	627	19,1522	682	20,6897	736	22,2255	791
5,44	16,1270	573	17,6751	628	19,2204	683	20,7633	738	22,3046	792
5,45	16,1843	574	17,7379	629	19,2887	684	20,8371	739	22,3838	794
5,46	16,2417	575	17,8008	630	19,3571	685	20,9110	741	22,4632	796
5,47	16,2992	576	17,8638	631	19,4256	686	20,9851	742	22,5428	797
5,48	16,3568	577	17,9269	633	19,4942	688	21,0593	743	22,6225	799
5,49	16,4145	578	17,9902	634	19,5630	689	21,1336	744	22,7024	800
5,50	16,4723	579	18,0536	634	19,6319	690	21,2080	746	22,7824	801
5,51	16,5302	580	18,1170	636	19,7009	692	21,2826	747	22,8625	803
5,52	16,5882	581	18,1806	637	19,7701	693	21,3573	748	22,9428	804
5,53	16,6463	583	18,2443	639	19,8394	694	21,4321	751	23,0232	806
5,54	16,7046	583	18,3082	639	19,9088	696	21,5072	752	23,1038	807
5,55	16,7629	584	18,3721	641	19,9784	697	21,5824	752	23,1845	809
5,56	16,8213	586	18,4362	642	20,0481	697	21,6576	754	23,2654	810
5,57	16,8799	586	18,5004	642	20,1178	699	21,7330	755	23,3464	812
5,58	16,9385	587	18,5646	644	20,1877	701	21,8085	757	23,4276	813
5,59	16,9972	589	18,6290	645	20,2578	702	21,8842	759	23,5089	814
5,60	17,0561		18,6935		20,3280		21,9601		23,5903	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}8$	Diff.
5,60	8,7709	303	10,4507	361	12,1148	418	13,7684	475	15,4148	533
5,61	8,8012	303	10,4868	362	12,1566	419	13,8159	477	15,4681	533
5,62	8,8315	303	10,5230	362	12,1985	420	13,8636	478	15,5214	535
5,63	8,8618	305	10,5592	363	12,2405	421	13,9114	478	15,5749	536
5,64	8,8923	304	10,5955	363	12,2826	421	13,9592	479	15,6285	536
5,65	8,9227	306	10,6318	364	12,3247	422	14,0071	479	15,6821	538
5,66	8,9533	305	10,6682	364	12,3669	423	14,0550	481	15,7359	538
5,67	8,9838	307	10,7046	365	12,4092	424	14,1031	482	15,7897	539
5,68	9,0145	307	10,7411	367	12,4516	424	14,1513	482	15,8436	541
5,69	9,0452	307	10,7778	366	12,4940	425	14,1995	484	15,8977	541
5,70	9,0759	308	10,8144	367	12,5365	426	14,2479	484	15,9518	542
5,71	9,1067	308	10,8511	368	12,5791	426	14,2963	485	16,0060	543
5,72	9,1375	309	10,8879	369	12,6217	428	14,3448	486	16,0603	544
5,73	9,1684	310	10,9248	369	12,6645	428	14,3934	486	16,1147	546
5,74	9,1994	310	10,9617	369	12,7073	429	14,4420	488	16,1693	546
5,75	9,2304	311	10,9986	371	12,7502	429	14,4908	488	16,2239	547
5,76	9,2615	311	11,0357	371	12,7931	431	14,5396	490	16,2786	548
5,77	9,2926	312	11,0728	372	12,8362	431	14,5886	490	16,3334	549
5,78	9,3238	312	11,1100	372	12,8793	432	14,6376	491	16,3883	550
5,79	9,3550	313	11,1472	373	12,9225	432	14,6867	492	16,4433	550
5,80	9,3863	313	11,1845	374	12,9657	434	14,7359	493	16,4983	552
5,81	9,4176	314	11,2219	374	13,0091	434	14,7852	493	16,5535	553
5,82	9,4490	314	11,2593	375	13,0525	435	14,8345	494	16,6088	554
5,83	9,4804	315	11,2968	375	13,0960	435	14,8839	495	16,6642	554
5,84	9,5119	315	11,3343	377	13,1395	436	14,9334	496	16,7196	556
5,85	9,5434	316	11,3720	376	13,1831	437	14,9830	498	16,7752	556
5,86	9,5750	317	11,4096	378	13,2268	438	15,0328	497	16,8308	557
5,87	9,6067	317	11,4474	377	13,2706	439	15,0825	499	16,8865	559
5,88	9,6384	318	11,4851	379	13,3145	439	15,1324	499	16,9424	559
5,89	9,6702	318	11,5230	380	13,3584	440	15,1823	500	16,9983	560
5,90	9,7020		11,5610		13,4024		15,2323		17,0543	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,60	17,0561	590	18,6935	646	20,3280	703	21,9601	759	23,5903	816
5,61	17,1151	590	18,7581	648	20,3983	704	22,0360	761	23,6719	817
5,62	17,1741	592	18,8229	649	20,4687	705	22,1121	763	23,7536	819
5,63	17,2333	593	18,8878	650	20,5392	707	22,1884	763	23,8355	821
5,64	17,2926	594	18,9528	650	20,6099	707	22,2647	765	23,9176	822
5,65	17,3520	594	19,0178	652	20,6806	709	22,3412	766	23,9998	823
5,66	17,4114	596	19,0830	654	20,7515	711	22,4178	768	24,0821	825
5,67	17,4710	597	19,1484	654	20,8226	712	22,4946	769	24,1646	826
5,68	17,5307	598	19,2138	655	20,8938	713	22,5715	770	24,2472	827
5,69	17,5905	599	19,2793	657	20,9651	714	22,6485	771	24,3299	829
5,70	17,6504	600	19,3450	658	21,0365	716	22,7256	773	24,4128	831
5,71	17,7104	601	19,4108	659	21,1081	717	22,8029	775	24,4959	832
5,72	17,7705	603	19,4767	660	21,1798	718	22,8804	776	24,5791	833
5,73	17,8308	603	19,5427	661	21,2516	719	22,9580	777	24,6624	835
5,74	17,8911	604	19,6088	663	21,3235	720	23,0357	779	24,7459	836
5,75	17,9515	605	19,6751	663	21,3955	722	23,1136	779	24,8295	838
5,76	18,0120	607	19,7414	665	21,4677	723	23,1915	781	24,9133	839
5,77	18,0727	608	19,8079	666	21,5400	724	23,2696	783	24,9972	841
5,78	18,1335	608	19,8745	667	21,6124	726	23,3479	784	25,0813	842
5,79	18,1943	610	19,9412	668	21,6850	727	23,4263	786	25,1655	844
5,80	18,2553	610	20,0080	670	21,7577	728	23,5049	786	25,2499	845
5,81	18,3163	612	20,0750	671	21,8305	729	23,5835	788	25,3344	846
5,82	18,3775	613	20,1421	672	21,9034	730	23,6623	789	25,4190	848
5,83	18,4388	614	20,2093	672	21,9764	732	23,7412	791	25,5038	850
5,84	18,5002	614	20,2765	674	22,0496	733	23,8203	791	25,5888	851
5,85	18,5616	616	20,3439	675	22,1229	735	23,8994	793	25,6739	852
5,86	18,6232	617	20,4114	677	22,1964	735	23,9787	795	25,7591	854
5,87	18,6849	618	20,4791	677	22,2699	737	24,0582	796	25,8445	855
5,88	18,7467	619	20,5468	679	22,3436	738	24,1378	798	25,9300	857
5,89	13,8086	620	20,6147	679	22,4174	739	24,2176	799	26,0157	858
5,90	18,8706		20,6826		22,4913		24,2975		26,1015	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} - 0,4$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} - 0,5$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} - 0,6$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} - 0,7$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} - 0,8$	Diff.
5,90	9,7020	319	11,5610	380	13,4024	441	15,2323	502	17,0543	562
5,91	9,7339	319	11,5990	381	13,4465	441	15,2825	502	17,1105	562
5,92	9,7658	320	11,6371	381	13,4906	443	15,3327	503	17,1667	563
5,93	9,7978	320	11,6752	382	13,5349	443	15,3830	503	17,2230	564
5,94	9,8298	321	11,7134	383	13,5792	444	15,4333	504	17,2794	565
5,95	9,8619	322	11,7517	383	13,6236	444	15,4837	506	17,3359	566
5,96	9,8941	321	11,7900	384	13,6680	445	15,5343	506	17,3925	567
5,97	9,9262	323	11,8284	384	13,7125	446	15,5849	507	17,4492	568
5,98	9,9585	323	11,8668	386	13,7571	447	15,6356	508	17,5060	569
5,99	9,9908	324	11,9054	386	13,8018	447	15,6864	509	17,5629	570
6,00	10,0232	324	11,9440	386	13,8465	449	15,7373	510	17,6199	570
6,01	10,0556	325	11,9826	387	13,8914	449	15,7883	510	17,6769	571
6,02	10,0881	325	12,0213	388	13,9363	450	15,8393	511	17,7340	573
6,03	10,1206	326	12,0601	388	13,9813	450	15,8904	512	17,7913	574
6,04	10,1532	326	12,0989	389	14,0263	451	15,9416	514	17,8487	575
6,05	10,1858	326	12,1378	390	14,0714	452	15,9930	514	17,9062	575
6,06	10,2184	327	12,1768	390	14,1166	453	16,0444	515	17,9637	577
6,07	10,2511	329	12,2158	391	14,1619	453	16,0959	515	18,0214	577
6,08	10,2840	328	12,2549	391	14,2072	454	16,1474	516	18,0791	578
6,09	10,3168	329	12,2940	393	14,2526	455	16,1990	517	18,1369	580
6,10	10,3497	329	12,3333	393	14,2981	456	16,2507	519	18,1949	580
6,11	10,3826	330	12,3726	394	14,3437	457	16,3026	519	18,2529	582
6,12	10,4156	331	12,4120	394	14,3894	457	16,3545	520	18,3111	582
6,13	10,4487	332	12,4514	395	14,4351	458	16,4065	521	18,3693	583
6,14	10,4819	331	12,4909	395	14,4809	459	16,4586	521	18,4276	584
6,15	10,5150	333	12,5304	396	14,5268	459	16,5107	522	18,4860	585
6,16	10,5483	332	12,5700	397	14,5727	461	16,5629	524	18,5445	586
6,17	10,5815	334	12,6097	398	14,6188	461	16,6153	524	18,6031	587
6,18	10,6149	334	12,6495	398	14,6649	461	16,6677	525	18,6618	588
6,19	10,6483	334	12,6893	398	14,7110	462	16,7202	525	18,7206	589
6,20	10,6817		12,7291		14,7572		16,7727		18,7795	

TABLE I.

VALEURS APPROCHÉES DE $\frac{Q^2}{f^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	Diff.	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$	Diff.
5,90	18,8706	621	20,6826	681	22,4913	741	24,2975	800	26,1015	860
5,91	18,9327	623	20,7507	682	22,5654	742	24,3775	801	26,1875	861
5,92	18,9950	623	20,8189	683	22,6396	743	24,4576	803	26,2736	862
5,93	19,0573	624	20,8872	685	22,7139	744	24,5379	804	26,3598	864
5,94	19,1197	626	20,9557	686	22,7883	746	24,6183	806	26,4462	866
5,95	19,1823	626	21,0243	686	22,8629	746	24,6989	807	26,5328	867
5,96	19,2449	628	21,0929	688	22,9375	748	24,7796	808	26,6195	868
5,97	19,3077	628	21,1617	689	23,0123	750	24,8604	810	26,7063	870
5,98	19,3705	630	21,2306	690	23,0873	751	24,9414	811	26,7933	871
5,99	19,4335	631	21,2996	691	23,1624	752	25,0225	812	26,8804	873
6,00	19,4966	631	21,3687	693	23,2376	753	25,1037	814	26,9677	874
6,01	19,5597	633	21,4380	694	23,3129	754	25,1851	815	27,0551	876
6,02	19,6230	633	21,5074	694	23,3883	756	25,2666	816	27,1427	877
6,03	19,6863	635	21,5768	696	23,4639	757	25,3482	818	27,2304	879
6,04	19,7498	636	21,6464	697	23,5396	758	25,4300	819	27,3183	880
6,05	19,8134	637	21,7161	698	23,6154	760	25,5119	820	27,4063	881
6,06	19,8771	638	21,7859	699	23,6914	760	25,5939	822	27,4944	883
6,07	19,9409	639	21,8558	701	23,7674	762	25,6761	823	27,5827	884
6,08	20,0048	640	21,9259	702	23,8436	763	25,7584	825	27,6711	886
6,09	20,0688	641	21,9961	703	23,9199	764	25,8409	826	27,7597	887
6,10	20,1329	642	22,0664	704	23,9963	766	25,9235	827	27,8484	889
6,11	20,1971	643	22,1368	705	24,0729	767	26,0062	829	27,9373	890
6,12	20,2614	645	22,2073	706	24,1496	768	26,0891	830	28,0263	892
6,13	20,3259	645	22,2779	707	24,2264	769	26,1721	831	28,1155	893
6,14	20,3904	647	22,3486	709	24,3033	771	26,2552	832	28,2048	895
6,15	20,4551	647	22,4195	710	24,3804	772	26,3384	834	28,2943	896
6,16	20,5198	649	22,4905	711	24,4576	773	26,4218	836	28,3839	897
6,17	20,5847	649	22,5616	712	24,5349	774	26,5054	837	28,4736	899
6,18	20,6496	651	22,6328	713	24,6123	776	26,5891	838	28,5635	901
6,19	20,7147	651	22,7041	715	24,6899	777	26,6729	839	28,6536	902
6,20	20,7798		22,7756		24,7676		26,7568		28,7438	

TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{c^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle*.)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0,4$	$\frac{Y_0}{f} = 0,5$	$\frac{Y_0}{f}$ 0,6	$\frac{Y_0}{f}$ 0,7	$\frac{Y_0}{f} = 0,8$
3,5	0,3407	0,3431	0,3455	0,3479	0,3503
3,6	0,3403	0,3426	0,3449	0,3471	0,3494
3,7	0,3400	0,3421	0,3443	0,3464	0,3486
3,8	0,3397	0,3417	0,3437	0,3458	0,3479
3,9	0,3394	0,3413	0,3432	0,3452	0,3472
4,0	0,3391	0,3409	0,3428	0,3446	0,3465
4,1	0,3389	0,3406	0,3424	0,3441	0,3459
4,2	0,3386	0,3403	0,3420	0,3437	0,3454
4,3	0,3384	0,3400	0,3416	0,3432	0,3449
4,4	0,3382	0,3397	0,3412	0,3428	0,3444
4,5	0,3380	0,3394	0,3409	0,3424	0,3439
4,6	0,3378	0,3392	0,3406	0,3420	0,3435
4,7	0,3376	0,3389	0,3403	0,3417	0,3431
4,8	0,3375	0,3387	0,3400	0,3413	0,3427
4,9	0,3373	0,3385	0,3398	0,3410	0,3423
5,0	0,3371	0,3383	0,3395	0,3407	0,3420
5,1	0,3370	0,3381	0,3393	0,3405	0,3416
5,2	0,3369	0,3379	0,3391	0,3402	0,3413
5,3	0,3367	0,3378	0,3389	0,3400	0,3410
5,4	0,3366	0,3376	0,3387	0,3397	0,3408
5,5	0,3365	0,3375	0,3385	0,3395	0,3405
5,6	0,3364	0,3373	0,3383	0,3393	0,3403
5,7	0,3363	0,3372	0,3381	0,3391	0,3400
5,8	0,3362	0,3371	0,3380	0,3389	0,3398
5,9	0,3361	0,3369	0,3378	0,3387	0,3396
6,0	0,3360	0,3368	0,3377	0,3385	0,3394
6,1	0,3359	0,3367	0,3375	0,3384	0,3392
6,2	0,3358	0,3366	0,3374	0,3382	0,3390

TABLE II.

VALEURS DE $\frac{\delta(Q^2)}{e^2}$. (Arches *incomplètes*, dites *en arc de cercle.*)

$\frac{g}{f}$	$\frac{Y_0}{f} = 0{,}9$	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}0$	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}1$	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}2$	$\frac{Y_0}{f} = 1{,}3$
3,5	0,3527	0,3552	0,3577	0,3601	0,3626
3,6	0,3517	0,3541	0,3565	0,3588	0,3611
3,7	0,3508	0,3531	0,3553	0,3575	0,3597
3,8	0,3500	0,3521	0,3542	0,3563	0,3584
3,9	0,3492	0,3512	0,3532	0,3552	0,3572
4,0	0,3484	0,3504	0,3523	0,3542	0,3561
4,1	0,3477	0,3496	0,3514	0,3532	0,3551
4,2	0,3471	0,3489	0,3506	0,3523	0,3541
4,3	0,3465	0,3482	0,3498	0,3515	0,3532
4,4	0,3459	0,3475	0,3491	0,3507	0,3524
4,5	0,3454	0,3469	0,3485	0,3500	0,3516
4,6	0,3449	0,3464	0,3479	0,3493	0,3508
4,7	0,3445	0,3459	0,3473	0,3487	0,3501
4,8	0,3440	0,3454	0,3467	0,3481	0,3494
4,9	0,3436	0,3449	0,3462	0,3475	0,3488
5,0	0,3432	0,3445	0,3458	0,3470	0,3482
5,1	0,3428	0,3440	0,3453	0,3465	0,3477
5,2	0,3425	0,3436	0,3448	0,3460	0,3471
5,3	0,3421	0,3432	0,3444	0,3455	0,3466
5,4	0,3418	0,3429	0,3440	0,3450	0,3461
5,5	0,3415	0,3426	0,3436	0,3446	0,3457
5,6	0,3412	0,3422	0,3432	0,3443	0,3453
5,7	0,3410	0,3419	0,3429	0,3439	0,3449
5,8	0,3407	0,3417	0,3426	0,3436	0,3445
5,9	0,3405	0,3414	0,3423	0,3432	0,3441
6,0	0,3403	0,3411	0,3420	0,3429	0,3438
6,1	0,3401	0,3409	0,3417	0,3426	0,3435
6,2	0,3399	0,3407	0,3415	0,3423	0,3432

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,670	0,94098	230	1,40444	134	0,700	1,01297	251	1,44710	152
671	0,94328	231	1,40578	135	701	1,01548	252	1,44862	152
672	0,94559	232	1,40713	135	702	1,01800	252	1,45014	153
673	0,94791	232	1,40848	136	703	1,02052	254	1,45167	153
674	0,95023	233	1,40984	136	704	1,02306	254	1,45320	154
0,675	0,95256	234	1,41120	137	0,705	1,02560	254	1,45474	155
676	0,95490	234	1,41257	137	706	1,02814	256	1,45629	156
677	0,95724	235	1,41394	138	707	1,03070	256	1,45785	156
678	0,95959	235	1,41532	138	708	1,03326	257	1,45941	157
679	0,96194	236	1,41670	139	709	1,03583	258	1,46098	158
0,680	0,96430	237	1,41809	139	0,710	1,03841	259	1,46256	158
681	0,96667	237	1,41948	140	711	1,04100	260	1,46414	159
682	0,96904	238	1,42088	141	712	1,04360	260	1,46573	160
683	0,97142	239	1,42229	141	713	1,04620	261	1,46733	160
684	0,97381	240	1,42370	142	714	1,04881	262	1,46893	161
0,685	0,97621	240	1,42512	142	0,715	1,05143	263	1,47054	162
686	0,97861	241	1,42654	143	716	1,05406	264	1,47216	162
687	0,98102	241	1,42797	144	717	1,05670	265	1,47378	163
688	0,98343	242	1,42941	144	718	1,05935	265	1,47541	164
689	0,98585	243	1,43085	145	719	1,06200	267	1,47705	165
0,690	0,98828	244	1,43230	145	0,720	1,06467	267	1,47870	166
691	0,99072	244	1,43375	146	721	1,06734	268	1,48036	166
692	0,99316	245	1,43521	146	722	1,07002	269	1,48202	167
693	0,99561	246	1,43667	147	723	1,07271	270	1,48369	168
694	0,99807	247	1,43814	148	724	1,07541	270	1,48537	168
0,695	1,00054	247	1,43962	149	0,725	1,07811	272	1,48705	169
696	1,00301	248	1,44111	149	726	1,08083	272	1,48874	170
697	1,00549	249	1,44260	149	727	1,08355	274	1,49044	171
698	1,00798	249	1,44409	150	728	1,08629	274	1,49215	172
699	1,01047	250	1,44559	151	729	1,08903	275	1,49387	173
0,700	1,01297		1,44710		0,730	1,09178		1,49560	

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,730	1,09178		1,49560		0,760	1,17908		1,55142	
		277		173			308		201
731	1,09455		1,49733		761	1,18216		1,55343	
		277		174			309		202
732	1,09732		1,49907		762	1,18525		1,55545	
		278		175			310		203
733	1,10010		1,50082		763	1,18835		1,55748	
		279		176			312		204
734	1,10289		1,50258		764	1,19147		1,55952	
		280		176			313		205
0,735	1,10569		1,50434		0,765	1,19460		1,56157	
		281		178			314		206
736	1,10850		1,50612		766	1,19774		1,56363	
		282		178			316		208
737	1,11132		1,50790		767	1,20090		1,56571	
		283		179			316		208
738	1,11415		1,50969		768	1,20406		1,56779	
		284		180			318		210
739	1,11699		1,51149		769	1,20724		1,56989	
		285		181			320		210
0,740	1,11984		1,51330		0,770	1,21044		1,57199	
		286		182			320		212
741	1,12270		1,51512		771	1,21364		1,57411	
		287		182			322		213
742	1,12557		1,51694		772	1,21686		1,57624	
		288		184			323		215
743	1,12845		1,51878		773	1,22009		1,57839	
		289		184			325		215
744	1,13134		1,52062		774	1,22334		1,58054	
		291		186			326		216
0,745	1,13425		1,52248		0,775	1,22660		1,58270	
		291		186			327		218
746	1,13716		1,52434		776	1,22987		1,58488	
		292		187			328		219
747	1,14008		1,52621		777	1,23315		1,58707	
		293		188			330		220
748	1,14301		1,52809		778	1,23645		1,58927	
		295		189			332		222
749	1,14596		1,52998		779	1,23977		1,59149	
		295		190			333		222
0,750	1,14891		1,53188		0,780	1,24310		1,59371	
		297		191			334		224
751	1,15188		1,53379		781	1,24644		1,59595	
		297		192			336		225
752	1,15485		1,53571		782	1,24980		1,59820	
		299		193			337		227
753	1,15784		1,53764		783	1,25317		1,60047	
		300		194			338		227
754	1,16084		1,53958		784	1,25655		1,60274	
		301		195			340		229
0,755	1,16385		1,54153		0,785	1,25995		1,60503	
		302		195			342		231
756	1,16687		1,54348		786	1,26337		1,60734	
		304		197			343		231
757	1,16991		1,54545		787	1,26680		1,60965	
		304		198			344		233
758	1,17295		1,54743		788	1,27024		1,61198	
		306		199			346		235
759	1,17601		1,54942		789	1,27370		1,61433	
		307		200			348		236
0,760	1,17908		1,55142		0,790	1,27718		1,61669	

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,790	1,27718	349	1,61669	237	0,820	1,38952	405	1,69454	286
791	1,28067	351	1,61906	238	821	1,39357	406	1,69740	288
792	1,28418	352	1,62144	240	822	1,39763	409	1,70028	290
793	1,28770	354	1,62384	241	823	1,40172	411	1,70318	292
794	1,29124	356	1,62625	243	824	1,40583	413	1,70610	295
0,795	1,29480	357	1,62868	244	0,825	1,40996	416	1,70905	296
796	1,29837	359	1,63112	246	826	1,41412	418	1,71201	298
797	1,30196	361	1,63358	247	827	1,41830	420	1,71499	300
798	1,30557	362	1,63605	249	828	1,42250	422	1,71799	303
799	1,30919	364	1,63854	250	829	1,42672	425	1,72102	304
0,800	1,31283	366	1,64104	252	0,830	1,43097	427	1,72406	307
801	1,31649	368	1,64356	253	831	1,43524	430	1,72713	309
802	1,32017	369	1,64609	255	832	1,43954	432	1,73022	311
803	1,32386	371	1,64864	256	833	1,44386	435	1,73333	313
804	1,32757	373	1,65120	258	834	1,44821	437	1,73646	316
0,805	1,33130	374	1,65378	260	0,835	1,45258	440	1,73962	318
806	1,33504	377	1,65638	261	836	1,45698	442	1,74280	320
807	1,33881	378	1,65899	263	837	1,46140	445	1,74600	323
808	1,34259	381	1,66162	265	838	1,46585	448	1,74923	325
809	1,34640	382	1,66427	267	839	1,47033	450	1,75248	327
0,810	1,35022	384	1,66694	268	0,840	1,47483	453	1,75575	330
811	1,35406	386	1,66962	269	841	1,47936	456	1,75905	332
812	1,35792	388	1,67231	272	842	1,48392	458	1,76237	335
813	1,36180	390	1,67503	273	843	1,48850	462	1,76572	338
814	1,36570	392	1,67776	275	844	1,49312	464	1,76910	340
0,815	1,36962	394	1,68051	277	0,845	1,49776	467	1,77250	342
816	1,37356	396	1,68328	279	846	1,50243	470	1,77592	346
817	1,37752	398	1,68607	280	847	1,50713	473	1,77938	348
818	1,38150	400	1,68887	283	848	1,51186	476	1,78286	350
819	1,38550	402	1,69170	284	849	1,51662	479	1,78636	354
0,820	1,38952		1,69454		0,850	1,52141		1,78990	

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,850	1,52141	483	1,78990	356	0,880	1,68177	600	1,91110	464
851	1,52624	485	1,79346	359	881	1,68777	604	1,91574	468
852	1,53109	488	1,79705	362	882	1,69381	610	1,92042	473
853	1,53597	492	1,80067	365	883	1,69991	615	1,92515	478
854	1,54089	495	1,80432	368	884	1,70606	620	1,92993	482
0,855	1,54584	499	1,80800	371	0,885	1,71226	625	1,93475	487
856	1,55083	501	1,81171	374	886	1,71851	630	1,93962	493
857	1,55584	505	1,81545	377	887	1,72481	636	1,94455	497
858	1,56089	509	1,81922	381	888	1,73117	642	1,94952	502
859	1,56598	512	1,82303	383	889	1,73759	647	1,95454	508
0,860	1,57110	516	1,82686	387	0,890	1,74406	653	1,95962	513
861	1,57626	519	1,83073	390	891	1,75059	659	1,96475	519
862	1,58145	523	1,83463	393	892	1,75718	665	1,96994	524
863	1,58668	527	1,83856	397	893	1,76383	672	1,97518	530
864	1,59195	530	1,84253	400	894	1,77055	677	1,98048	535
0,865	1,59725	534	1,84653	404	0,895	1,77732	684	1,98583	542
866	1,60259	539	1,85057	407	896	1,78416	690	1,99125	547
867	1,60798	542	1,85464	411	897	1,79106	697	1,99672	554
868	1,61340	546	1,85875	415	898	1,79803	704	2,00226	560
869	1,61886	550	1,86290	418	899	1,80507	710	2,00786	566
0,870	1,62436	554	1,86708	422	0,900	1,81217	718	2,01352	573
871	1,62990	559	1,87130	426	901	1,81935	724	2,01925	580
872	1,63549	563	1,87556	430	902	1,82659	732	2,02505	586
873	1,64112	567	1,87986	434	903	1,83391	740	2,03091	594
874	1,64679	572	1,88420	438	904	1,84131	747	2,03685	600
0,875	1,65251	576	1,88858	442	0,905	1,84878	755	2,04285	608
876	1,65827	580	1,89300	446	906	1,85633	763	2,04893	615
877	1,66407	586	1,89746	450	907	1,86396	771	2,05508	623
878	1,66993	590	1,90196	455	908	1,87167	779	2,06131	630
879	1,67583	594	1,90651	459	909	1,87946	788	2,06761	638
0,880	1,68177		1,91110		0,910	1,88734		2,07399	

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
								2,31458	
0,910	1,88734	796	2,07399	647	0,940	2,17571	1193		1022
911	1,89530	805	2,08046	655	941	2,18764	1213	2,32480	1041
912	1,90335	814	2,08701	663	942	2,19977	1234	2,33521	1062
913	1,91149	824	2,09364	672	943	2,21211	1256	2,34583	1082
914	1,91973	833	2,10036	681	944	2,22467	1279	2,35665	1103
0,915	1,92806	843	2,10717	690	0,945	2,23746	1302	2,36768	1126
916	1,93649	853	2,11407	700	946	2,25048	1326	2,37894	1149
917	1,94502	863	2,12107	709	947	2,26374	1351	2,39043	1173
918	1,95365	874	2,12816	719	948	2,27725	1377	2,40216	1198
919	1,96239	884	2,13535	729	949	2,29102	1404	2,41414	1224
0,920	1,97123	895	2,14264	740	0,950	2,30506	1433	2,42638	1251
921	1,98018	907	2,15004	750	951	2,31939	1462	2,43889	1280
922	1,98925	918	2,15754	761	952	2,33401	1493	2,45169	1309
923	1,99843	930	2,16515	772	953	2,34894	1524	2,46478	1340
924	2,00773	942	2,17287	783	954	2,36418	1558	2,47818	1371
0,925	2,01715	955	2,18070	796	0,955	2,37976	1593	2,49189	1405
926	2,02670	967	2,18866	808	956	2,39569	1629	2,50594	1441
927	2,03637	981	2,19674	820	957	2,41198	1667	2,52035	1478
928	2,04618	994	2,20494	833	958	2,42865	1708	2,53513	1516
929	2,05612	1009	2,21327	846	959	2,44573	1749	2,55029	1557
0,930	2,06621	1022	2,22173	859	0,960	2,46322	1794	2,56586	1599
931	2,07643	1038	2,23032	874	961	2,48116	1840	2,58185	1644
932	2,08681	1052	2,23906	889	962	2,49956	1889	2,59829	1692
933	2,09733	1069	2,24795	903	963	2,51845	1940	2,61521	1742
934	2,10802	1084	2,25698	919	964	2,53785	1995	2,63263	1794
0,935	2,11886	1102	2,26617	934	0,965	2,55780	2053	2,65057	1851
936	2,12988	1118	2,27551	951	966	2,57833	2114	2,66908	1910
937	2,14106	1136	2,28502	968	967	2,59947	2179	2,68818	1973
938	2,15242	1155	2,29470	985	968	2,62126	2248	2,70791	2040
939	2,16397	1174	2,30455	1003	969	2,64374	2321	2,72831	2112
0,940	2,17571		2,31458		0,970	2,66695		2,74943	

TABLE III.

ARCHES *COMPLÈTES*, OU *EN ANSE DE PANIER*.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{g}{Y_1}$	Diff.	$\frac{g}{f}$	Diff.
0,970	2,66695	2400	2,74943	2189	0,985	3,15740	4880	3,20548	4624
971	2,69095	2484	2,77132	2270	986	3,20620	5242	3,25172	4982
972	2,71579	2574	2,79402	2358	987	3,25862	5661	3,30154	5395
973	2,74153	2671	2,81760	2453	988	3,31523	6154	3,35549	5883
974	2,76824	2776	2,84213	2556	989	3,37677	6740	3,41432	6464
0,975	2,79600	2888	2,86769	2666	0,990	3,44417	7451	3,47896	7168
976	2,82488	3012	2,89435	2786	991	3,51868	8330	3,55064	8039
977	2,85500	3145	2,92221	2917	992	3,60198	9443	3,63103	9144
978	2,88645	3292	2,95138	3061	993	3,69641	10901	3,72247	10592
979	2,91937	3452	2,98199	3218	994	3,80542	12892	3,82839	12572
0,980	2,95389	3629	3,01417	3392	0,995	3,93434	15779	3,95411	15446
981	2,99018	3825	3,04809	3585	996	4,09213	20343	4,10857	19992
982	3,02843	4043	3,08394	3800	997	4,29556	28671	4,30849	28297
983	3,06886	4289	3,12194	4040	998	4,58227	49013	4,59146	48602
984	3,11175	4565	3,16234	4314	999	5,07240	∞	5,07748	∞
0,985	3,15740		3,20548		1,000	∞		∞	

TABLE IV.

ARCHES *COMPLÈTES*,
OU *EN ANSE DE PANIER.*

Table pour corriger la valeur de f, étant donnés g et Y_1.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{c^2}\delta f$	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{c^2}\delta f$
0,67	+ 0,0005	0,78	+ 0,0001
68	0,0004	79	0,0001
69	0,0004	80	0,0001
70	0,0003	81	0,0001
71	0,0003	82	0,0001
72	0,0003	83	0,0000
73	0,0002	84	0,0000
74	0,0002	..	0,0000
75	0,0002	..	0,0000
76	0,0001	..	0,0000
77	0,0001	..	0,0000
78	0,0001	1,00	0

TABLE V.

ARCHES *COMPLÈTES*,
OU *EN ANSE DE PANIER.*

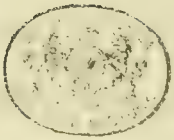
Table pour corriger la valeur de Y_1, étant donnés f et g.

$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{c^2}\delta Y_1$	$\frac{f}{Y_1}$	$\frac{Y_1}{c^2}\delta Y_1$
0,67	— 0,0024	0,78	— 0,0003
68	— 0,0020	79	— 0,0003
69	— 0,0017	80	— 0,0002
70	— 0,0015	81	— 0,0002
71	— 0,0012	82	— 0,0002
72	— 0,0010	83	— 0,0001
73	— 0,0009	84	— 0,0001
74	— 0,0007	85	— 0,0001
75	— 0,0006	86	— 0,0001
76	— 0,0005	87	— 0,0000
77	— 0,0004	..	— 0,0000
78	— 0,0003	1,00	0

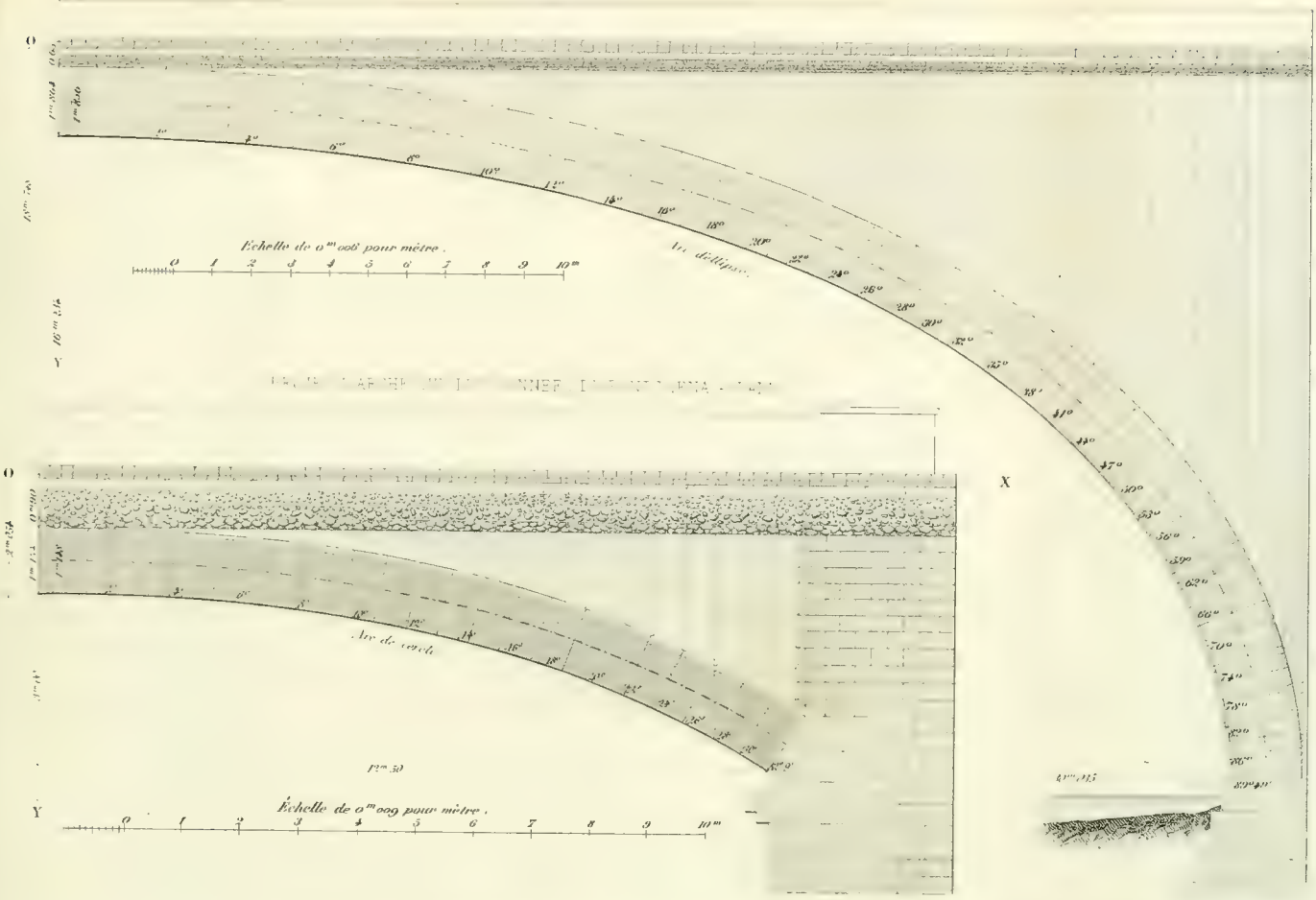
FIN DU TOME DOUZIÈME

CORRECTIONS.

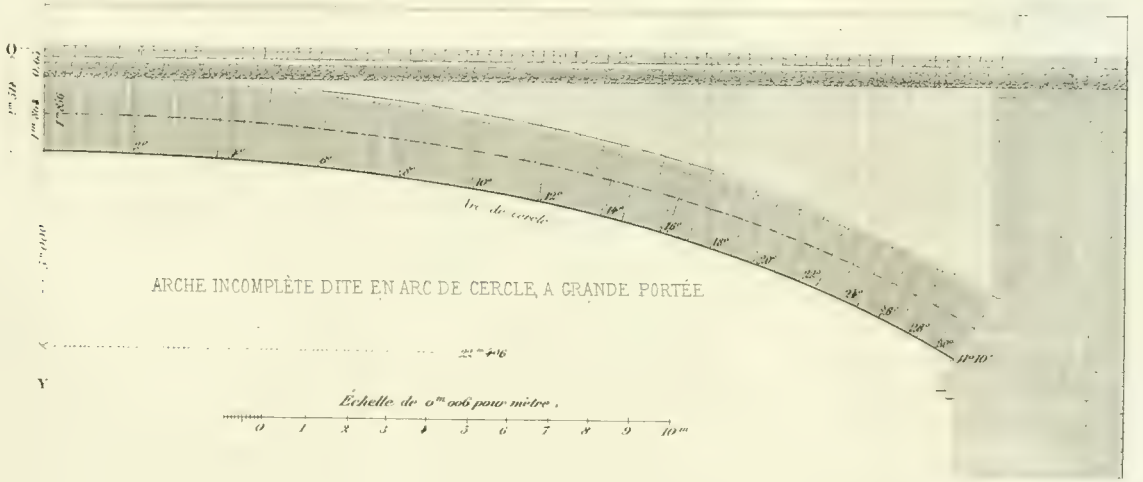
Page	*Ligne*	*Au lieu de :*	*Lisez*
543	14	$\frac{e^2}{q^2}(1-\cos^2\alpha)^2$	$\frac{e^2}{q^2}(1-\cos^2\alpha)$
Idem.	3 en remontant	deuxième terme	troisième terme
547	8 en remontant	l'axe de x	l'axe des x
556	2	$(:+\frac{2}{3}i+i^2)$	$(1+\frac{2}{3}i+i^2)$
594	7 en remontant	dans le même n° 15	n° 17
613	équation (h''')	$\frac{h''(f+h'')}{f(f+2h'')}$	$\frac{ih''(f+h'')}{f(f+2h'')}$
646	12	$\alpha-\alpha_1$	$\alpha-\alpha'$
657	10	de l'équation (14)	de l'équation (17)
659	3 avant la note	l'équation (3)	la 2e équation (3)
662	8 en remontant	et il y faudra	et il faudra
Idem.	6 en remontant	l'équation (27)	l'équation (26)
671	1re équation (34 *bis.*)	$y_1''^2-h_1''^2$	$y_1''^2-h''^2$
688	dernière	$+$	$=$
700	formules du tableau	$y''+2\delta\sin\alpha$	$y''+2\delta\cos\alpha$
Idem.	*Idem.*	$y''-2\delta\cos\alpha$	$y''-2\delta\sin\alpha$
701	colonne 30°	5,16157	5,16167
725	10	n° 29	n° 28
766	6	h''	h
801	col. 9e, Diff. ligne 13	373	573



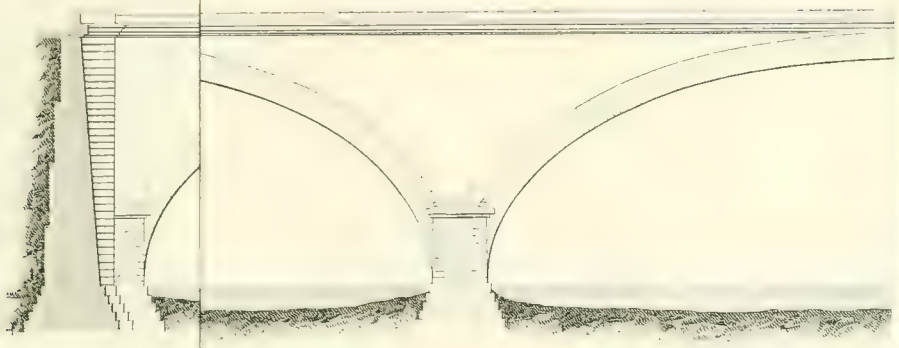
ARCHE COMPLETE OU EN ANSE DE PANIER A GRANDE PORTÉE

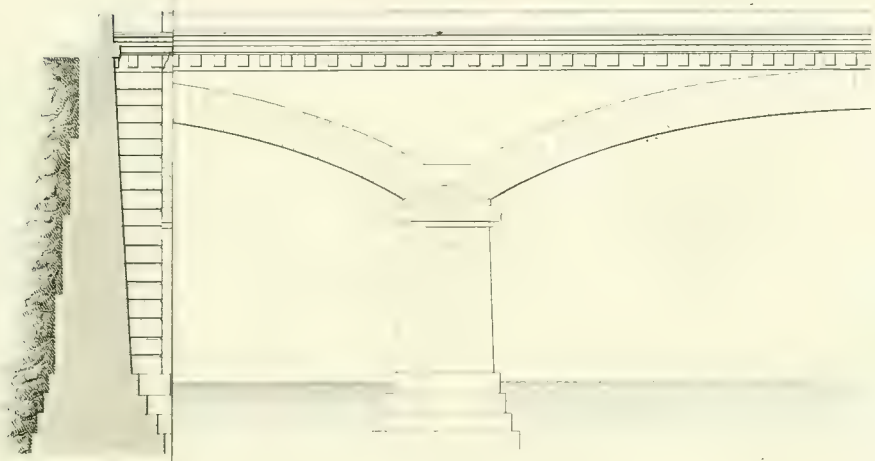


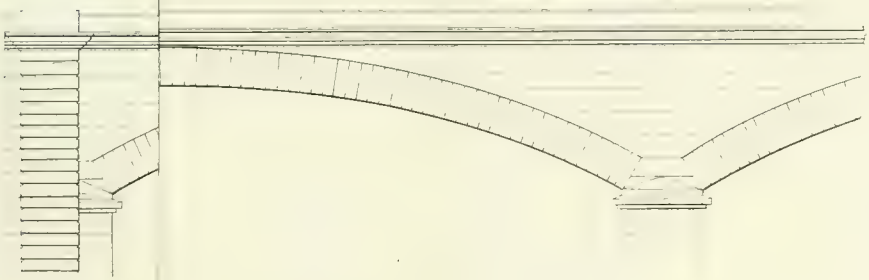
ARCHE INCOMPLÈTE DITE EN ARC DE CERCLE, A GRANDE PORTÉE



Gravé sur pierre à l'Imprimerie Impériale.

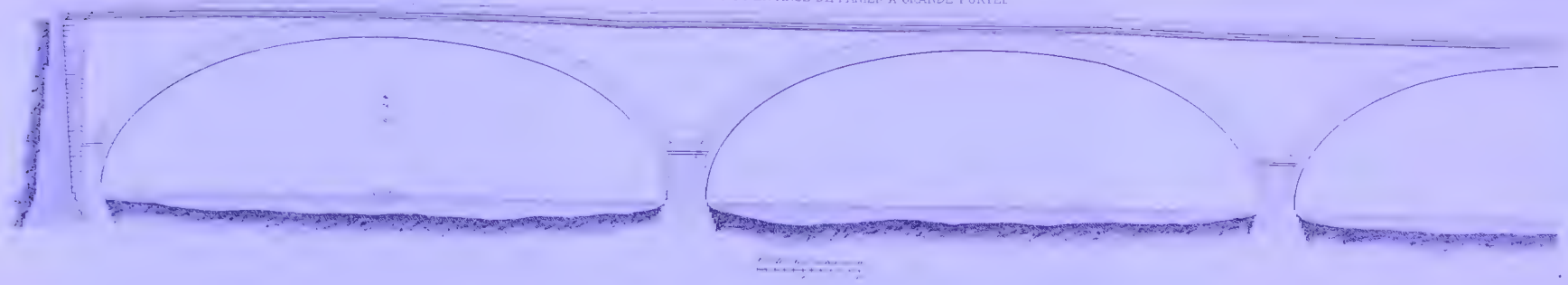


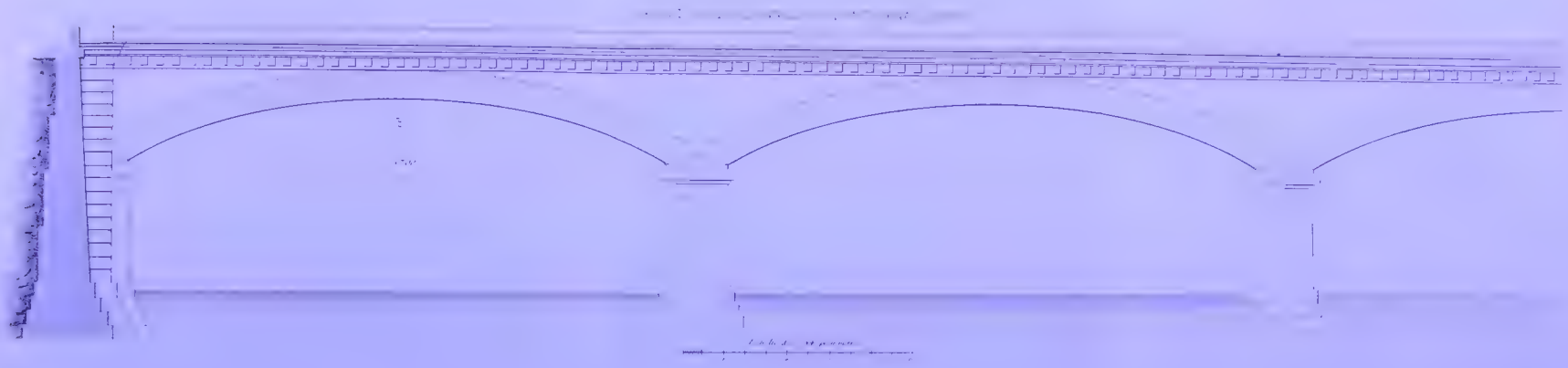




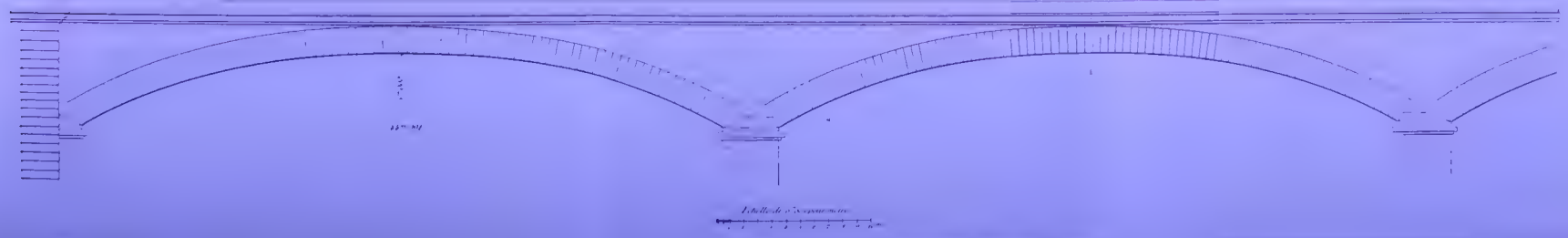
Gravé sur pierre à l'Imprimerie Impér.

ARCHES COMPLETES OU EN ANSE DE PANIER A GRANDE PORTÉE





ARCHES INCOMPLÈTES DITES EN ARC DE CERCLE, A GRANDE PORTEE



LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

BACHET, sieur de MÉZIRIAC. — **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.** 3e édition, revue, simplifiée et augmentée par *A. Labosne*, Professeur de Mathématiques. Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs, papier vergé, couverture parchemin; 1874 (*Tiré à petit nombre*)..... 6 fr.

BOUSSINGAULT, Membre de l'Institut. — **Agronomie, Chimie agricole et Physiologie.** 2e édition. Tomes I, II, III, IV et V; in-8, avec planches sur cuivre et figures dans le texte; 1860-1861-1864-1868-1874. 26 fr.
Chacun des tomes I à IV se vend séparément..... 5 fr.
Le tome V se vend séparément..... 6 fr.
(Le tome VI est *sous presse.*)

BRIOT et BOUQUET, Professeurs à la Faculté des Sciences. — **Théorie des fonctions elliptiques.** 2e édition. In-4, avec figures; 1875..... 30 fr.

CAHOURS (Auguste), Membre de l'Académie des Sciences. — **Traité de Chimie générale élémentaire.**
CHIMIE INORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Centrale des Arts et Manufactures.* 3e édition. 2 volumes in-18 jésus avec 230 figures et 8 planches; 1874..... 10 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.
CHIMIE ORGANIQUE, *Leçons professées à l'École Polytechnique.* 3e édition. 3 volumes in-18 jésus avec figures; 1874-1875. Prix pour les souscripteurs..... 15 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.

DUBOIS (Edm.), Examinateur-Hydrographe de la Marine. — **Les passages de Vénus sur le disque solaire**, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre; *Passage de* 1874; *Notions historiques sur les passages de* 1761 *et* 1769. In-18 jésus, avec figures dans le texte; 1873. 3 fr. 50 c.

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux personnes qui se préparent à la licence ès Sciences mathématiques. 3e édition. In-8, avec figures dans le texte; 1873..... 7 fr. 50 c.

INSTITUT DE FRANCE. — **Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil.** In-4, avec 6 pl., dont 3 en chromolithographie; 1874... 12 fr. 50 c.
Ce Recueil contient : 1° Documents officiels relatifs à la mission de l'Académie, à la constitution de sa Commission et à son fonctionnement; 2° Mémoires, Rapports et Documents qu'elle a suscités ou recueillis dans la période qui a précédé le départ des Observateurs.

JAMIN (J.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris. — **Petit Traité de Physique**, à l'usage des Établissements d'instruction, des aspirants aux Baccalauréats et des candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8, avec 686 figures dans le texte; 1870. 8 fr.
Depuis le commencement de ce siècle, la Physique a été renouvelée dans son ensemble : aussi ne peut-on qu'approuver l'Auteur du *Petit Traité de Physique* d'avoir, même dans un livre élémentaire, exposé cette science au point de vue des théories nouvelles. Dès les premiers mots, l'Auteur démontre que la Chaleur est un mouvement moléculaire, et cette idée guide ensuite le lecteur dans toutes les expériences, et les explique. La Terre et les aimants n'étant que des solénoïdes, on fait dépendre le Magnétisme de l'Électricité. L'Acoustique montre dans leurs détails les vibrations longitudinales, transversales, circulaires et elliptiques; elle prépare à l'Optique. Cette dernière Partie enfin est l'étude des vibrations de toute sorte qui se produisent dans l'éther; les interférences et la polarisation sont expliquées de la manière la plus élémentaire, et la Théorie vibratoire est rendue accessible à tous.
Un tel mode d'enseignement est appelé à rendre un réel service aux Élèves en les délivrant de ce que les savants ont abandonné, en élevant leur esprit jusqu'à de plus hautes conceptions, en leur montrant l'ensemble philosophique d'une science déjà très-avancée et qui semble toucher à son terme.

PONCELET, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique appliquée aux machines**; publié par M. Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. In-8, avec 117 figures dans le texte et 2 planches gravées sur cuivre; 1874..... 12 fr.

TYNDALL (J.), Professeur de Philosophie naturelle à l'Institution Royale de la Grande-Bretagne. — **La Chaleur**, *Mode de mouvement.* 2e édition française, traduite de l'anglais, sur la 4e édition, par M. l'*Abbé Moigno.* Un beau volume in-18 jésus de XXXII-576 pages, avec 110 figures dans le texte; 1874.. 8 fr.

TYNDALL (John), Professeur à l'Institution royale et à l'École royale des Mines de la Grande-Bretagne. — **Le Son**, traduit de l'anglais et augmenté d'un *Appendice* par M. l'Abbé Moigno. Un beau volume in-8, orné de 171 figures dans le texte; 1869..... 7 fr.
« J'ai cherché, dit le célèbre Auteur dans sa Préface, à rendre la science de l'Acoustique accessible à toutes » les personnes intelligentes, en y comprenant celles qui n'ont reçu aucune instruction scientifique particulière. » J'ai traité mon sujet d'une manière tout à fait expérimentale, et j'ai cherché à placer tellement chaque expé- » rience sous les yeux et dans la main du lecteur, qu'il puisse la réaliser lui-même ou la répéter. » Il serait impossible, en effet, de mieux choisir et de décrire dans un style plus attrayant les expériences nécessaires à la manifestation des faits et à la détermination des lois qui les régissent. Cet Ouvrage sera donc lu avec un vif intérêt, non-seulement par les Professeurs, qui y trouveront toutes les découvertes ayant renouvelé pour ainsi dire l'Acoustique depuis quelques années, mais encore par tous les amis d'une science claire et pratique.